ELEMENTOS DA MATEMÁTICA

Marcelo Rufino de Oliveira

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

3

SEQUÊNCIAS
COMBINATÓRIA
PROBABILIDADE
MATRIZ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

$$p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j} S_j(n)\right]$$

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \ldots + \binom{n+p}{n} = \binom{n+p+1}{n+1}$$

$$P_n^{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \frac{n!}{(x_1!)(x_2!)\ldots(x_k!)}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Marcelo Rufino de Oliveira
Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)

Desde 1998 desenvolvendo trabalho como:
Coordenador de Turmas ITA/IME
Professor de Matemática de Turmas ITA/IME
Professor de Física de Turmas ITA/IME
Professor de Olimpíadas de Matemática

SEQUÊNCIAS
COMBINATÓRIA
PROBABILIDADE
MATRIZ

3ª edição (2021)

APRESENTAÇÃO À 3ª EDIÇÃO

Atualizado após longos 11 anos, o volume 3 da coleção Elementos da Matemática apresenta os conteúdos de Indução Finita, Sequências, Combinatória, Probabilidade e Matrizes. Assim como os demais volumes da coleção, o objetivo é proporcionar um material de qualidade compatível aos vestibulares do ITA e IME.

Essa nova edição sofreu grande influência da experiência do autor em lecionar nas escolas de Fortaleza, cidade que vem concentrando a maioria dos aprovados nos concursos do ITA e IME. A troca de informações com alunos e professores de Fortaleza foi bastante rica e fundamental na formatação dessa nova edição do volume 3. Por exemplo, o autor decidiu incluir nessa atualização assuntos que, apesar de nunca terem sido cobrados diretamente, podem um dia vir a ser cobrados nas provas do ITA ou IME. Outra influência foi o aumento do nível dos exercícios resolvidos e propostos. Ressalto, porém, que este livro é voltado para os concursos do ITA e IME, ou seja, é possível que alguns leitores ainda achem que deveriam constar questões mais aprofundadas. Para estes, é importante lembrar que existe uma outra coleção, do mesmo autor, denominada Técnicas em Olimpíadas de Matemática, com praticamente os mesmos assuntos deste livro e exercícios bem mais pesados.

No primeiro capitulo desta obra há o assunto de Indução Finita, que sempre é um recurso, porém nunca obrigatório, a ser utilizado em demonstrações. Depois há três capítulos relacionados ao assunto de Sequências, conteúdo muito cobrado nos vestibulares do ITA e IME, este último constantemente exigindo conhecimento dos termos recorrentes de uma sequência, que praticamente inexiste em outros livros disponíveis em nosso país. O assunto de análise combinatória e suas sub áreas ocupa cinco capítulos do livro. Por ser o tópico de mais difícil aprendizado de toda a matemática, o autor decidiu por produzir o material mais completo possível, incluindo assuntos mais avançados, como Números de Stirling, aplicação de recorrência para resolver problemas de contagem e probabilidade, funções geradoras, espaços amostrais infinitos e probabilidade geométrica. Nestes capítulos há uma grande quantidade de exercícios de olimpíadas de matemática, pelo fato de combinatória ser muito cobrado em olimpíadas. Porém, todas as questões olímpicas do livro foram devidamente filtradas e somente estraram no livro questões que podem, um dia, serem aplicadas em provas do ITA ou IME. Por fim, o livro reserva três capítulos para a álgebra linear, onde o autor também fez a opção de incluir tópicos que dificilmente aparecem em livros de ensino médio, como determinantes de ordem N, diagonalização de matrizes, método de Gauss-Jordan de inversão de matrizes e autovalores/autovalores.

Ao contrário das atualizações dos volumes 0 e 2, que sofreram alterações pontuais, vários capítulos do volume 3 foram praticamente reescritos. São tantas atualizações que é necessário descrever com detalhes:

i) Nova identidade visual, seguindo o padrão dos volumes 0, 2 e 5;

ii) Aumento da fonte, motivo de reclamações das primeiras edições dos volumes da coleção;
iii) Grande atualização dos exercícios, com pelo menos 50% de exercícios novos e manutenção apenas das melhores questões da edição anterior;
iv) Aumento substancial da quantidade de exercícios resolvidos;
v) Separação do conteúdo de PA/PG em dois capítulos separados;
vi) Acréscimo do item "Soma das Potências dos N Primeiros Inteiros Positivos" dentro do capítulo de PA;
vii) Acréscimo dos itens "Princípio da Reflexão" e "Números de Stirling" no capítulo de Análise Combinatória;
viii) Acréscimo do item "Funções Geradoras" dentro de Binômio de Newton;
ix) Acréscimo dos itens "Algumas Estratégias em Probabilidade" e "Probabilidade Geométrica" no capítulo de Probabilidades;
x) Os capítulos de Matriz, Determinante e Sistemas Lineares foram totalmente reescritos e alguns tópicos foram adicionados, tais como "Determinantes de Ordem N", "Método de Gaus-Jordan da Inversão" e "Diagonalização de Matrizes".

A coleção Elementos da Matemática passou por vários formatos de divisão de conteúdos e autores em seus volumes. Atualmente, a coleção está organizada da seguinte maneira:

Volume 0 – Álgebra, Aritmética, Proporção e Frações
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 1 – Conjuntos, Funções e Teoria dos Números
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 2 – Geometria Plana
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 3 – Sequências, Combinatória, Probabilidade e Matrizes
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 4 – Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 5 – Geometria Espacial e Trigonometria
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Até a data de lançamento da 3ª edição deste volume (janeiro de 2021), os volumes 0, 2, 3 e 5 já estão seguindo o novo formato de identidade visual. A proposta é lançar todos os volumes nesse novo formato em um prazo de 2 anos.

Qualquer erro encontrado em um dos volumes pode ser reportado ao autor no e-mail marcelorufino@hotmail.com. Sua contribuição é muito importante para a melhoria da qualidade das próximas tiragens dos livros.

Bom proveito nos seus estudos!!!

O autor

Índice

Capítulo 1. Princípio da Indução Finita

1. Introdução 1
   Exercícios 7

Capítulo 2. Progressão Aritmética

1. Introdução ao Estudo das Sequências 14
2. A Progressão Aritmética 15
3. Soma das Potências dos N Primeiros Inteiros Positivos 32
3. Progressões Aritméticas de Segunda Ordem 39
   Exercícios 44

Capítulo 3. Progressão Geométrica

1. Definição 58
2. Termo Geral 59
3. Propriedades 64
4. Interpolação Geométrica 66
5. Soma dos N Primeiros Termos de uma PG 69
6. Produto dos N Primeiros Termos de uma PG 80
7. Progressão Geométrica de 2ª Ordem 83
   Exercícios 85

Capítulo 4. Sequência Recorrente

1. Definição 106
2. Classificação 106
3. Sequência Recorrentes Lineares de 1ª Ordem 107
4. Sequência Recorrentes Lineares de 2ª Ordem Homogênea 110
5. Sequência Recorrentes Lineares de 2ª Ordem Não Homogênea 113
6. Sequências Recorrentes Não-Lineares 116
   Exercícios 120

Capítulo 5. Análise Combinatória

1. Introdução 122
2. Método Direto de Contagem 125
3. Método Indireto de Contagem 125
4. Principais Erros Cometidos em Questões de Contagem 126
5. Princípios Fundamentais da Contagem 127
6. Fatorial 142
7. Permutações Simples 143
8. Permutações Circulares 154
9. Permutações com Elementos Repetidos 160
10. Combinações Simples 168
11. Arranjos 186
12. Soluções Inteiras Positivas da Equação $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$ 188

13. Soluções Naturais Positivas da Equação $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$ 189
14. Princípio da Inclusão-Exclusão 196
15. Permutações Caóticas (Desarranjos) 200
16. Lemas de Kaplansky 202
17. Princípio da Reflexão 207
18. Números de Stirling 211
Exercícios 216

Capítulo 6. Binômio de Newton
1. Números Binomiais 247
2. O Desenvolvimento em Binômio de Newton 251
3. Relação de Stifel 261
4. O Triângulo de Pascal 261
5. O Desenvolvimento Multinomial 277
6. Binômio de Newton e Números Complexos 283
7. Funções Geradoras 285
Exercícios 288

Capítulo 7. Probabilidade
1. Introdução 300
2. Resultado e Experimento Aleatório 300
3. Espaço Amostral 301
4. Evento 301
5. Frequência Relativa 302
6. Distribuição de Probabilidades 304
7. Propriedades da Probabilidade 307
8. Probabilidade Condicional 321
9. Teorema da Probabilidade Binomial 334
10. Algumas Estratégias em Probabilidade 339
11. Probabilidade com Espaço Amostral Infinito 344
12. Probabilidade Geométrica 350
Exercícios 354

Capítulo 8. Recorrência em Combinatória e Probabilidade
1. Introdução 377
Exercícios 384

Capítulo 9. Princípio das Gavetas
1. Introdução 388
Exercícios 395

Capítulo 10. Matriz
1. Introdução 404
2. Operações com Matrizes 406
3. Matrizes Especiais 413
Exercícios 324

Capítulo 11. Determinante
1. Introdução 437
2. Fórmulas Para Matrizes 1×1, 2×2 e 3×3 438
3. Definição Geral de Determinante 442
4. Algoritmos Práticos pro Cálculo do Determinante 444
5. Propriedades dos Determinantes 453
6. Matriz Inversa – Cálculo por Determinante 466
7. Determinantes de Ordem N 474
Exercícios 483

Capítulo 12. Sistemas Lineares
1. Equação Linear 506
2. Sistema de Equações Lineares 506
3. Dependência Linear 511
4. Regra de Cramer 514
5. Sistema Escalonado 517
6. Sistemas Homogêneos 527
7. Caracteristica de uma Matriz 531
8. Teorema de Rouché-Capelli 538
9. Método de Gauss-Jordan de Inversão de Matrizes 544
10. Autovalor e Autovetor de uma Matriz Quadrada 545
11. Matrizes Semelhantes 556
12. Diagonalização de Matrizes 559
Exercícios 563

Capítulo 13. Gabaritos 577

PRINCÍPIO DA INDUÇÃO FINITA

O Princípio da Indução Finita (PIF) é um artifício matemático utilizado, em geral, para comprovar que uma proposição P(n) que, por inspeção, é válida para uma dada sequência de inteiros positivos consecutivos (conjunto A), é também válida para todos os inteiros positivos maiores que o elemento mínimo de A.

O enunciado do Princípio da Indução Finita é o seguinte:

"P(n) é uma proposição associada a cada elemento do conjunto A, formado por todos os inteiros maiores que um determinado inteiro, que é o elemento mínimo de A (min A), e que satisfaz às duas seguintes condições:
(1) P(min A) é verdadeira;
(2) para todo inteiro positivo k, se P(k) é verdadeira, então P(k + 1) também é verdadeira, $k \geq$ min A.
Nestas condições, a proposição P(n) é verdadeira para todo inteiro n maior ou igual que min A."

Observações:
(1) O Princípio da Indução Finita somente pode ser usado para demonstrar proposições válidas para números inteiros, não podendo ser usado para demonstrar proposições nos números racionais ou reais.
(2) Em algumas situações, no ato de demonstração da validade de P(k + 1), surge a necessidade de tomar como válidas outras proposições, além de P(k), como exemplo P(k – 1), P(k – 2), ... Neste caso, é necessário demonstrar que a proposição P é válida para uma certa quantidade de elementos iniciais de A, não apenas para P(min A). Para ser mais exato, se for necessário tomar como válidas m ($m \in \mathbb{N}$, $m > 1$) proposições como válidas:

$$P(k),\ P(k-1),\ \ldots,\ P(k-m+1),$$

é necessário demonstrar que a proposição é válida para pelo menos os m menores elementos de A:

$$P(\min A),\ P(1 + \min A),\ \ldots,\ P(m-1+\min A).$$

(3) É permitido fazer uma indução dentro de outra. Por exemplo, se na demonstração que a proposição P(k + 1) é válida for necessário usar uma outra proposição Q(n), é possível demonstrar Q(n) por indução e depois usar este resultado em P(k + 1).

Exercícios Resolvidos

1) Demonstrar a proposição P(n): $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$, $\forall\, n \in N$.

Solução:

(1) Notemos que P(1) é verdadeira, pois $1 = 1^2$.

(2) A hipótese de indução é que a proposição: P(k):

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) = k^2$, $k \in N$ é verdadeira.

Somando $2k + 1$ a ambos os membros da igualdade acima, temos:

$1 + 3 + 5 + ... + (2k - 1) + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$

ou seja, a proposição P(k + 1) é verdadeira.

Logo, pelo "Princípio da Indução Finita", a proposição P(n) é verdadeira para todo inteiro positivo n.

2) Demonstrar a proposição P(n): $2^n > n$, $\forall\, n \in IN^*$

Solução:

(1) Observemos que P(1) é verdadeira, pois $2^1 = 2 > 1$

(2) A hipótese da indução é que, para algum inteiro $k > 1$, vale a desigualdade $2^k > k$

Então, multiplicando por 2 a desigualdade anterior, temos:

$2.2^k > 2k$ ou $2^{k+1} > k + k \geq k + 1 \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1$.

Então a proposição P(k + 1) é verdadeira.

Pelo PIF, a proposição P(n) é válida para todo inteiro positivo.

3) Prove que $5^{2n} - 1$ é divisível por 24, $\forall\, n \in N$.

Solução:

I) $n = 1 \Rightarrow 5^2 - 1 = 25 - 1 = 24$

II) Suponhamos que exista um $k \in N$, tal que $5^{2k} - 1$ é divisível por 24, ou seja, $5^{2k} - 1 = 24x$, $x \in IN$

III) $5^{2k} - 1 = 24x \Rightarrow 5^2(5^{2k} - 1) = 25(24x) \Rightarrow 5^{2k+2} - 25 = 24.25x \Rightarrow$

$5^{2k+2} - 1 = 24.25x + 24 \Rightarrow 5^{2(k+1)} - 1 = 24(25x + 1)$

4) Prove que o dígito das dezenas de 3^n, n um inteiro positivo é sempre par.

Solução:

Notemos, inicialmente, que $3^1 = 03$, $3^2 = 09$, $3^3 = 27$, possuem dígitos das dezenas pares, que concorda com o enunciado.

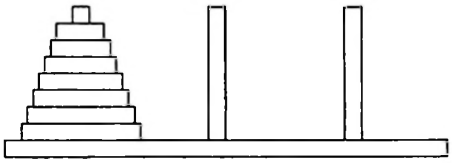
Suponhamos que exista um inteiro positivo k tal que 3^k possua dígito das dezenas par, ou seja, $3^k = (Mxy)_{10}$, onde y é o dígito das unidades, x (que é par) o dígito das dezenas e M o número que contém os dígitos restantes de 3^k.

Notemos ainda que y somente pode assumir os valores 1, 3, 7 ou 9.

Desta forma, ao multiplicarmos 3^k por 3, desde que o algarismo das dezenas de 3×1, 3×3, 3×7 e 3×9 é sempre par (0 ou 2), temos que vai 0 ou 2 para a casa das

dezenas da conta desta multiplicação. Notamos também que o dígito das unidades de 3x é par, pois x é par.
Como o dígito das dezenas de 3^{k+1} é igual ao dígito das unidades de 3x (que é par) mais o das dezenas de 3y (que é 0 ou 2), temos que o dígito das dezenas de 3^{k+1} é par. Assim, por indução, temos que o dígito das dezenas de 3^n é sempre par.

5) (Torre de Hanói) Existem 3 pinos fixos em uma base, com n discos em uma delas. Os discos, que possuem um furo em seu centro, são colocados em um dos pinos em sua ordem de tamanho. É permitido mover o menor dos discos de um disco para outro disco, exceto que você não pode colocar um disco maior sobre um disco menor.



Prove que é possível mover todos os discos em um outro pino usando $2^n - 1$ movimentos.

Solução:

I) Para n = 1 basta um movimento deslocar este o único disco para outro pino;
II) Suponhamos que para k discos sejam necessários $2^k - 1$ movimentos para mover todos os discos para outro pino;
III) Para k + 1 discos podemos iniciar colocando todos os k primeiros discos no 2^o pino, onde são necessários (pela suposição da indução) $2^k - 1$ movimentos. Coloquemos o último disco do 1^o pino no 3^o pino (mais um movimento) e depois passamos todos os k discos que estão no 2^o pino para o 3^o pino. Assim, para k +1 discos precisamos de $(2^k - 1) + 1 + (2^k - 1) = 2^{k+1} - 1$ movimentos.

6) Prove que $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

Solução:

Sejam $f(n) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ e $g(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$.

I) Claramente f(1) = g(1) = 1/2;
II) Suponhamos que exista n tal que f(n) = g(n);
III) Observe que:

$$f(n+1) - f(n) = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \quad \text{e}$$

$$g(n+1) - g(n) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}$$

Assim, podemos afirmar que f(n + 1) – f(n) = g(n + 1) – g(n).
Como f(n) = g(n) temos que f(n + 1) = g(n + 1), que completa a indução.

7) (Torneio Internacional das Cidades) A sequência é definida por:

$$a_0 = 9,\ a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3,\ n > 0.$$

Mostre que a_{10} contém mais do que 1000 noves em sua representação decimal.

Solução:

Notemos que $a_0 = 9$, $a_1 = 22599$, ...

Notemos que a_0 termina em um 9 e a_1 termina em dois 9's.

Provemos que a_{10} termina em mais do que 1000 noves.

Como $1000 < 2^{10} = 1024$, podemos conjecturar que a_n termina em 2^n 9's. Vamos demonstrar isto por indução finita.

Sabemos que um número termina em m 9's se é da forma $a.10^m - 1$

Suponhamos então que existe um n tal que $a_n = a.10^m - 1$

$a_{n+1} = 3a_n^4 + 4a_n^3 = 3(a.10^m - 1)^4 + 4(a.10^m - 1)^3 = (a.10^m - 1)^3(3a.10^m - 3 + 4) =$

$= (a.10^m - 1)^3(3a.10^m + 1) = (a^2.10^{2m} - 2a.10^m + 1)(3a^2.10^{2m} - 2a.10^m - 1) =$

$= b.10^{2m} - 1$

Como o número de noves dobra em cada passo: $a_n = a.10^{2^n} - 1$ para todo $n \geq 0$.

8) (Olimpíada do Pará-12) Observe que:

$$12 = 3 \times 4$$
$$1122 = 33 \times 34$$
$$111222 = 333 \times 334$$
$$11112222 = 3333 \times 3334$$

Demonstre que $\underbrace{111...11}_{n}\underbrace{222...22}_{n} = \underbrace{333...33}_{n} \times \underbrace{333...334}_{n-1}$.

Solução:

Para n = 1 tem-se $3 \times 4 = 12$

Suponhamos que exista $k \in \mathbb{N}$ tal que $\underbrace{111...11}_{k}\underbrace{222...22}_{k} = \underbrace{333...33}_{k} \times \underbrace{333...334}_{k-1}$

$$\underbrace{333...33}_{k+1} \times \underbrace{333...334}_{k} = \left(10.\underbrace{333...33}_{k} + 3\right)\left(10.\underbrace{333...334}_{k-1} - 6\right) =$$

$$= 100 \times \underbrace{333...33}_{k}\underbrace{333...334}_{k-1} - 60 \times \underbrace{333...334}_{k} + 60 + 30 \times \underbrace{333...34}_{k} - 18 =$$

$$= \underbrace{111...11}_{k}\underbrace{222...22}_{k}00 - 30 \times \underbrace{333...34}_{k} + 42 = \underbrace{111...11}_{k}\underbrace{222...22}_{k}00 - \underbrace{100...00}_{k}20 + 42 =$$

$$= \underbrace{111...11}_{k}\underbrace{222...22}_{k}00 - \underbrace{100...00}_{k+2} + 22 = \underbrace{111...11}_{k+1}\underbrace{222...22}_{k+1}$$

Por indução, segue que $\underbrace{111...11}_{n}\underbrace{222...22}_{n} = \underbrace{333...33}_{n} \times \underbrace{333...334}_{n-1}$.

9) O número 3 pode ser expresso como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos de 4 maneiras diferentes:

$$3,\quad 1+2,\quad 2+1,\quad 1+1+1.$$

Mostre que todo inteiro n pode ser expresso de 2^{n-1} maneiras.

Solução:

Vamos analisar alguns casos pequenos para entender como funciona o mecanismo da indução nesse caso.

Para n = 1 tem-se 1 maneira: 1

Para n = 2 tem-se 2 maneiras: 1 + 1, 2

Para n = 3 tem-se 4 maneiras: 1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1, 3

Para n = 4 tem-se 8 maneiras:

1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 2, 1 + 2 + 1, 2 + 1 + 1, 1 + 3, 3 + 1, 4

Para n = 5 tem-se 16 maneiras:

1 + 1 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 1 + 2, 1 + 1 + 2 + 1, 1 + 2 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, 1 + 1 + 3,
1 + 3 + 1, 3 + 1 + 1, 1 + 2 + 2, 2 + 1 + 2, 2 + 2 + 1, 1 + 4, 4 + 1, 2 + 3, 3 + 2, 5

O objetivo é demonstrar, por indução, que existem $a_n = 2^{n-1}$ maneiras de escrever n como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos.

Suponhamos, por indução, que exista k tal que $a_k = 2^{k-1}$.

Dos exemplos anteriores, conclui-se que cada forma de escrever k como uma soma pode ser usada para gerar duas formas de escrever k + 1, uma delas escrevendo 1 + na frente da soma e a outra somando 1 ao primeiro elemento da soma.

Por exemplo, aplique esse raciocínio nas formas de escrever k = 2:

1 + 1 → 1 + 1 + 1 e 2 + 1

2 → 1 + 2 e 3

Logo, as duas maneiras de escrever 2 geram as 4 maneiras de escrever 3.

Agora para k = 3:

1 + 1 + 1 → 1 + 1 + 1 + 1 e 2 + 1 + 1 + 1

1 + 2 → 1 + 1 + 1 e 2 + 2

2 + 1 → 1 + 2 + 1 e 3 + 1

3 → 1 + 3 e 4

Perceba que obtemos todas as 8 formas de escrever k = 4 por esse procedimento, a partir das 4 maneiras de escrever 3.

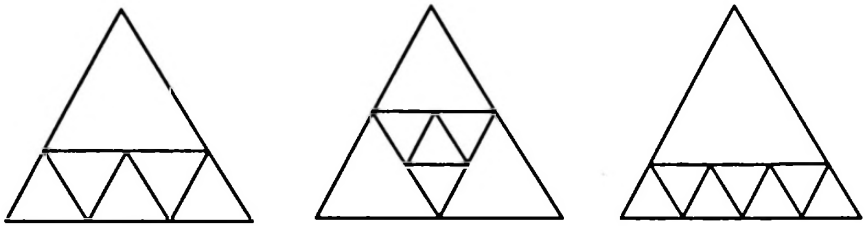
Replicando esse método para um k qualquer, onde cada forma de escrever k gera duas formas distintas de escrever k + 1, conclui-se que $a_{k+1} = 2.a_k$, $k \geq 1$. Como $a_k = 2^{k-1}$, segue que $a_{k+1} = 2^k$.

Portanto, por indução, tem-se que existem exatamente 2^{n-1} maneiras de n ser expresso como uma soma ordenada de uma ou mais inteiros positivos.

10) Prove que um triângulo equilátero pode ser dividido em n triângulos equiláteros para $n \geq 6$.

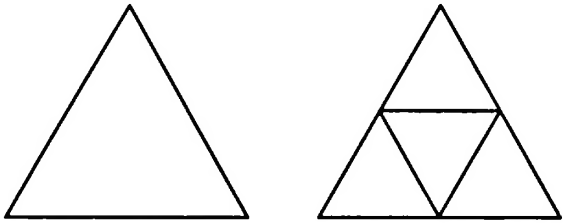
Solução:

Um triângulo pode ser dividido em 6, 7 e 8 triângulos equiláteros das seguintes formas:



Como a proposição foi demonstrada para os elementos 6, 7 e 8, é possível supor que a proposição é válida para os inteiros $3k$, $3k + 1$ e $3k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Observe as figuras abaixo, onde um triângulo equilátero foi dividido em quatro triângulos equiláteros menores. Deste modo, ocorreu um aumento de 3 triângulos equiláteros na figura.



Perceba que este procedimento pode ser feito não apenas no triângulo maior original, mas também no interior de qualquer um dos n triângulos equiláteros menores, $n \geq 6$, em que ficou dividido o triângulo original. Assim, a partir dos triângulos equiláteros que ficaram divididos em $3k$, $3k + 1$ e $3k + 2$ triângulos, aplicando a divisão acima em qualquer um dos triângulos menores, obtém triângulos equiláteros divididos em $3k + 3$, $3k + 4$ e $3k + 5$ triângulos equiláteros.

Deste modo, segue por indução que um triângulo equilátero pode ser dividido em n triângulos equiláteros, para $n \geq 6$.

Exercícios de Vestibular

1) (Fuvest-77) Prove que, para todo número natural $n \geq 1$, o número $a_n = \frac{4^n - 1}{3}$ é inteiro e ímpar.

2) (UFRJ-91) Prove que se n um número natural par, então $2^n - 1$ é divisível por 3.

3) (Unicamp-92) Mostre que 3 divide $n^3 - n$ qualquer que seja o número natural n.

4) (Unicamp-97) Seja x um número real, $x > -1$. Prove que para todo natural n tem-se $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

5) (ITA-71) Qual o maior número de partes em que um plano pode ser dividido por n linhas retas? (Sugestão: usar indução finita).

a) n^2;
b) $n(n + 1)$;
c) $n(n + 1)/2$;
d) $(n^2 + n + 2)/2$;
e) N.d.r.a.

6) (ITA-01) Se $f :]0, 1[\to R$ é tal que, $\forall x \in]0,1[,\ldots |f(x)| < 1/2$ e

$$f(x) = \frac{1}{4}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)$$

então a desigualdade válida para qualquer $n = 1, 2, 3, \ldots$ e $0 < x < 1$ é:

a) $|f(x)| + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{2^n} \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2}$
c) $\frac{1}{2^{n+1}} < |f(x)| < \frac{1}{2}$
d) $|f(x)| > \frac{1}{2^n}$
e) $|f(x)| < \frac{1}{2^n}$

7) (IME-80) Prove que: $n^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i$, onde $a_i = (n - 1)n + 2i - 1$.

8) (IME-87) Mostre que para todo número natural n maior ou igual a 2, $2^{\frac{5n}{4}} \leq \binom{2n}{n}$.

9) (IME-88) Considere a sequência cujos primeiros termos são: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Seja a_n seu n-ésimo termo. Mostre que $a_n < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

10) (IME-91) Mostre que

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{(2n+1)x}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$$

11) (IME-93) Prove, por indução, que:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n$$

Para $n \in N$

12) (IME-93) Considere uma função L: $\Re^* \to \Re$ que satisfaz:
1. L é crescente, isto é, para quaisquer $0 < x < y$ tem-se $L(x) < L(y)$;
2. $L(x.y) = L(x) + L(y)$ para quaisquer x, $y > 0$.
Mostre que:
a) $L(1) = 0$;
b) $L(1/x) = -L(x)$, para todo $x > 0$;
c) $L(x/y) = L(x) - L(y)$ para quaisquer x, $y > 0$;

d) $L(x^n) = nL(x)$ para todo $x > 0$ e natural n;

e) $L(\sqrt[n]{x}) = L(x)/n$ para todo $x > 0$ e natural n;

f) $L(x) < 0 < L(y)$ sempre que $0 < x < 1 < y$.

13) (IME-04) Demonstre que o número $\underbrace{11...11}_{n-1}\underbrace{22...225}_{n}$ é um quadrado perfeito.

14) (IME-07) Seja f: IN → IR uma função tal que $\sum_{k=0}^{n} f(k) = 2008\frac{(n+1)}{(n+2)}$, onde IN e IR são, respectivamente, o conjunto dos números naturais e o dos números reais. Determine o valor numérico de $\frac{1}{f(2006)}$.

15) (Provão-98) Considere a sequência $\sqrt{2}$, $\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, ... definida por $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$, para $n \geq 1$. Mostre que $a_n < 2$ para todo $n \geq 1$.

Exercícios Gerais

16) Demonstrar por Indução Finita:

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$

d) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)^3 = n^2(2n^2-1)$

e) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

f) $\sum_{k=1}^{n} \frac{3k+1}{5^{k-1}} = \frac{35}{16} - \frac{12n+7}{16.5^{n-1}}$

g) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)^2}{2^{k-1}} = 34 - \frac{4n^2+12n+17}{2^{n-1}}$

h) $\sum_{k=1}^{n} (2k-1)x^{k-1} = \frac{1+x-(2n-1)x^n+(2n-1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$

i) $\sum_{k=1}^{n} (3k-1)(3k+2) = n(3n^2+6n+1)$

j) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{k(k+1)2^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)2^n}$

k) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k.2^k}{(k+2)!} = 1 - \frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$

l) $\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+3}{k(k+1)3^k} = 1 - \frac{1}{(n+1)3^n}$

m) $\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k-1}{(k+2)!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)n!}$

n) $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$

o) $a + aq + aq^2 + ... + aq^n = \frac{a(q^{n+1}-1)}{q-1}$

p) $2^n > n^2$, $\forall\, n \geq 5$

q) $2^n > n^3$, $\forall\, n \geq 10$

r) $4^n > n^4$, $\forall\, n \geq 5$

s) $n! > n^2$, $\forall\, n \geq 4$

t) $n! > n^3$, $\forall\, n \geq 6$

17) Demonstrar, usando Indução Finita, que:
a) $3^n - 1$ é divisível por 2, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
b) $n^3 - n$ é divisível por 6, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
c) $8^n - 3^n$ é divisível por 5, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
d) $n(n-1)(n+1)(3n+2)$ é divisível por 24, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

18) Demonstre a identidade

$$\cos\alpha.\cos 2\alpha.\cos 4\alpha...\cos 2^n\alpha = \frac{\operatorname{sen} 2^{n+1}\alpha}{2^{n+1}\operatorname{sen}\alpha}$$

19) Prove que:

$$\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n},$$

para todo inteiro $n > 1$.

20) Demonstre que

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$$

para todo número natural $n > 1$.

21) Para todo inteiro $n > 1$, prove que

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

22) Prove que $\dfrac{4^n}{n+1} < \dbinom{2n}{n}$ para todo número inteiro $n > 1$.

23) Prove que se $A_1 + A_2 + ... + A_n = \pi$, $0 < A_i < \pi$, $i = 1, 2, ..., n$, então:

$$\operatorname{sen} A_1 + \operatorname{sen} A_2 + ... + \operatorname{sen} A_n \le n.\operatorname{sen}\frac{\pi}{n}$$

24) Há algo errado com a seguinte demonstração, o que é?
"Teorema: Seja a um número positivo. Para todo inteiro positivo n nós temos $a^{n-1} = 1$.
Demonstração:
Se $n = 1$, $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.
E por indução, assumindo que o teorema é verdadeiro para 1, 2, ..., n, nós temos

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1}.a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1.1}{1} = 1, \text{ donde}$$

o teorema é verdadeiro para $n + 1$ também."

25) Seja (F_n) a sequência de Fibonacci, definida por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \ge 0$. Demonstre por indução que:
a) $F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n F_{n+1}$.
b) $F_1 + F_2 + ... + F_n = F_{n+2} - 1$.
c) $F_1 + F_3 + ... + F_{2n+1} = F_{2n+2}$.
d) $\dfrac{F_n}{F_{n-1}} < 1{,}7, \quad n \ge 4$.

26) Mostre por indução que:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n.$$

27) Seja α um número real tal que $\alpha + \dfrac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Prove, por indução, que $\alpha^n + \dfrac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

28) Prove, por indução, que todos os números da forma 1007, 10017, 100117, ... são divisíveis por 53.

29) Demonstre, por indução, que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{[a+(k-1)b][a+kb]} = \frac{n}{a(a+nb)}.$$

30) Demonstre, por indução, que:

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)...\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

31) Demonstre, por indução, que para todos naturais $k \leq n$:

$$1+\frac{k}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^k < 1+\frac{k}{n}+\frac{k^2}{n^2}.$$

32) Demonstre, por indução, que

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$$

é divisível por 9.

33) Demonstre, por indução, que

$$4^n + 15n - 1$$

é divisível por 9.

34) Um L-treminó é uma figura plana como a do desenho (ou uma rotação dela). Considere um "tabuleiro de xadrez" de tamanho $2^n \times 2^n$ do qual se remove uma qualquer das casas. Mostre que o restante do tabuleiro pode ser coberto por L-treminós sem superposição.

35) Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, seja

$$x_n = \frac{1}{2}\left(a^n + b^n\right),$$

onde $a = 3+\sqrt{2}$ e $b = 3-\sqrt{2}$. Demonstre que x_n é um inteiro para cada n.

36) Demonstre, por indução, que:

$$\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \text{ para } n \in \mathbb{N}.$$

37) Para cada inteiro k, seja $a_k = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}$. Prove que, para cada inteiro positivo n:

$$\sum_{k=1}^{n}(2k+1)a_k = (n+1)^2 a_n - \frac{n(n+1)}{2}.$$

38) Prove que uma soma arbitrária de $n \geq 8$ centavos pode ser paga com moedas de 3 e 5 centavos (tendo essas moedas em quantidade suficiente).

39) A sequência $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ é tal que $a_1 = 3$, $a_2 = 5$ e $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, para $n > 2$. Prove que $a_n = 2^n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

40) Sendo n um número inteiro positivo qualquer, demonstrar que a expressão $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ é divisível por 7

41) Prove que:

$1.1 + 1.2.2 + 1.2.3.3 + \ldots + 1.2\ldots(n-1).n.n =$
$= 1.2\ldots n(n+1) - 1$

42) Prove, por indução, que, $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 > \frac{n^4}{4}.$$

43) Se A é um conjunto finito com n elementos, mostre que A possui 2^n subconjuntos.

44) a) Mostre, por indução em n, que $(2+\sqrt{3})^n$ é da forma $a_n + b_n\sqrt{3}$, com a_n e b_n inteiros, para todo $n \geq 1$.

b) Prove, por indução em n, que se $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$, com a_n e b_n inteiros, então $(2-\sqrt{3})^n = a_n - b_n\sqrt{3}$, para todo $n \geq 1$.

45) Mostre que, para todo número inteiro positivo n, existe um número inteiro positivo M satisfazendo as condições abaixo:

(i) M possui n dígitos pertencentes ao conjunto $\{1, 2\}$.

(ii) M é divisível por 2^n.

46) Sejam $m \in IN$, $m > 2$. Suponha que você possui m moedas, uma das quais é falsa e pesa menos do que uma verdadeira. Você tem uma balança de dois pratos, mas não tem pesos. A única forma de pesagem consiste em por algumas moedas em cada prato e verificar se a balança está equilibrada. Se $m = 3^n$, demonstre que n pesagens são suficientes para achar a moeda adulterada.

47) Prove que $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ é divisível por 11, para todo número natural k.

48) Seja n um número inteiro positivo. Para cada um dos inteiros $n + 1, n + 2, \ldots, 2n$ considere o seu maior divisor ímpar. Prove que a soma de todos estes divisores é igual a n^2.

49) Prove que, para todo $n \in IN$, tem-se que 133 divide $11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

50) Considere a sequência definida por:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 4 \\ a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \end{cases}$$

Determine o termo geral da sequência a_n.

Exercícios de Olimpíada

41) (Santa Catarina-11) Mostre que os números da forma $\underbrace{444\ldots44}_{n}\underbrace{222\ldots22}_{n+1}5$ são quadrados perfeitos para $n \geq 0$.

52) (Grande PoA-17) Considere as funções $f: Z \to Z$ que verificam a condição:

$$f(n) + f(n + 1) = 2n + 1,$$

para todos os números inteiros n. Mostre que elas têm como fórmula uma expressão do tipo $f(n) = (-1)^n.A + B.n$, válida tanto para todos os $n > 0$ como para todos os $n < 0$.

53) (Grande PoA-08) Mostrar que o número $3^{3n+3} - 26n - 27$ sempre é um múltiplo de 169, qualquer que seja o valor de n inteiro positivo.

54) (Ceará-84) Seja n um inteiro maior que 2. Se c é a hipotenusa de um triângulo retângulo e a e b seus catetos, prove que $c^n > a^n + b^n$.

55) (Ceará-84) a) Se k é ímpar, prove que o polinômio $p(x) = x^k + a^k$ é divisível por $x + a$ e que $m(x) = x^{2k} - 1$ é divisível por $x^2 - 1$.
b) Seja n um inteiro positivo qualquer e $A_n = 5^n + 2.3^{n-1} + 1$. Prove que $A_n = (5^n + 3^n) - (3^{n-1} - 1) = 5(5^{n-1} + 3^{n-1}) - (3^n - 1)$.
c) Prove que, para todo inteiro positivo n, A_n é divisível por 8.

56) (Ceará-85) a) Mostre que se n é um inteiro positivo, então $(n - 1)n(n + 1)$ é um múltiplo de 3.
b) Mostre que se n é um inteiro positivo, então $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ é divisível por 3.

57) (Ceará-92) Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ uma sequência de inteiros positivos satisfazendo $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$, $n = 1, 2, 3 \ldots$. Mostre que

$$a_{n+1} = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 + 1$$

58) (Ceará-00) Considere todos os subconjuntos não-vazios do conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$, dos n primeiros números naturais. Para cada um desses subconjuntos calculamos o produto de seus elementos. Encontre a soma de todos os produtos obtidos. (Obs.: Se um subconjunto tem um único elemento, esse elemento é o produto).

59) (Ceará-15) Seja n um inteiro positivo.

a) Mostre que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i!) = (n+1)! - 1.$$

b) Mostre que todo inteiro $k \in \{0, 1, \ldots, (n+1)! - 1\}$ pode ser escrito na forma

$$k = \sum_{i=1}^{n} a_i(i!),$$

onde $a_1, \ldots, a_n$ são inteiros tais que $0 \leq a_i \leq i$, $i = 1, \ldots, n$.

60) (Espanha-85) Seja n um número natural. Prove que a expressão

$$(n+1)(n+2)\ldots(2n-1)(2n)$$

é divisível por 2^n.

61) (Rio Grande do Sul-99) Prove que $3^{2N+2} - 8N - 9$ é divisível por **64** para todo **N** inteiro positivo.

62) (Espírito Santo-99) Mostre que se a_1, a_2, a_3, ..., a_n são números reais positivos, então:

$$\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

63) (Rio Grande do Sul-03) Seja (a_n) uma sequência de números reais, definida para todo n inteiro positivo, por:

$$a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

Prove que $a_n \leq \frac{3}{4} - \frac{1}{4n}$.

64) (Ceará-01) Suponha que a função f:R → R satisfaz f(xy) = xf(y) + yf(x) para todos x; y ∈ R. Prove que f(1) = 0 e que $f(u^n) = n.u^{n-1}f(u)$ para todo n natural e todo u real.

65) (OBM-80) Prove que, para cada número natural p, com p ≥ 3, existem p números naturais distintos dois a dois: n_1, n_2, ..., n_p, tais que $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \ldots + \frac{1}{n_p} = 1$.

66) (OBM Jr.-96) Prove que todo inteiro positivo n pode ser escrito como

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \ldots \pm m^2$$

para algum inteiro m e alguma escolha conveniente de sinais + e −.

(Por exemplo, $11 = 1^2 - 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2$)

67) (Portugal-94) Prove que o número $\underbrace{111\ldots11}_{2n\ 1's} - \underbrace{222\ldots22}_{n\ 2's}$ é, para todo n natural, um quadrado perfeito.

68) (Hungria-13) Prove que $(n!)^2 > n^n$.

69) (Hungria-35) Prove que para todo n inteiro

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}.$$

70) (Hungria-38) Mostre que, para todo inteiro $n > 1$:

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1.$$

71) (Hungria-41) Prove que:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) =$$
$$= 1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^{2^n-1}$$

72) (Canadá-69) Determine o valor da soma:

$$1.1! + 2.2! + 3.3! + \ldots + n.n!.$$

73) (Canadá-73) Para todo inteiro positivo n, seja $h(n)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}$. Prove que para todo $n = 2, 3, 4, \ldots$ temos: $n + h(1) + h(2) + h(3) + \ldots + h(n-1) = nh(n)$.

74) (Canadá-74) Mostre que, para todo inteiro positivo n,

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n+1}n^2 = (-1)^{n+1}(1 + 2 + \ldots + n).$$

75) (Canadá-85) Seja $1 < x_1 < 2$ e, para $n = 1, 2, \ldots$, define-se $x_{n+1}=1+x_n-\frac{1}{2}x_n^2$. Prove que, para $n \geq 3$, $|x_n-\sqrt{2}|<\frac{1}{2^n}$.

76) (Furman University-96) Seja $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, e, para $n \geq 2$, $u_n = 2u_{n-1} + 7u_{n-2}$. Mostre que $u_n \leq 4^n$ para todo $n \geq 0$.

77) (Putnam-58) Seja $R_1 = 1$, $R_{n+1}=1+\frac{n}{R_n}$, $n \geq 1$. Mostre que para $n \geq 1$, $\sqrt{n} \leq R_n \leq \sqrt{n}+1$.

78) (Noruega-93) Os números de Fermat são definidos por $F_n = 2^{2^n} + 1$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$ Prove que $F_n = F_{n-1}F_{n-2}\ldots F_1F_0 + 2$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$

79) (Rússia-62) Dados os números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$. Sabe-se que: $a_1 > a_0$, $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1$, ..., $a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Prove que $a_{100} > 2^{99}$.

80) (Rússia-00) A sequência de números reais $(a_1, a_2, \ldots, a_{2000})$ satisfaz a condição: $a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$ para todo n, $1 \leq n \leq 2000$. Mostre que todo elemento da sequência é um número inteiro.

81) (Balcânica Jr-03) Sejam $A = \underbrace{44\ldots4}_{2n}$ e $B = \underbrace{88\ldots8}_{n}$. Mostre que $A + 2B + 4$ é um quadrado.

82) (Cone Sul-03) Considere a sequência $\{a_n\}$ definida da seguinte maneira:

$a_1=1$

$a_2=3$

$a_{n+2} = 2a_{n+1} a_n + 1$, para todo inteiro $n \geq 1$. Provar que a máxima potência de 2 que divide $a_{4006} - a_{4005}$ é 2^{2003}.

83) (OBM-93) Uma sequência é definida por $a_1 = 8$, $a_2 = 18$ e $a_{n-2} = a_{n-1}.a_n$ para todo natural $n \geq 1$. Determine todos os valores de n para os quais a_n é quadrado perfeito.

84) (Baltic Way-00) Seja $t \geq \frac{1}{2}$ um número real e n um inteiro positivo. Prove que $t^{2n} \geq (t-1)^{2n} + (2t-1)^n$.

PROGRESSÃO ARITMÉTICA

2.1. INTRODUÇÃO AO ESTUDO DAS SEQUÊNCIAS

Uma sequência ou progressão numérica é qualquer listagem ordenada (finita ou infinita) de números reais. Por exemplo, os números (2, 10, 5, 8) formam uma sequência finita de quatro números naturais. Cada número na sequência é denominado "termo" ou "elemento" e em toda sequência todo termo é classificado de acordo com a sua ordem. Assim, na sequência (8, 1, 0) o 1º termo da sequência é o número 8, o 2º termo na sequência é o número 1 e o 3º termo na sequência é o número 0. Para simplificar esta nomenclatura, utiliza-se uma letra acompanhada de um índice como símbolo de cada termo da sequência. Por exemplo, pode-se definir a sequência (a_n) como $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 6$, $a_4 = 8$ e $a_5 = 10$, onde o símbolo a_1 significa "1º termo da sequência (a_n)", o símbolo a_2 significa "2º termo da sequência (a_n)" e assim por diante.

Existe um especial interesse nas sequências em que podemos encontrar uma fórmula fechada para o cálculo de qualquer termo da sequência, sendo necessário apenas saber a ordem deste termo. Por exemplo, na sequência (a_n) definida no parágrafo anterior, pode-se observar que $a_n = 2n$, para $1 \leq n \leq 5$, $n \in \mathbb{N}$. A esta fórmula, que permite que todos os termos da sequência possam ser calculados somente em função da sua ordem, dá-se o nome de "termo geral da sequência". Por exemplo, a sequência infinita (a_n) formada pelos quadrados perfeitos de números naturais (0, 1, 4, 9, 16, 25, ...) possui termo geral dado por $a_{n+1} = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Outra maneira de caracterizar os termos de uma sequência é através de uma equação de recorrência, ou seja, uma expressão que relacione um termo em função do(s) anterior(es). Por exemplo, a famosa sequência de Fibonacci é definida recursivamente por $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ e $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, tem-se que os primeiros termos da sequência de Fibonacci são dados por (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...).

A equação de recorrência não necessariamente precisa ser linear em relação aos termos anteriores, como ocorre com a sequência de Fibonacci. Por exemplo, pode-se definir a sequência (b_n) por $b_1 = 1$ e $b_n = 2^{b_{n-1}}$ $(n \geq 2)$, também definir a sequência (c_n) por $c_1 = 0$ e $c_n = \frac{\pi}{2}\cos(c_{n-1})$ $n \geq 2$ ou a sequência (d_n) por $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ e $d_n = \sqrt{d_{n-1}^2 + d_{n-2}^2}$, todas não lineares. Posteriormente, no capítulo 4 deste livro, você verá como calcular o termo geral de uma sequência a partir de sua equação de recorrência.

Em algumas sequências estamos mais interessados no valor da soma dos termos do que realmente no termo geral. O símbolo S_n significa a soma dos primeiros n termos de uma sequência:

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

Outra forma de expressar a soma dos termos de uma sequência é através do símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$, onde a expressão "k = 1" (abaixo do símbolo Σ) significa a ordem do 1° termo no somatório e "n" (acima do símbolo Σ) significa a ordem do último termo no somatório:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n .$$

Quando uma sequência possuir infinitos termos e o valor da soma dos seus termos é finito, dizemos que a sequência em questão é convergente. Por exemplo, pode-se demonstrar que a sequência de termo geral $a_n = 2^{-n}$ é convergente, sendo a soma dos seus infinitos termos igual a 1. Quando a soma dos infinitos termos de uma sequência tende para o infinito, chamamos esta sequência de divergente. Por exemplo, é possível demonstrar que a sequência $a_n = \frac{1}{n}$ é divergente, fazendo com que a soma dos seus infinitos termos tende para o infinito.

2.2. A PROGRESSÃO ARITMÉTICA

2.2.1. Definição

A progressão aritmética (PA) é uma sequência em que cada termo é igual ao termo antecessor somado a um determinado valor constante. Por exemplo, a sequência 3, 5, 7, 9, 11 é uma progressão aritmética, pois todo termo, a partir do 2° termo, é igual ao termo antecessor mais 2. Pode-se também definir progressão aritmética como toda sequência em que a subtração de dois elementos consecutivos ($a_n - a_{n-1}$) é uma constante. O nome que se dá para esta constante é "**razão da progressão aritmética**" e normalmente adota-se a letra "**r**" para designá-la. Preste atenção que em PA a expressão "razão" toma um significado diferente da usual, que é a divisão entre duas grandezas. Em PA, razão significa o valor da subtração entre dois termos consecutivos da sequência. Assim, se a_1, a_2, a_3, a_4, ... formam uma PA de razão r, pode-se afirmar que:

$$a_2 - a_1 = r,\ a_3 - a_2 = r,\ a_4 - a_3 = r,\ ...$$

Note que uma sequência em que todos os termos sejam iguais (denominada sequência constante) pode ser interpretada como uma progressão aritmética de razão igual a 0. Por outro lado, quando uma progressão aritmética possui razão dada por um número positivo, dizemos que esta é uma "**PA crescente**", uma vez que cada termo é maior que o anterior. Assim, a PA 5, 8, 11, 14, 17 é uma classificada como uma PA crescente. Analogamente, quando a razão da progressão aritmética é menor que zero, afirma-se que se trata se uma "**PA decrescente**". Por exemplo, a PA 37, 32, 27, 22, 17, 12, 7, 2 é uma PA decrescente.

2.2.2. Termo Geral

Vamos agora determinar o termo geral de uma PA em função somente do 1º termo e da razão. Para tanto, repare nas seguintes relações que podemos obter sobre os termos de uma PA:

$$a_2 = a_1 + r;\quad a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r;\quad a_4 = a_3 + r = a_1 + 3r;\quad a_5 = a_4 + r = a_1 + 4r;\ ...$$

Caso $r = 0$, o termo geral da PA é dado por $a_n = a_1$, $\forall\ n \in \mathbb{N}^*$. Caso contrário, observando as relações acima, pode-se deduzir que $\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)r}$. Entretanto, isso é apenas uma observação, que deve ser demonstrada. Vamos demonstrar esta proposição usando o princípio da indução finita. Para $n = 1$ a proposição é claramente válida, uma vez que $a_1 = a_1 + (1 - 1)r = a_1$. Suponhamos agora que exista k inteiro positivo tal que $a_k = a_1 + (k - 1)r$. Como $a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k - 1)r + r = a_1 + kr$, segue que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, tem-se

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)r.}$$

Na verdade, não é obrigatório escrever todos os termos de uma progressão aritmética em função somente do primeiro termo. Pode-se também expressar todos os termos de uma PA em função de qualquer elemento da sequência. Por exemplo, considere o j° termo da PA: $a_j = a_1 + (j - 1)r$. Assim:

$$a_n - a_j = (n - 1)r - (j - 1)r = (n - j)r \ \Rightarrow\ \mathbf{a_n = a_j + (n - j)r}$$

Por exemplo, em uma PA de razão r, sabe-se que $a_9 = a_1 + 8r$. Entretanto, também pode-se escrever que $a_9 = a_5 + 4r$ ou que $a_{19} = a_{57} - 38r$.

É muito comum confundir o símbolo a_n, geralmente utilizado para termo geral, com o último termo da sequência. Quando dizemos que a_n é o termo geral de uma sequência, n é uma variável que pode assumir qualquer valor inteiro positivo desde 1 até o número de termos da sequência. Quando usamos o símbolo a_n para último termo da sequência, n é um número fixo e igual ao número de elementos da sequência.

Em alguns países (principalmente europeus), o padrão utilizado para o primeiro elemento de uma sequência não é a_1, e sim a_0. Assim, a_1 passa a representar o segundo elemento da sequência, a_2 o terceiro elemento, a_3 o quarto elemento e assim por diante. Neste caso, o termo geral de uma PA é dado por $\mathbf{a_n = a_0 + nr}$. O autor desse livro não gosta de usar a_0 como primeiro termo de uma sequência, sendo uma PA ou outro tipo de sequência. A utilização de a_0 como primeiro termo gera uma confusão muito grande na referência à ordem de um elemento ou da soma dos termos da PA, uma vez que a_n não é mais o n° termo e sim o $(n + 1)$° termo da sequência, enquanto que S_n não é mais a soma dos n primeiros termos e sim a soma dos primeiros $n + 1$ elementos da sequência, que causa uma confusão muito grande e desnecessária. Logo, neste livro, o primeiro termo de uma sequência sempre será a_1.

Exercícios Resolvidos

1) (UFRGS-20) Considere o padrão de construção de triângulos com palitos, representado nas figuras abaixo. Na etapa n, serão utilizados 245 palitos. Nessas condições, n é igual a

(A) 120. (B) 121. (C) 122. (D) 123. (E) 124.

Solução: Alternativa C

Analisando os primeiros termos da sequência formada pela quantidade de palitos:

$$a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7, ...$$

conclui-se que esses números formam uma progressão aritmética de primeiro termo 3 e razão 2. Logo:

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 245 = 3 + (n-1).2 \Rightarrow 242 = 2(n-1) \Rightarrow n = 122$

2) (UFRJ-04) Um vídeo-clube propõe a seus clientes três opções de pagamento:
Opção I: R$ 40,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 1,20 por DVD alugado.
Opção II: R$ 20,00 de taxa de adesão anual, mais R$ 2,00 por DVD alugado.
Opção III: R$ 3,00 por DVD alugado, sem taxa de adesão.
Um cliente escolheu a opção II e gastou R$ 56,00 no ano.
Esse cliente escolheu a melhor opção de pagamento para o seu caso? Justifique sua resposta.

Solução:

Note que os valores pagos em cada opção formam progressões aritméticas. Se (a_n) representa a PA da 1ª opção, (b_n) a PA da 2ª opção e (c_n) a PA da 3ª opção, então:

$a_n = a_0 + nr_1 = 40 + 1.2n$; $b_n = b_0 + nr_2 = 20 + 2n$; $c_n = c_0 + nr_3 = 3n$

Portanto: $56 = 20 + 2n \Rightarrow n = 18$ DVD's alugados.

Desde que $a_{18} = 40 + (1,2)(18) = 61.6$ e $c_{18} = (3)(18) = 54$, a melhor opção teria sido a opção III.

3) (UFRGS-13) Se $a_1, a_2, ..., a_{100}$ é uma progressão aritmética de razão r, então a sequência $a_1 - a_{100}, a_2 - a_{99}, ..., a_{50} - a_{51}$ é uma progressão

(A) geométrica de razão 2r. (B) geométrica de razão r.
(C) aritmética de razão – r. (D) aritmética de razão r.
(E) aritmética de razão 2r.

Solução: Alternativa E

A nova sequência criada é da forma $b_n = a_n - a_{101-n}$, n = 1, 2, ..., 50

Assim: $b_n = a_1 + (n-1)r - a_1 - (101 - n - 1)r = (2n - 101)r$

Escrito dessa última forma não é imediato identificar que tipo de sequência foi obtida, porém, com uma pequena jogada algébrica:

$b_n = (2n - 101)r = (-99 + 2n - 2)r = -99r + (n - 1).2r$
Comparando com o termo geral de uma PA: $b_n = b_1 + (n - 1)r'$, segue que a sequência b_n é uma PA de 1º termo $-99r$ e razão $2r$.

4) (Unicamp-14) O perímetro de um triângulo retângulo é igual a 6,0 m e as medidas dos lados estão em progressão aritmética (PA). A área desse triângulo é igual a
a) 3,0 m^2. b) 2,0 m^2. c) 1,5 m^2. d) 3,5 m^2.
Solução: Alternativa C
Suponhamos que os lados do triângulo sejam a, b e c, com $a > b \geq c$. Neste caso, como ΔABC é retângulo, a é a hipotenusa e b e c são os catetos.
Se r é a razão da PA formada pelos lados de ΔABC, segue que $a = b + r$ e $c = b - r$.
$2p_{\Delta ABC} = 6 \Rightarrow a + b + c = 6 \Rightarrow b + r + b + b - r = 6 \Rightarrow 3b = 6 \Rightarrow b = 2$.
Assim, os lados de ΔABC são $a = 2 + r$, $b = 2$ e $c = 2 - r$.
Aplicando o Teorema de Pitágoras: $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (2 + r)^2 = 2^2 + (2 - r)^2 \Rightarrow$
$4 + 4r + r^2 = 4 + 4 - 4r + r^2 \Rightarrow 8r = 4 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$.

Deste modo, segue que $c = 2 - r = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

Logo: $S_{\Delta ABC} = \frac{b.c}{2} = \frac{2.\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2}$ m^2.

5) (UFSC-02) Quantos múltiplos de 7 existem entre 20 e 1200?
Solução:
Dividindo 20 e 1200 por 7 obtemos: $20 = 7.2 + 6$ e $1200 = 7.171 + 3$.
Assim, os múltiplos de 7 entre 20 e 1200 formam uma PA de 1º termo 14, último termo 1197 e razão 7.
Portanto: $a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 1197 = 14 + (n - 1)7 \Rightarrow 7n = 1190 \Rightarrow n = 170$.

6) Determinar quatro números em PA cuja soma é igual a 26 e a soma dos quadrados é igual a 214.
Solução:
Vamos montar uma PA de razão $2r$: $(x - 3r, x - r, x + r, x + 3r)$. Assim:
i) $26 = x - 3r + x - r + x + r + x + 3r \Rightarrow 26 = 4x \Rightarrow x = 13/2$
ii) $214 = (13/2 - 3r)^2 + (13/2 - r)^2 + (13/2 + r)^2 + (13/2 + 3r)^2 \Rightarrow$
$214 = 169/4 - 39r + 9r^2 + 169/4 - 13r + r^2 + 169/4 + 13r + r^2 + 169/4 + 39r + 9r^2 \Rightarrow$
$214 = 169 + 20r^2 \Rightarrow 4r^2 = 9 \Rightarrow r = \pm 3/2 \Rightarrow$ PA: 2, 5, 8 e 11.

7) (Olimpíada de Maio-96) Natália e Marcela contam de 1 em 1 começando juntas desde o número 1, mas a velocidade de Marcela é o triplo da velocidade de Natália (quando Natália diz o segundo número, Marcela diz o quarto número). Quando a diferença dos números que elas dizem em uníssono é algum dos múltiplos de 29, entre 500 e 600, Natália segue fazendo a conta normalmente e Marcela começa a contar de maneira descendente de modo que, num momento, as duas dizem em uníssono o mesmo número. Qual é o número?

Solução:

Inicialmente, podemos observar que os múltiplos de 29 entre 500 e 600 são 522, 551 e 580. Como a velocidade com que conta Marcela é o triplo da velocidade de Natália, então os números falados pelas duas simultaneamente formam duas progressões aritméticas de modo que a sequência de Marcela (a_n) possui razão igual a 3 vezes a razão da sequência de Natália (b_n).

i) $a_n = a_1 + (n-1)r_a = 1 + (n-1)(3) = 3n - 2$ $(n \geq 1)$;

ii) $b_n = b_1 + (n-1)r_b = 1 + (n-1)(1) = n$ $(n \geq 1)$.

Marcela passa a contar de trás para frente quando $a_n - b_n = 2n - 2$.

Se o múltiplo de 29 em questão é 522:

$2n - 2 = 522 \Rightarrow n = 262 \Rightarrow a_{262} = 784$ e $b_{262} = 262$.

Depois deste instante, as duas sequências dos números falados simultaneamente passam a ser:

i) Natália: $c_n = c_1 + (n-1)r_c = 262 + n - 1 = 261 + n$ $(n \geq 1)$;

ii) Marcela: $d_n = d_1 + (n-1)r_d = 784 + (n-1)(-3) = 787 - 3n$ $(n \geq 1)$.

As duas falarão o mesmo número quando:

$c_n = d_n \Rightarrow 261 + n = 787 - 3n \Rightarrow 4n = 526 \Rightarrow n = 263/2$, que não é inteiro.

Assim, o múltiplo de 29 em questão é 580: $2n - 2 = 580 \Rightarrow n = 291 \Rightarrow$

$a_{291} = 871$ e $b_{291} = 291 \Rightarrow c_n = 290 + n$ e $d_n = 874 - 3n$.

Logo: $290 + n = 874 - 3n \Rightarrow n = 146 \Rightarrow c_{146} = d_{146} = 436$.

8) (OBMEP-10) Uma linha de ônibus possui 12 paradas numa rua em linha reta. A distância entre duas paradas consecutivas é sempre a mesma. Sabe-se que a distância entre a terceira e a sexta paradas é de 3300 metros. Qual é a distância, em quilômetros, entre a primeira e a última parada?

a) 8,4 b) 12,1 c) 9,9 d) 13,2 e) 9,075

Solução: Alternativa C

Associemos a cada parada uma coordenada, que corresponde à sua posição na rua. Como a entre duas paradas consecutivas é sempre a mesma, segue que:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{12} - a_{11},$$

onde conclui-se que $\{a_n\}$ é uma PA.

$a_6 - a_3 = 3300 \Rightarrow a_1 + 5r - a_1 - 2r = 3300 \Rightarrow 3r = 3300 \Rightarrow r = 1100$

$a_{12} - a_1 = 11.r = 11.1100 = 12100$ m $= 12{,}1$ km

9) (Olimpíada da Espanha-94) Demonstrar que se entre os infinitos termos de uma progressão aritmética de números inteiros positivos existe um quadrado perfeito, então infinitos termos da progressão são quadrados perfeitos.

Solução:

Suponhamos que o termo de ordem k é um quadrado perfeito: $a_k = m^2$, $m \in \mathbb{N}$.

Se a razão da PA é r ($r \in \mathbb{N}$) então $a_n = a_k + (n - k)r = m^2 + (n - k)r$.

Assim, se d é múltiplo qualquer de r ($d = xr$, $\forall\, x \in \mathbb{N}$):

$(m + d)^2 = m^2 + 2md + d^2 = m^2 + (m + 2d)d$.

Deste modo: $a_n = (m + d)^2 \Rightarrow (n - k)r = (m + 2x.r)xr \Rightarrow n = k + (m + 2x.r)x$.

Portanto, para todo $x \in \mathbb{N}$, se $a_k = m^2$, então $a_{k+(m+2x.r)x} = (m + x.r)^2$, onde r é a razão da PA.

10) (Olimpíada da Inglaterra-66) Prove que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos de uma mesma progressão aritmética.

Solução:

Vamos utilizar nesta questão o método de demonstração por contradição (ou redução ao absurdo). Suponhamos que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ são termos de uma mesma progressão aritmética. Assim:

$\sqrt{2} = a_0 + x.r$, $\sqrt{3} = a_0 + y.r$ e $\sqrt{5} = a_0 + z.r$, onde r é a razão da PA e x, y e $z \in \mathbb{N}$.

Deste modo:

$$r = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{y - x} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{z - y} \Rightarrow (z - y)\sqrt{3} + (y - z)\sqrt{2} = (y - x)\sqrt{5} + (x - y)\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$(z - x)\sqrt{3} + (y - z)\sqrt{2} = (y - x)\sqrt{5} \Rightarrow a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = c\sqrt{5}, \text{ onde } a, b, c \in \mathbb{Z}.$$

Elevando ao quadrado: $3a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{6} = 5c^2 \Rightarrow \sqrt{6} = \dfrac{5c^2 - 2a^2 - 3b^2}{2ab}$.

Uma vez que a, b e c são inteiros, a expressão anterior afirma que $\sqrt{6}$ é racional, que é uma contradição.

Assim, a suposição feita no início da solução é falsa, ou seja, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ e $\sqrt{5}$ não podem ser termos de uma mesma progressão aritmética.

2.2.3. Propriedades da Progressão Aritmética

1) Se p, q e k são índices de termos de uma PA (a_n) não constante, então a igualdade $p + k = 2q$ ocorre se e somente se $a_p + a_k = 2a_q$.
Demonstração:
Suponha que r é a razão da PA.
$a_p + a_k = 2a_q \Leftrightarrow a_1 + (p-1)r + a_1 + (k-1)r = 2a_1 + 2(q-1)r \Leftrightarrow$
$(p + k - 2)r = 2(q-1)r \overset{r\neq 0}{\Leftrightarrow} p + k - 2 = 2q - 2 \Leftrightarrow p + k = 2q.$
Esta propriedade permite concluir que, em uma PA infinita, tem-se, por exemplo, as seguintes relações: $a_1 + a_7 = 2a_4$, $a_{17} + a_{23} = 2a_{20}$, $a_{66} + a_{88} = 2a_{77}$ e $a_{89} + a_{145} = 2a_{117}$.

2) Se p, q, k e m são índices de termos de uma PA (a_n) não constante, então a expressão $p + m = q + k$ é válida se e somente se $a_p + a_m = a_q + a_k$.
Demonstração:
Suponha que r é a razão da PA.
$a_p + a_m = a_q + a_k \Leftrightarrow a_1 + (p-1)r + a_1 + (m-1)r = a_1 + (q-1)r + a_1 + (k-1)r \Leftrightarrow$
$(p + m - 2)r = (q + k - 2)r \overset{r\neq 0}{\Leftrightarrow} p + m - 2 = q + k - 2 \Leftrightarrow p + m = q + k.$
Esta propriedade permite concluir que, em uma PA infinita, tem-se, por exemplo, as seguintes relações: $a_3 + a_7 = a_4 + a_6$, $a_{37} + a_{63} = a_{20} + a_{80}$, $a_{66} + a_{88} = a_{27} + a_{127}$, $a_{208} + a_{354} = a_{111} + a_{451}$ e $a_{897} + a_{1258} = a_{1063} + a_{1092}$.

3) Os números x, y e z estão em PA se e somente se $2y = x + z$.
Demonstração:
Repare que: $2y = x + z \Leftrightarrow y - x = z - y = r \Rightarrow y = x + r$ e $z = y + r = x + 2r$.
Como os números x, x + r e x + 2r formam uma PA de 1º termo x e razão r, então x, y e z estão em PA.
Por outro lado, não necessariamente o fato de $2y = x + z$ implica que x, y e z sejam termos *consecutivos* de uma PA. Por exemplo, na PA (a_n): (1, 2, 3, 4, 5), temos que $1 + 5 = 2.3$ e os números 1, 3 e 5 não são termos consecutivos da sequência (a_n).
Essa propriedade permite escrever, de forma simples, três termos em PA em função apenas de duas variáveis, uma vez que (a – r, a, a + r) sempre formam uma PA de razão r. A simplicidade dessa forma de escrever a PA vem do fato da soma dos elementos da sequência ficar em função apenas de uma das variáveis.

4) Se a, b, c e d estão, nesta ordem, em PA, então $a + d = b + c$.
Demonstração:
Se (a, b, c, d) é uma PA então existe r tal que $b = a + r$, $c = a + 2r$ e $d = a + 3r$
Logo: $a + d = 2a + 3r = a + r + a + 2r = b + c$
Perceba que esta é a única das propriedades de PA que vale somente a ida e não a volta do resultado. Um contra exemplo basta para demonstrar que se $a + d = b + c$ então a, b, c e d não é necessariamente uma PA. Tome, por contra exemplo, a

sequência numérica 1, 2, 2 e 3, onde é válido que 1 + 3 = 2 + 2, porém é evidente que (1, 2, 2, 3) não é uma PA. Leia o próximo tópico deste livro para entender como proceder para caracterizar quatro números em PA.

Essa propriedade permite escrever, de forma simples, quatro termos em PA em função apenas de duas variáveis, uma vez que $\left(a-\frac{3r}{2}, a-\frac{r}{2}, a+\frac{r}{2}, a+\frac{3r}{2}\right)$ sempre formam uma PA de razão r. Note que a soma dos elementos da sequência fica em função apenas de uma das variáveis.

Observação: A partir das propriedades, é possível escrever todos os termos de uma PA simetricamente em relação aos seus extremos, de forma que a soma dos termos seja independente da razão r, de acordo com o número de termos da progressão:

3 termos: $(a - r, a, a + r)$

4 termos: $\left(a-\frac{3r}{2}, a-\frac{r}{2}, a+\frac{r}{2}, a+\frac{3r}{2}\right)$

5 termos: $(a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r)$

6 termos: $\left(a-\frac{5r}{2}, a-\frac{3r}{2}, a-\frac{r}{2}, a+\frac{r}{2}, a+\frac{3r}{2}, a+\frac{5r}{2}\right)$

7 termos: $(a - 3r, a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r, a + 3r)$

8 termos: $\left(a-\frac{7r}{2}, a-\frac{5r}{2}, a-\frac{3r}{2}, a-\frac{r}{2}, a+\frac{r}{2}, a+\frac{3r}{2}, a+\frac{5r}{2}, a+\frac{7r}{2}\right)$

9 termos: $(a - 4r, a - 3r, a - 2r, a - r, a, a + r, a + 2r, a + 3r, a + 4r)$

...

e assim por diante.

2.2.4. Condições para que Números Formem uma PA

2.2.4.1. Três Números

De acordo com a propriedade 3 da PA, para que (a, b, c) formem uma PA, nesta ordem, é necessário e suficiente que $a + c = 2b$.

2.2.4.2. Quatro Números

De acordo com a propriedade 4 de PA, $a + d = b + c$ é apenas uma condição necessária, porém não suficiente, para que (a, b, c, d) formem uma PA, nesta ordem. Mas então quais as condições suficientes? Simples, basta separar os quatro números em dois ternos (a, b, c) e (b, c, d) e aplicar a condição de PA para os dois ternos. Assim, (a, b, c, d) formam uma PA, nesta ordem, se e somente se as duas condições seguintes são satisfeitas: $a + c = 2b$ e $b + d = 2c$.

2.3.4.3. Cinco Números

De forma análoga ao caso anterior, de modo que (a, b, c, d, e) formem, nesta ordem, uma PA, deve-se aplicar o critério de PA para os termos (a, b, c), (b, c, d) e (c, d, e). Assim, (a, b, c, d, e) estão, nesta ordem, em PA se e somente se as três condições seguintes são satisfeitas: $\mathbf{a + c = 2b}$, $\mathbf{b + d = 2c}$ e $\mathbf{c + e = 2d}$.

2.3.4.4. Uma Quantidade Qualquer de Números

Generalizando o resultado anterior, pode-se afirmar que $(a_1, a_2, ..., a_n)$ formam uma PA, nesta ordem, se e somente se todas as condições abaixo forem válidas:

$$\mathbf{a_1 + a_3 = 2a_2},\ \mathbf{a_2 + a_4 = 2a_3},\ \text{... e}\ \mathbf{a_{n-2} + a_n = 2a_{n-1}}.$$

2.2.5. Interpolação Aritmética

Interpolação Aritmética ou Inserção de Meios Aritméticos consiste em determinar quais números, em uma certa quantidade n conhecida, devem ser inseridos entre dois números dados de modo que estes n + 2 números formem uma progressão aritmética. Por exemplo, se desejamos inserir 4 meios aritméticos entre 3 e 18, então estes 6 números $(3, a_2, a_3, a_4, a_5, 18)$ devem formar uma PA. Neste caso, temos que $a_6 = a_1 + 5r$, ou seja, $18 = 3 + 5r$, onde obtemos $r = 3$. Assim, os meios aritméticos são $a_2 = 6$, $a_3 = 9$, $a_4 = 12$ e $a_5 = 15$. De fato, (3, 6, 9, 12, 15, 18) formam uma progressão aritmética.

No caso geral, se desejamos inserir n meios aritméticos entre A e B, então $(A, a_2, a_3, ..., a_{n+1}, B)$ é uma PA.

Portanto: $a_{n+2} = a_1 + (n+1)r \Rightarrow B = A + (n+1)r \Rightarrow \mathbf{r = \frac{B - A}{n + 1}}$.

Assim, é possível determinar cada elemento da interpolação, em função apenas de sua ordem k na PA, com $2 \le k \le n + 1$.

$$a_k = a_1 + (k-1)r = A + \frac{(k-1)(B-A)}{n+1} = \frac{A(n-k+2) + B(k-1)}{n+1}$$

Apesar da demonstração, o autor desse livro não aconselha aos leitores decorarem essa última fórmula. Já há muitas fórmulas pra serem decoradas na matemática. O correto, no caso da interpolação aritmética, é aprender e, posteriormente, aplicar os conceitos usados na demonstração.

Exercícios Resolvidos

1) (ITA-00) O valor de n que torna a sequência $2 + 3n, -5n, 1 - 4n$ uma progressão aritmética pertence ao intervalo:

a) $[-2, -1]$ b) $[-1, 0]$ c) $[0, 1]$ d) $[1, 2]$ e) $[2, 3]$

Solução: Alternativa B

Sabemos que $a_1 = 2 + 3n$, $a_2 = -5n$ e $a_3 = 1 - 4n$ formam uma PA se e somente se:

$a_1 + a_3 = 2a_2 \Leftrightarrow 2 + 3n + 1 - 4n = -10n \Leftrightarrow 9n = -3 \Leftrightarrow n = -1/3 \Rightarrow$

$n \in [-1, 0]$.

2) (Unicamp-20) Considere que (a, b, 3, c) é uma progressão aritmética de números reais, e que a soma de seus elementos é igual a 8. O produto dos elementos dessa progressão é igual a

a) 30. b) 10. c) -15. d) -20.

Solução: Alternativa C

(a, b, 3, c) é uma PA se e somente se: $a + 3 = 2b$ e $b + c = 6$.

Como a soma dos elementos é 8: $a + b + 3 + c = 8 \Rightarrow a + (b + c) = 5 \Rightarrow$

$a + 6 = 5 \Rightarrow a = -1$

De $a + 3 = 2b$ segue que $b = 1$ e de $b + c = 6$ conclui-se que $c = 5$.

Assim, a PA é dada por $(-1, 1, 3, 5)$ e o produto dos elementos é -15.

3) Sabendo que (a, b, c, d) é P.A., provar que $(d + 3b)(d - 3b) + (a + 3c)(a - 3c) = 2(ad - 9bc)$.

Solução:

Se (a, b, c, d) é uma PA de razão r, então:

$d - a = 3r = 3(b - c) \Rightarrow (d - a)^2 = 9(b - c)^2$ (*).

Desta forma: $(d + 3b)(d - 3b) + (a + 3c)(a - 3c) = d^2 - 9b^2 + a^2 - 9c^2 =$

$= (a^2 + d^2) - 9(b^2 + c^2) = [(d - a)^2 + 2ad] - 9[(c - b)^2 + 2bc] =$

$= 2ad - 18bc + (d - a)^2 - 9(c - b)^2 \overset{(*)}{=} 2ad - 18bc$

4) Provar que se os números a, b, c formam na ordem dada uma PA e o mesmo se dá com os números $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$, provar a relação $2ad = ac + c^2$.

Solução:

Se (a, b, c) é uma PA então $a + c = 2b$.

Analogamente, se $\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}\right)$ é uma PA, então $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{2}{c}$.

Portanto: $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{2}{c} \Rightarrow \frac{1}{d} = \frac{2}{c} - \frac{1}{b} = \frac{2b - c}{bc} = \frac{a}{bc} \Rightarrow bc = ad.$

Desta forma: $a + c = 2b \overset{\times c}{\Rightarrow} ac + c^2 = 2bc \Rightarrow ac + c^2 = 2ad$.

5) Provar que se os números a, b, c formam nesta ordem uma PA, então o mesmo ocorre com os números $a^2(b + c)$, $b^2(a + c)$ e $c^2(a + b)$.

Solução:

Se (a, b, c) é uma PA então $a + c = 2b$. Consequentemente:

$a^2(b + c) + c^2(a + b) = a^2b + a^2c + c^2a + c^2b = a^2b + c^2b + ac(a + c) = a^2b + c^2b + 2abc =$

$= b(a^2 + c^2 + 2ac) = b(a + c)^2 = b(a + c)(a + c) = 2b^2(a + c)$

Desta forma, como $a^2(b + c) + c^2(a + b) = 2[b^2(a + c)]$, segue diretamente que os números $a^2(b + c)$, $b^2(a + c)$ e $c^2(a + b)$ formam uma PA.

6) Provar que se a, b, c estão em PA, nesta ordem, então vale a relação:

$2(a^3 + b^3 + c^3) + 21abc = 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$.

Solução:

Se (a, b, c) é uma PA então $a + c = 2b \Rightarrow (a + c)^3 = 8b^3 \Rightarrow$

$a^3 + c^3 + 3a^2c + 3ac^2 = 8b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 + 3ac(a + c) = 9b^3 \Rightarrow$

$a^3 + b^3 + c^3 + 6abc = 9b^3 \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 9b^3 - 6abc$

$2(a^3 + b^3 + c^3) + 21abc = 18b^3 - 12abc + 21abc = 18b^3 + 9abc$.

Por outro lado:

$(a + b + c)(ab + bc + ca) = (3b)(b(a + c) + ca) = (3b)(2b^2 + ac) = 6b^3 + 3abc \Rightarrow$

$3(a + b + c)(ab + bc + ca) = 18b^3 + 9abc$.

Assim, concluímos que se (a, b, c) é uma PA então:

$2(a^3 + b^3 + c^3) + 21abc = 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$.

7) (IME-05) Sejam a, b, c e d números reais positivos e diferentes de 1, sabendo que $\log_a d$, $\log_b d$ e $\log_c d$ são termos consecutivos de uma progressão aritmética, demonstre que: $c^2 = (ac)^{\log_a b}$

Solução:

Condição de três termos em PA:

$$2.\log_b d = \log_a d + \log_c d \Rightarrow \frac{2}{\log_d b} = \frac{1}{\log_d a} + \frac{1}{\log_d c} \Rightarrow$$

$$2(\log_d a)(\log_d c) = (\log_d b)(\log_d a + \log_d c) \Rightarrow \log_d c^2 = \frac{\log_d b}{\log_d a}(\log_d ac) \Rightarrow$$

$$\log_d c^2 = (\log_a b)(\log_d ac) \Rightarrow \log_d c^2 = \log_d (ac)^{\log_a b} \Rightarrow c^2 = (ac)^{\log_a b}$$

2.2.6. Soma dos n primeiros termos de uma PA

Se (a_n) é uma progressão aritmética de primeiro termo a_1, último termo a_n e n termos, então a soma dos n primeiros termos é igual a $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

Demonstração:

Vamos escrever a expressão da soma dos n primeiros termos de uma PA de duas maneiras: na ordem crescente da ordem dos termos e na ordem decrescente:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$

Somando ordenadamente (termo a termo) estas duas expressões:

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + ... + (a_{n-2} + a_3) + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$

Sabemos que $(a_1 + a_n) = (a_k + a_{n-k+1})$, $\forall\ k \in 1 \le k \le n$. Desta forma, todas as parcelas da expressão acima podem ser substituídas por $(a_1 + a_n)$. Desde que existem n parcelas no somatório:

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \implies S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Exercícios Resolvidos

1) (FGV-18) Os termos de uma sequência são definidos recursivamente por

$$\begin{cases} a_1 = 5 \\ a_n = 2 + a_{n-1} \end{cases}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$. Sendo assim, a soma dos n primeiros termos dessa sequência será dada pela expressão

a) $7n - 2$. b) $3{,}5n^2 - 3{,}5n + 5$. c) $n^2 - 17n + 60$.

d) $n^2 + 4n$. e) $2n + 3$.

Solução: Alternativa D

Perceba, pela definição da sequência, que se trata de uma PA de 1° termo 5 e razão 2. O último termo é dado por $a_n = a_1 + (n - 1)r = 5 + (n - 1)2 = 2n + 3$.

Logo: $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(5 + 2n + 3)n}{2} = n^2 + 4n$

2) (Ciaba-04) Dada uma Progressão Aritmética, em que o 5º termo é 17 e o 3º é 11, calcule a soma dos sete primeiros termos dessa Progressão Aritmética.

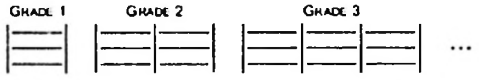
a) 90 b) 92 c) 94 d) 96 e) 98

Solução: Alternativa E

Em uma PA sabemos que $a_1 + a_7 = a_3 + a_5 = 17 + 11 = 28$.

Logo: $S_7 = \frac{(a_1 + a_7)(7)}{2} = \frac{(28)(7)}{2} = 98$.

3) (Unesp-16) figura indica o padrão de uma sequência de grades, feitas com vigas idênticas, que estão dispostas em posição horizontal e vertical. Cada viga tem 0,5 m de comprimento. O padrão da sequência se mantém até a última grade, que é feita com o total de 136,5 metros lineares de vigas.



O comprimento do total de vigas necessárias para fazer a sequência completa de grades, em metros, foi de

(A) 4877. (B) 4640. (C) 4726. (D) 5195. (E) 5162.

Solução: Alternativa C

A sequência formada pela números de vigas nas grades é: 5, 9, 13, ...

Assim, temos uma PA de 1º termo 5 e razão 4, cujo termo geral é:

$$a_n = a_1 + (n-1)r = 5 + (n-1).4 = 4n + 1$$

Como na grade n são usados 136,5 m de vigas e cada viga tem 0,5 m:

$(4n + 1)(0, 5) = 136,5 \Rightarrow 4n + 1 = 273 \Rightarrow n = 68,$

onde 273 é a quantidade de vigas na grade 68.

Como a espessura de cada viga é 0,5 m, o comprimento total das vigas é igual ao produto da quantidade de vigas nas grades por 0, 5m:

$$x = S_{68} = \frac{(a_1 + a_{68})(68)}{2}(0,5) = (5+273).17 = 4726$$

4) (EEAR-04) Numa P.A., o 10º termo e a soma dos 30 primeiros termos valem, respectivamente, 26 e 1440. A razão dessa progressão é

a) 2. b) 3. c) 4. d) 6.

Solução: Alternativa C

i) $a_{10} = 26 \Rightarrow a_1 + 9r = 26 \Rightarrow 2a_1 + 18r = 52$ (1)

ii) $S_{30} = \frac{(a_1 + a_{30})(30)}{2} = 1440 \Rightarrow 2a_1 + 29r = 96$ (2)

Subtraindo as equações (2) e (1): $11r = 44 \Rightarrow r = 4$

5) (UFRN-01) A direção de uma escola decidiu enfeitar o pátio com bandeiras coloridas. As bandeiras foram colocadas em linha reta, na seguinte ordem: 1 bandeira vermelha, 1 azul, 2 vermelhas, 2 azuis, 3 vermelhas, 3 azuis, e assim por diante. Depois de colocadas exatamente 99 bandeiras, o número das de cor azul era:

A) 55 B) 60 C) 50 D) 45

Solução: Alternativa D

Os números de bandeiras colocadas por vez formam a seguinte PA: (2, 4, 6, ...).

O termo geral desta PA é $a_n = a_1 + (n-1)r = 2 + (n-1)(2) = 2n$.

Portanto, a soma dos n primeiros termos desta sequência é:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2+2n)n}{2} = n(n+1).$$

Entretanto, para $n \geq 1$, temos que a desigualdade $n(n+1) \leq 99$ é válida para $n \leq 9$. Como $S_9 = 90$, na 10ª vez colocam-se apenas 9 bandeiras vermelhas e nenhuma azul.

Portanto, o número de bandeiras azuis é igual a $\frac{S_9}{2} = 45$.

6) (AFA-02) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética (PA) é dada pela fórmula $S_n = \frac{3n^2 + n}{2}$, então a soma do quarto com o sexto termo dessa PA é

a) 25 b) 28 c) 31 d) 34

1ª Solução: Alternativa B

Sabemos que $S_1 = a_1$ e $S_2 = a_1 + a_2 \Rightarrow a_1 = 2$ e $a_1 + a_2 = 7 \Rightarrow a_2 = 5$.

A razão da PA é igual a $r = a_2 - a_1 = 3$.

Portanto: $a_4 + a_6 = a_1 + 3r + a_1 + 5r = 2a_1 + 8r = 4 + 24 = 28$.

2ª Solução: Alternativa B

Desenvolvendo a expressão geral da soma dos n primeiros termos de uma PA:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} = \left(\frac{2a_1 - r}{2}\right)n + \left(\frac{r}{2}\right)n^2.$$

Comparando a expressão fornecida com a anterior:

$$\frac{r}{2} = \frac{3}{2} \text{ e } \frac{2a_1 - r}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = 3 \text{ e } a_1 = 2.$$

Portanto: $a_4 + a_6 = a_1 + 3r + a_1 + 5r = 2a_1 + 8r = 4 + 24 = 28$.

7) (Mackenzie-99) Se $\sum_{n=1}^{k}(4n - 104) > 0$, então o menor dos possíveis valores de k é:

a) 51 b) 52 c) 53 d) 54 e) 55

Solução: Alternativa D

Vamos encontrar a progressão aritmética que possui $4n - 104$ como termo geral:

$4n - 104 = a_1 + (n-1)r = nr + (a_1 - r) \Rightarrow r = 4$ e $a_1 - r = 104 \Rightarrow a_1 = 108$.

Logo: $S_k = \frac{(a_1 + a_k)k}{2} = \frac{(108 + 108 + (k-1)4)k}{2} = 2k^2 - 106k$.

$S_k > 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 106k > 0 \Leftrightarrow 2k(k - 53) > 0 \Rightarrow k < 0$ ou $k > 53 \Rightarrow$

$k_{min} = 54$.

8) (ITA-89) Numa progressão aritmética com n termos, $n > 1$, sabemos que o primeiro é igual a $(1 + n)/n$ e a soma deles vale $(1 + 3n)/2$. Então o produto da razão desta progressão pelo último termo é igual a:

a) $2n$ b) $2/n$ c) $3n$ d) $3/n$ e) $5n$

Solução: Alternativa B

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow \frac{1+3n}{2} = \frac{\left(\frac{1+n}{n} + a_n\right)n}{2} \Rightarrow 1 + 3n = 1 + n + n.a_n \Rightarrow a_n = 2.$

Assim: $a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow 2 = \frac{1}{n} + 1 + (n-1)r \Rightarrow r = \frac{1}{n}$.

Consequentemente: $r.a_n = \frac{2}{n}$.

9) (ITA-93) Numa progressão aritmética com $2n + 1$ termos, a soma dos n primeiros é igual a 50 e a soma dos n últimos é 140. Sabendo-se que a razão desta progressão é um inteiro entre 2 e 13, então seu último termo será igual a:

a) 34 b) 40 c) 42 d) 48 e) 56

Solução: Alternativa A

$S_{n\ primeiros} = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 50 = \frac{(2a_1 + (n-1)r)n}{2} \Rightarrow 2na_1 + n(n-1)r = 100 \quad (1)$

$S_{n\ últimos} = \frac{(a_{n+2} + a_{2n+1})n}{2} \Rightarrow 140 = \frac{(a_1 + (n+1)r + a_1 + (2n)r)n}{2} \Rightarrow$

$2na_1 + n(3n+1)r = 280 \quad (2)$

Subtraindo as equação (2) e (1): $n(2n+2)r = 180 \Rightarrow r = \frac{90}{n(n+1)}$.

Substituindo valores inteiros para n observamos que $2 < r < 13$, $r \in IN$ ocorre somente para $n = 5$, onde temos que $r = 3$.

Substituindo estes valores em (1) obtemos $a_1 = 4$.

Logo: $a_{11} = a_1 + 10r = 4 + 30 = 34$.

10) (ITA-02) Sejam $n \geq 2$ números reais positivos $a_1, a_2, \ldots a_n$ que formam uma progressão aritmética de razão positiva. Considere $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ e responda, justificando: Para todo $n \geq 2$, qual é o maior entre os números $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2$ e $\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$?

Solução:

Sabemos que $A_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow \frac{A_n}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \Rightarrow \frac{A_n}{n} - a_n = \frac{a_1 - a_n}{2}$.

Assim: $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 - \left[\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2\right] = \left(\frac{a_1 - a_n}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)^2 + a_n^2 =$

$= \frac{a_1^2 - 2a_1a_n + a_n^2 - a_1^2 - 2a_1a_n - a_n^2}{4} + a_n^2 = -a_1a_n + a_n^2 = a_n(a_n - a_1)$

Uma vez que a PA é formada por números positivos e a razão é positiva então $a_n > 0$ e $a_n - a_1 > 0$, implicando que $a_n(a_n - a_1) > 0$.

Deste modo, segue que $\left(\frac{A_n}{n} - a_n\right)^2 > \left(\frac{A_n}{n}\right)^2 - a_n^2$.

11) (ITA-05) Seja a_1, a_2,... uma progressão aritmética infinita tal que $\sum_{k=1}^{n} a_{3k} = n\sqrt{2} + \pi n^2$, para $n \in N^*$. Determine o primeiro termo e a razão da progressão.

Solução:

Fazendo n = 1: $\sum_{k=1}^{1} a_{3k} = a_3 = \sqrt{2} + \pi$

Para n = 2:

$$\sum_{k=1}^{2} a_{3k} = a_3 + a_6 = 2\sqrt{2} + 4\pi \Leftrightarrow a_6 = \left(2\sqrt{2} + 4\pi\right) - \left(\sqrt{2} + \pi\right) \Leftrightarrow a_6 = \sqrt{2} + 3\pi$$

Como se trata de uma P.A.: $a_6 = a_3 + 3r \Leftrightarrow 3r = 2\pi \Leftrightarrow r = \frac{2\pi}{3}$

Além disso: $a_3 = a_1 + 2r \Leftrightarrow a_1 = \left(\sqrt{2} + \pi\right) - \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow a_1 = \sqrt{2} - \frac{\pi}{3}$

12) (IME-99) Determine as possíveis progressões aritméticas para as quais o resultado da divisão da soma dos seus **n** primeiros termos pela soma dos seus **2n** primeiros termos seja independente do valor de **n**.

Solução:

Observe que: $\frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{(a_1 + a_n)(n)}{(a_1 + a_{2n})(2n)} = \frac{(2a_1 + (n-1)r)}{2(2a_1 + (2n-1)r)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2a_1 - r) + nr}{(2a_1 - r) + 2nr}$.

Existem duas possibilidades para que esta divisão independa de n:

i) $r = 0$ e $a_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ PA constante não-nula;

ii) $r = 2a_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{S_n}{S_{2n}} = \frac{1}{4} \Rightarrow$ PA igual a $(a_1, 3a_1, 5a_1, 7a_1, ...)$.

13) (IME-98) Uma soma finita de números inteiros consecutivos, ímpares, positivos ou negativos, é igual a 7^3. Determine os termos desta soma.

Solução:

Suponha que o primeiro termo da sequência é $a_0 = k$ e que existem n + 1 números na sequência. Assim estes números formam uma PA de razão cujo último termo é dado por $a_n = a_0 + nr = k + 2n$.

Assim: $7^3 = \frac{(a_0 + a_n)(n+1)}{2} = \frac{(2k+2n)(n+1)}{2} = (n+k)(n+1)$.

Deste modo, existem as seguintes possibilidades:

i) $n+1=1$ e $n+k=7^3 \Rightarrow n=0$ e $k=7^3 \Rightarrow$
sequência dada pelo número 7^3.

ii) $n+1=7$ e $n+k=7^2 \Rightarrow n=6$ e $k=43 \Rightarrow$
sequência: (43, 45, 47, 49, 51, 53, 55).

iii) $n+1=7^2$ e $n+k=7 \Rightarrow n=48$ e $k=-41 \Rightarrow$
sequência: $(-41, -39, -37, ..., 55)$.

iv) $n+1=7^3$ e $n+k=1 \Rightarrow n=342$ e $k=-341 \Rightarrow$
sequência: $(-341, -339, -337, ..., 343)$.

14) (Olimpíada do Rio Grande do Norte-19) A soma:

$$S=\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\frac{1}{1+2+3+4}+...+\frac{1}{1+2+3+4+...+51}$$

é igual a:

a) 25/26 b) 51/52 c) 23/53 d) 1/23 e) 23/52

Solução: Alternativa A

A soma $S_n = 1+2+3+...+n$ é a soma de n termos de uma PA de 1º termo 1 e razão 1, ou seja, $S_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Assim: $S=\frac{2}{2.3}+\frac{2}{3.4}+\frac{2}{4.5}+...+\frac{2}{51.52}=\sum_{k=2}^{51}\frac{2}{k(k+1)}$

Note que $\frac{2}{k(k+1)} = 2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$, ou seja:

$$S=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+2\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+...+2\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{52}\right) \Rightarrow$$

$$S=2\left(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}}+...+\cancel{\frac{1}{51}}-\frac{1}{52}\right)=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{52}\right)=\cancel{2}\left(\frac{52-2}{\cancel{2}.52}\right) \Rightarrow$$

$$S=\frac{25}{26}$$

2.3. SOMA DAS POTÊNCIAS DOS N PRIMEIROS INTEIROS POSITIVOS

Seja $S_k(n) = 1^k + 2^k + ... + n^k$ a soma das k-ésimas potências dos primeiros n inteiros positivos. O objetivo deste tópico é encontrar as fórmulas fechadas para esta soma para os menores valores de k, a saber, k = 1, 2, 3, ..., 10.

Para k = 1 a soma é trivial, pois trata-se da soma de uma PA de 1º termo 1, razão 1 e n termos:

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow S_1(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

Para k = 2 pode-se proceder da seguinte forma:

Sabe-se que $(1 + x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$.

Substituindo nesta expressão valores inteiros de x desde 1 até n:

$2^3 = 1 + 3.1 + 3.1^2 + 1^3$

$3^3 = 1 + 3.2 + 3.2^2 + 2^3$

$4^3 = 1 + 3.3 + 3.3^2 + 3^3$

...

$(n + 1)^3 = 1 + 3.n + 3.n^2 + n^3$

Somando estas expressões e cancelando os elementos que aparecem nos dois lados da igualdade:

$(n + 1)^3 = n + 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 1 \Rightarrow$

$$n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = n + \frac{3n(n+1)}{2} + 3S_2 + 1 \Rightarrow 3S_2 = n^3 + 3n^2 + 2n - \frac{3n^2 + 3n}{2} \Rightarrow$$

$$S_2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \Rightarrow S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Para k = 3 é possível fazer um procedimento análogo:

Sabemos que $(1 + x)^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$.

Substituindo nesta expressão valores inteiros de x desde 1 até n obtemos:

$2^4 = 1 + 4.1 + 6.1^2 + 4.1^3 + 1^4$

$3^4 = 1 + 4.2 + 6.2^2 + 4.2^3 + 2^4$

$4^4 = 1 + 4.3 + 6.3^2 + 4.3^3 + 3^4$

...

$(n + 1)^4 = 1 + 4.n + 6.n^2 + 4.n^3 + n^4$

Somando estas expressões e cancelando os elementos que aparecem nos dois lados da igualdade:

$(n + 1)^4 = n + 4(1 + 2 + ... + n) + 6(1^2 + 2^2 + ... + n^2) + 4(1^3 + 2^3 + ... + n^3) + 1 \Rightarrow$

$n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = n + 2n(n + 1) + n(n + 1)(2n + 1) + 4S_3 + 1 \Rightarrow$

$4S_3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 3n - 2n^2 - 2n - 2n^3 - 3n^2 - n = n^4 + 2n^3 + n^2 \Rightarrow$

$$S_3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} \Rightarrow S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Vamos agora generalizar este processo, encontrando uma fórmula para o cálculo de $S_k(n)$. Note que, nos casos $k = 2$ e $k = 3$, o cálculo de $S_k(n)$ envolveu o desenvolvimento, em binômio de Newton, de $(n + 1)^{k+1}$.

$$(n+1)^{k+1} - 1 = \sum_{i=1}^{n}\left[(i+1)^{k+1} - i^{k+1}\right] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j} i^j = \sum_{j=0}^{k}\binom{k+1}{j} S_j(n) \Rightarrow$$

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j} S_j(n)\right].$$

Fazendo $k = 4$ segue que:

$$S_4(n) = \frac{1}{5}\left[(n+1)^5 - 1 - n - 5.S_1 - 10.S_2 - 10.S_3\right] \Rightarrow$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}\left[n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 - 1 - n - 5\left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right) - 10\left(\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right) - 10\left(\frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4}\right)\right]$$

$$S_4(n) = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$$

Analisando a fórmula $S_k(n) = \frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1} - 1 - \sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j} S_j(n)\right]$, pode-se tirar conclusões importantes sobre a expressão de $S_k(n)$:

(1) $S_k(n)$ é um polinômio de grau $k + 1$ em n.

Isso ocorre porque $(n+1)^{k+1} - 1$ tem grau $n + 1$ e $-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j} S_j(n)$ tem grau n.

(2) O coeficiente de n^{k+1} é $\frac{1}{k+1}$.

Como o coeficiente de n^{k+1} na expansão em binômio de Newton de $(n + 1)^{k+1}$ é 1, então o coeficiente de n^{k+1} em $\frac{(n+1)^{k+1}}{k+1}$ é $\frac{1}{k+1}$.

(3) O coeficiente do termo independente é nulo.

As expressões $(n+1)^{k+1} - 1$ e $-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j} S_j(n)$ tem coeficientes de n^0 igual a zero.

(4) O coeficiente de n^k é igual a $\frac{1}{2}$.

O coeficiente de n^k em $\frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}$ vale $\frac{k+1}{k+1} = 1$ e o coeficiente de n^k na expressão $\frac{-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j} S_j(n)}{k+1}$ vale $-\frac{\frac{1}{k}\binom{k+1}{k-1}}{k+1} = -\frac{1}{k}\frac{(k+1)k}{2(k+1)} = -\frac{1}{2}$

(5) O coeficiente de n^{k-1} é igual a $\frac{k}{12}$, $k \geq 2$.

O coeficiente de n^{k-1} em $\frac{(n+1)^{k+1}-1}{k+1}$ vale $\frac{\binom{k+1}{2}}{k+1}=\frac{k}{2}$ e o coeficiente de n^k na expressão $\frac{-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}S_j(n)}{k+1}$ vale $-\frac{\frac{1}{k-1}\binom{k+1}{k-2}+\binom{k+1}{k-1}\frac{1}{2}}{k+1}=-\frac{k}{6}-\frac{k}{4}=-\frac{5k}{12}$.

Somando, obtém-se $\frac{k}{2}-\frac{5k}{12}=\frac{k}{12}$.

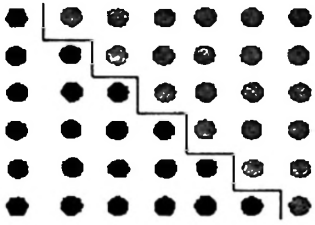
Usando a relação $S_k(n)=\frac{1}{k+1}\left[(n+1)^{k+1}-1-\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k+1}{j}S_j(n)\right]$ é possível encontrar os todos valores de $S_k(n)$, cujos menores valores estão indicados na tabela:

$$
\begin{aligned}
S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\\
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n\\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4+\frac{1}{2}n^3+\frac{1}{4}n^2\\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5+\frac{1}{2}n^4+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{30}n\\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6+\frac{1}{2}n^5+\frac{5}{12}n^4-\frac{1}{12}n^2\\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7+\frac{1}{2}n^6+\frac{1}{2}n^5-\frac{1}{6}n^3+\frac{1}{42}n\\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8+\frac{1}{2}n^7+\frac{7}{12}n^6-\frac{7}{24}n^4+\frac{1}{12}n^2\\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9+\frac{1}{2}n^8+\frac{2}{3}n^7-\frac{7}{15}n^5+\frac{2}{9}n^3-\frac{1}{30}n\\
S_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10}+\frac{1}{2}n^9+\frac{3}{4}n^8-\frac{7}{10}n^6+\frac{1}{2}n^4-\frac{3}{20}n^2\\
S_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11}+\frac{1}{2}n^{10}+\frac{5}{6}n^9-n^7+n^5-\frac{1}{2}n^3+\frac{5}{66}n.
\end{aligned}
$$

2.3.1. Demonstrações Geométricas

É possível encontrar demonstrações para as fórmulas de $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$ e também para a soma dos primeiros n inteiros positivos ímpares usando apenas argumentos geométricos. Mas o que seria um argumento geométrico? Simples, é utilizar uma figura para demonstrar uma expressão algébrica. Muito utilizado para demonstrar os produtos notáveis, os argumentos geométricos também podem ser usados com certo êxito para demonstrar somatórios.

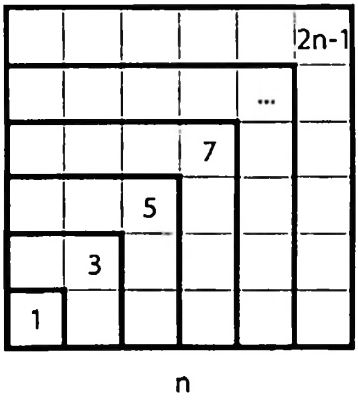
2.3.1.1. $S_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$



Observe a figura ao lado, composta de n + 1 colunas e n linhas de bolinhas. No total existem n(n + 1). A linha poligonal destacada divide as bolinhas em duas metades, cada uma com $\frac{n(n+1)}{2}$ bolinhas. Repare que, em cada uma das metades, aparece a soma 1 + 2 + 3 + ... + n, independentemente se essas somas são tomadas na horizontal ou vertical. Assim, segue diretamente que:

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2.3.1.2. $S_{ímpares} = 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$

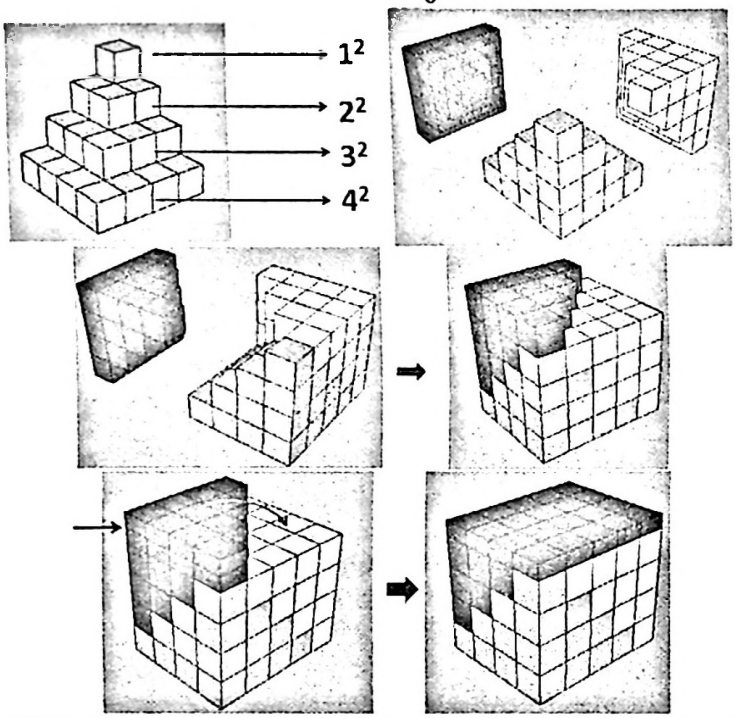


Considere um tabuleiro n×n, ou seja, com n linhas e n colunas. Sabe-se que a quantidade total de casas de um tabuleiro é o produto das quantidades de linhas e colunas. Assim, nosso tabuleiro n×n possui n^2 casas.

Divida o tabuleiro em regiões, como indicado na figura ao lado. A menor região é uma casa e as demais regiões são em formato de L, contendo, cada uma, uma quantidade ímpar de casas. Note que a maior região possui n + n + 1 = 2n + 1 casas, como indicado na figura. Assim, a soma das quantidades de casas de todas as regiões deve ser igual a n^2:

$$S_{ímpares} = 1 + 3 + 5 + ... + 2n - 1 = n^2$$

2.3.1.3. $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$



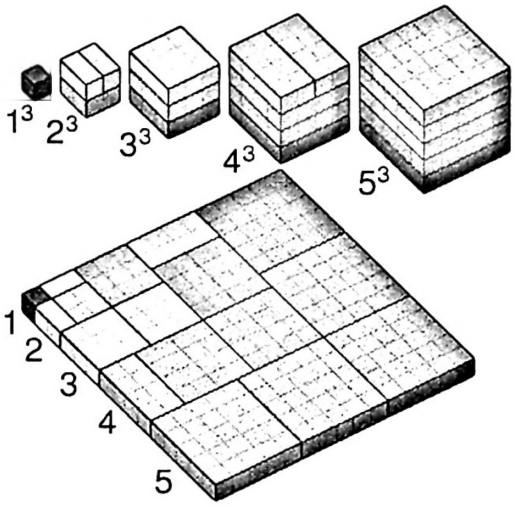
Considere três torres de cubos, cada uma formada por n camadas, com a camada k sendo formada por k^2 cubos, $1 \le k \le n$. Essas torres devem ser agrupadas, de modo a formar um paralelepípedo. Porém, uma das faces fica incompleta, com exatamente metade desta face sendo preenchida com cubos. Existe uma maneira de preencher totalmente esta face, bastando dividir ao meio a metade dos cubos que está preenchida e usar essa metade para completar a metade que estava vazia. Note que a quantidade total de cubos não altera, entretanto, a altura do paralelepípedo fica alterada. Com a face superior incompleta tínhamos uma altura n + 1. Utilizando a estratégia de cortar pela metade os cubos da face superior, a altura do sólido agora é $n + \dfrac{1}{2}$, obtendo assim um paralelepípedo de dimensões $n \times n + 1 \times n + \dfrac{1}{2}$.

A quantidade total de cubos pode ser calculada somando os cubos de cada torre ou multiplicando as dimensões do paralelepípedo:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2.3.1.4. $S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$



Considere uma sequência de n cubos, de lados 1, 2, 3, ..., n. Pode-se dividir um cubo de lado k ($1 \le k \le n$) em k^3 cubos menores de lado 1. Assim, a quantidade total de cubinhos de lado 1 que são obtidos dividindo os cubos originais vale $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.
Conforme a figura, é possível "fatiar" todos esses cubos maiores em paralelepípedos de altura 1 para posteriormente serem agrupados de modo a formar um paralelepípedo de altura 1 e cuja base possui dimensão igual a $1 + 2 + 3 + ... + n$.
Como a quantidade de cubinhos de lado 1 é igual ao produto das dimensões do paralelepípedo final:

$$S_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Exercícios Resolvidos

1) Demonstre que $1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{1}{3}n(4n^2 - 1)$;

Solução:
Utilizando notação de somatório segue que:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2 - 4k + 1) = 4\sum_{k=1}^{n}k^2 - 4\sum_{k=1}^{n}k + \sum_{k=1}^{n}1 =$$

$$= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\frac{n(n+1)}{2} + n = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n =$$

$$= \frac{n}{3}\left[4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3\right] = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

2) Calcule o valor de 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n(n + 1)(n + 2).

Solução:

Usando notação de somatório:

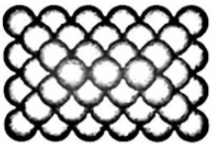
$$S=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}(k^3+3k^2+2k)=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k \Rightarrow$$

$$S=\frac{n^2(n+1)^2}{4}+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$S=\frac{n(n+1)}{4}\left[n(n+1)+2(2n+1)+4\right]=\frac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{4} \Rightarrow$$

$$S=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

3) Uma pilha de **n** níveis de bolas tem base retangular e o nível superior consiste em uma fila de x bolas. Mostrar que o número total de bolas da usadas para montar a pilha é $\frac{n(n+1)(2n+3x-2)}{6}$.



Vista Superior

Vista de Perfil

Solução:

Observe que o 1º nível possui x bolas, o 2º nível possui 2(x + 1) bolas, o 3º nível possui 3(x + 2) bolas, ..., o nível k ($1 \le k \le n$) possui k(x + k – 1) bolas, ..., o nível n possui n(x + n – 1) bolas.

Usando notação de somatório tem-se:

$$S=\sum_{k=1}^{n}k(x-1+k)=(x-1)\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k^2=(x-1)\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}= \Rightarrow$$

$$S=\frac{n(n+1)}{6}\left[3x-3+2n+1\right] \Rightarrow S=\frac{n(n+1)(2n+3x-2)}{6}$$

2.4. PROGRESSÕES ARITMÉTICAS DE ORDEM SUPERIOR

A definição de progressão aritmética utilizada até então neste capítulo na verdade consiste em um caso particular chamado progressão aritmética de 1ª ordem, onde a subtração dos termos consecutivos é constante. O caso geral de progressão aritmética pode ser definido da seguinte maneira:

"Seja (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots$ uma sequência. Define-se a sequência (Δa_n) pela subtração dos termos consecutivos de a_n, ou seja, (Δa_n): $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ Afirmamos que (a_n): $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma progressão aritmética de n^a ordem quando a sequência $(\underbrace{\Delta(\Delta(\Delta(\ldots(\Delta a_n)\ldots))))}_{n\ \Delta's}$ é constante."

Por exemplo, pode-se demonstrar que a sequência $a_n = n^3$ é uma progressão aritmética de 3ª ordem, pois a sequência $\Delta(\Delta(\Delta(a_n)))$ é constante:

$\Delta a_n = n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$;

$\Delta(\Delta a_n) = 3n^2 - 3n + 1 - [3(n-1)^2 - 3(n-1) + 1] = 6n - 6$;

$\Delta(\Delta(\Delta a_n)) = 6n - 6 - [6(n-1) - 6] = 6$

Na verdade, pode-se demonstrar que se o termo geral de uma sequência (a_n) é um polinômio, na variável n, de grau k então (a_n) é uma progressão aritmética de k^a ordem.

2.4.1. PA de Segunda Ordem

Agora vamos nos ater somente ao caso da PA de 2ª ordem. Uma vez que na PA de 2ª ordem a segunda subtração dos elementos consecutivos é constate, então os valores da primeira subtração dos elementos da sequência formam uma progressão aritmética de 1ª ordem. Vamos utilizar este fato para encontrar a expressão do termo geral de uma PA de 2ª ordem. Suponha que $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é uma PA de 2ª ordem. Uma vez que a sequência $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ é uma PA de 1ª ordem, segue que

$a_2 - a_1 = k$

$a_3 - a_2 = k + r$

$a_4 - a_3 = k + 2r$

$a_5 - a_4 = k + 3r$

...

$a_n - a_{n-1} = k + (n-2)r$

Somando estas equações lado a lado obtemos:

$$a_n - a_1 = (k) + (k + r) + (k + 2r) + (k + 3r) + \ldots + (k + (n-2)r) \Rightarrow$$

$$a_n = a_1 + \frac{(k + k + (n-2)r)(n-1)}{2} \Rightarrow a_n = \left(\frac{r}{2}\right)n^2 + \left(\frac{2k - 3r}{2}\right)n + (a_1 - k + r)$$

O leitor agora deve estar se perguntando se é necessário decorar esta fórmula para resolver problemas de PAs de 2ª ordem? A boa notícia é que a resposta é não! Há duas maneiras de abordar uma questão de PA de 2ª ordem. Aplicaremos essas duas maneiras num exemplo numérico. Considere a sequência $\{a_n\}$: (4, 7, 12, 19, 28, ...), onde é desejado determinar seu termo geral. Repare que as subtrações entre termos consecutivos formam uma PA: (3, 5, 7, 9, ...). Assim, temos uma PA de 2ª ordem. Como $a_{k+1} - a_k$ é uma PA de 1ª ordem, segue que:

$a_2 - a_1 = 3$
$a_3 - a_2 = 5$
$a_4 - a_3 = 7$
$a_5 - a_4 = 9$
...
$a_n - a_{n-1} = 2n - 1$

Somando estas equações lado a lado obtemos:

$$a_n - a_1 = 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) \Rightarrow a_n - 4 = \frac{(3 + 2n - 1)(n - 1)}{2} \Rightarrow a_n = n^2 + 3.$$

A outra maneira de abordar uma questão de PA de 2ª ordem é basear-se no fato que toda PA de ordem n é um polinômio de grau n. Assim, pode-se afirmar que o termo geral de toda PA de 2ª ordem é da forma $a_n = An^2 + Bn + C$. Para determinar os valores de A, B e C basta substituir $a_1 = 4$, $a_2 = 7$ e $a_3 = 12$ no termo geral, a saber:

$a_1 = 4 \Rightarrow A + B + C = 4$ (1)
$a_2 = 7 \Rightarrow 4A + 2B + C = 7$ (2)
$a_3 = 12 \Rightarrow 9A + 3B + C = 12$ (3)

Resolvendo o sistema formado pelas equações (1), (2) e (3) encontra-se A = 1, B = 0 e C = 3, implicando que $a_n = n^2 + 3$.

2.4.2. PA de Ordem n, n ≥ 3

A forma mais eficiente de determinar o termo geral de uma PA de ordem n, n ≥ 3, é utilizar o fato que seu termo geral é um polinômio de grau n. Por exemplo, tome a sequência $\{a_n\}$: (– 1, – 3, 1, 17, 51, 109, ...). Calculando a sequência formada pela subtração dos elementos consecutivos de a_n obtém-se a sequência $\{\Delta a_n\}$: (– 2, 4, 16, 34, 58. ,,,}. Determinando a sequência obtida pela subtração dos elementos consecutivos de Δa_n obtém $\{\Delta(\Delta a_n)\}$: (6, 12, 18, 24, ...). Como $\Delta(\Delta a_n)$ é uma PA de 1ª ordem (1° termo igual a 6 e razão 6), então a_n é uma PA de 3ª ordem, cujo termo geral é um polinômio de grau 3 em n, ou seja, da forma $a_n = An^3 + Bn^2 + Cn + D$. Substituindo n = 1, 2, 3 e 4 neste polinômio, segue que:

$a_1 = -1 \Rightarrow A + B + C + D = -1$
$a_2 = -3 \Rightarrow 8A + 4B + 2C + D = -3$
$a_3 = 3 \Rightarrow 27A + 9B + 3C + D = 3$
$a_4 = 17 \Rightarrow 64A + 16B + 4C + D = 17$

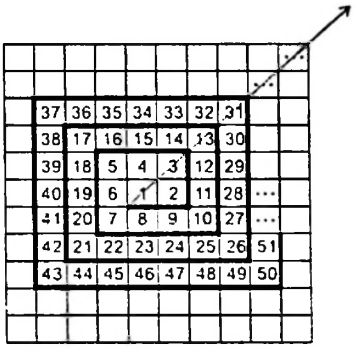
Resolvendo esse sistema nas variáveis A, B, C e D, obtém-se como conjunto solução A = 1, B = – 3, C = 0 e D = 1. Desta forma, o termo geral da PA de 3ª ordem (– 1, – 3, 1, 17, 51, 109, ...) é $a_n = n^3 - 3n^2 + 1$.

Este procedimento pode ser utilizado para uma PA de ordem qualquer. Identificando que a PA é de ordem k, conclui-se que o termo geral da sequência será um polinômio de grau n da forma $a_n = c_k n^k + c_{k-1} n^{k-1} + ... + c_1 n + c_0$. Para determinar os coeficientes c_k, c_{k-1}, ..., c_1, c_0 deve-se resolver um sistema linear n + 1×n + 1 obtido ao substituir os primeiros n + 1 termos de a_n no polinômio.

Acompanhe os exercícios resolvidos para entender melhor a aplicação das técnicas necessárias para a determinação do termo geral de uma PA de ordem n.

Exercícios Resolvidos

1) (OBMEP-17) Paula escreveu os números 1, 2, 3, ... em uma folha de papel quadriculado de acordo com o padrão indicado abaixo. Os números que aparecem ao longo da flecha formam a sequência 1, 3, 13, 31, ... qual é o 30° termo dessa sequência?



a) 3301 b) 3303 c) 3307 d) 3309 e) 3313

Solução: Alternativa C

A sequência é dada por $\{a_n\}$: (1, 3, 13, 31, 57, ...) e a subtração de termos consecutivos é dada pela sequência $\{\Delta a_n\}$: (2, 10, 18, 26, ...), que é uma PA de 1ª ordem. Desta forma, a_n é uma PA de 2ª ordem, tendo, portanto, termo geral dado por $a_n = An^2 + Bn + C$. Substituindo n = 1, 2 e 3 neste termo geral:

$a_1 = 1 \Rightarrow A + B + C = 1$ (1)

$a_2 = 3 \Rightarrow 4A + 2B + C = 3$ (2)

$a_3 = 13 \Rightarrow 9A + 3B + C = 13$ (3)

Subtraindo as equações (2) e (1): $3A + B = 2$ (4)

Subtraindo as equações (3) e (2): $5A + B = 10$ (5)

Subtraindo as equações (5) e (4): $2A = 8 \Rightarrow A = 4 \Rightarrow B = -10 \Rightarrow C = 7$

Deste modo, o termo geral da sequência é $a_n = 4n^2 - 10n + 7$
Substituindo $n = 30$ segue que $a_{30} = 4(30)^2 - 10(30) + 7 = 3600 - 300 + 7 = 3307$

2) (UENF-02) Observe a sequência numérica a seguir: (0, 3, 8, 15, 24, ...)
Determine, em relação a essa sequência:
a) seu 6º termo;
b) a expressão do termo de ordem **n**.
Solução:
a) Seja (a_n) a sequência dada. Podemos observar que os valores de $a_n - a_{n-1}$ são dados por 3, 5, 7, 9, ..., que é uma progressão aritmética de 1ª ordem com 1º termo igual a 3 razão 2. Portanto, $a_6 - a_5 = 11$, implicando que $a_6 = 35$.
b) Escrevendo as subtrações dos termos consecutivos da sequência (a_n):
$a_2 - a_1 = 3$
$a_3 - a_2 = 5$
$a_4 - a_3 = 7$
$a_5 - a_4 = 9$
...
$a_n - a_{n-1} = 2n - 1$
Somando estas equações lado a lado obtemos:

$$a_n - a_1 = 3 + 5 + 7 + ... + (2n - 1) \Rightarrow a_n - 0 = \frac{(3 + 2n - 1)(n - 1)}{2} \Rightarrow a_n = n^2 + 1.$$

3) (IME-97) Considere os números ímpares escritos sucessivamente, como mostra a figura abaixo, onde a enésima linha compreende **n** números. Encontre em função de **n**, nesta linha, a soma de todos os números escritos, bem como o primeiro e o último.

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29

Solução:
Seja (a_n) a sequência formada pelos primeiros elementos de cada linha. Podemos notar que $a_2 - a_1 = 2$, $a_3 - a_2 = 4$, $a_4 - a_3 = 6$, $a_5 - a_4 = 8$, ..., que é uma PA de 1ª ordem com termo geral dado por $2n$, $n \geq 1$.
Portanto:
$a_2 - a_1 = 2$
$a_3 - a_2 = 4$
$a_4 - a_3 = 6$
...
$a_n - a_{n-1} = 2n - 2$

Somando estas equações lado a lado obtemos:

$$a_n - a_1 = 2 + 4 + 6 + ... + 2n - 2 \Rightarrow a_n - 1 = \frac{(2 + 2n - 2)(n - 1)}{2} \Rightarrow a_n = n^2 - n + 1$$

Seja (b_n) a sequência formada pelos últimos elementos de cada linha. Repare que, pelo raciocínio de distribuição dos números na tabela:

$$b_n = a_{n+1} - 2 = [(n + 1)^2 - (n + 1) + 1] - 2 = n^2 + n - 1.$$

Como os n elementos da linha n formam uma PA:

$$S_n = \frac{(a_n + b_n)n}{2} = \frac{(n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1)n}{2} = n^3.$$

Obs: Essa forma de organizar os números ímpares ao longo de um triângulo foi a maneira que o matemático Fibonacci encontrou de demonstrar a conhecida identidade $(1 + 2 + 3 + ... + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3$.

4) Determine o termo geral da sequência (1, 13, 73, 241, 601, 1261, 2353, ...).

Solução:

Inicialmente vamos determinar sequências obtidas pela subtração dos elementos da sequência anterior, partindo da sequência original, até que apareça uma sequência que seja uma PA de 1ª ordem:

Δa_n: (12, 60, 168, 360, 660, 1092, ...)

$\Delta(\Delta a_n)$: (48, 108, 192, 300, 432, ...)

$\Delta(\Delta(\Delta a_n))$: (60, 84, 108, 132, ...)

Como $\Delta(\Delta(\Delta a_n))$ é uma PA de 1ª ordem segue que a_n é uma PA de 4ª ordem. Desta forma, seu termo geral é $a_n = An^4 + Bn^3 + Cn^2 + Dn + E$. Substituindo n = 1, 2, 3, 4 e 5 nesta expressão:

$A + B + C + D + E = 1$

$16A + 8B + 4C + 2D + E = 13$

$81A + 27B + 9C + 3D + E = 73$

$256A + 64B + 16C + 4D + E = 241$

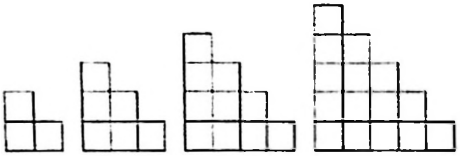
$625A + 125B + 25C + 5D + E = 601$

Resolvendo esse sistema 5×5 encontra-se como conjunto solução A = 1, B = 0, C = – 1, D = 0 e E = 1.

Deste modo, o termo geral da sequência é $a_n = n^4 - n^2 + 1$.

Exercícios de Vestibular

1) (UFRGS-17) Quadrados iguais de lado 1 são justapostos, segundo padrão representado nas figuras das etapas abaixo.



Mantido esse padrão de construção, o número de quadrados de lado 1, existentes na figura da etapa 100, é
(A) 1331. (B) 3050. (C) 5050.
(D) 5100. (E) 5151.

2) (Unifesp-11) Progressão aritmética é uma sequência de números tal que a diferença entre cada um desses termos (a partir do segundo) e o seu antecessor é constante. Essa diferença constante é chamada "razão da progressão aritmética" e usualmente indicada por r.
a) Considere uma PA genérica finita (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) de razão r, na qual n é par. Determine a fórmula da soma dos termos de indice par dessa PA, em função de a_1, n e r.
b) Qual a quantidade mínima de termos para que a soma dos termos da PA (–224, –220, –216, ...) seja positiva?

3) (Unesp-97) Imagine os números inteiros não negativos formando a seguinte tabela:

0 3 6 9 12 ...
1 4 7 10 13 ...
2 5 8 11 14 ...

a) Em que linha da tabela se encontra o número 319?
b) Em que coluna se encontra esse número?

4) (UECE-12) Se a soma dos quadrados dos n primeiros números inteiros positivos é dada pela expressão $n(2n + 1)(n + 1)/6$, então qual o valor da soma
$(x - 1)(x + 1) + (x - 2)(x + 2) + (x - 3)(x + 3) + + ... + +(x - 99)(x + 99)$?
a) $99x^2 - 328350$ b) $198x^2 - 328350$
c) $99x^2 - 1970100$ e) $198x^2 - 1970100$

5) (UECE-12) Uma sequência de números reais a_1, a_2, a_3, a_4, ... é uma progressão harmônica se seus inversos $1/a_1$, $1/a_2$, $1/a_3$, $1/a_4$, ... formam uma progressão aritmética. Se os números 1, 3, – 3, nesta ordem, são os três primeiros termos de uma progressão harmônica, então o décimo terceiro termo desta progressão harmônica é
a) – 1/9. b) – 1/7. c) – 1/6. d) – 1/8.

6) (UFSCar-02) A soma dos cinco primeiros termos de uma PA vale 15 e o produto desses termos é zero. Sendo a razão da PA um número inteiro e positivo, o segundo termo dessa sequência vale
a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) 4.

7) (UECE-14) Observe a listagem abaixo.

Linha 1: -2, 3, -4, 5, -6, ...
Linha 2: -4, 6, -8, 10, -12, ...
Linha 3: -6, 9, -12, 15, -18, ...
Linha 4: -8, 12, -16, 20, -24, ...
....
....

Seguindo a lógica construtiva desta listagem, pode-se concluir acertadamente que a soma dos vinte primeiros números da linha de número vinte é igual a

A) -200. B) 400.
C) -400. D) 200.

8) (UECE-17) O quadro numérico apresentado a seguir é construído segundo uma lógica estrutural.

1	3	5	7	9	.....	101
3	3	5	7	9	.....	101
5	5	5	7	9	.....	101
7	7	7	7	9	.....	101
.....						
.....						
101	101	101	101	101	.....	101

Considerando a lógica estrutural do quadro acima, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que estão na linha de número 41 é

A) 4443. B) 4241.
C) 4645. D) 4847.

9) (UFV-98) Dados os pontos M, N, O, P, Q, R de um círculo, associamos a cada um deles uma sequência de números, como mostrado no quadro abaixo:

M	0	6	12	18	...
N	1	7	13	19	...
O	2	8	14	20	...
P	3	9	15	21	...
O	4	10	16	22	...
R	5	11	17	23	...

O número 1888 está na sequência associada ao ponto:

a) M b) N c) O d) Q e) P

10) (UFC-05) A sequência de números inteiros positivos $a_1 = 1$, a_2, a_3 está em progressão aritmética com razão positiva. Calcule o menor valor de $a_1 + a_2 + a_3$ para que a equação $a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ tenha duas raízes reais e distintas.

11) (Fuvest-91) Os números inteiros positivos são dispostos em quadrados da seguinte maneira:

1 2 3 10 11 12 19 .. ..
4 5 6 13 14 15 .. .. ..
7 8 9 16 17 18 .. .. ..

O número 500 se encontra em um desses quadrados. A linha e a coluna em que o número 500 se encontra são, respectivamente:

a) 2 e 2 b) 3 e 3 c) 2 e 3
d) 3 e 2 e) 3 e 1

12) (Fuvest-97) Do conjunto de todos os números naturais n, $n \leq 200$, retiram-se os múltiplos de 5 e, em seguida, os múltiplos de 6. Calcule a soma dos números que permanecem no conjunto.

13) (Mackenzie-05) A soma de todos os termos, que são menores que 12, da PA (1/4, 3/4, 5/4, 7/4, ...) é:

a) 120 b) 144 c) 150 d) 160 e) 140

14) (FGV-19) Pensando em sua futura poupança, Roberto decidiu, no final de janeiro de 2018, investir no mercado de ações, adquirindo 100 ações da empresa VP. Seu plano foi, em cada um dos finais dos próximos 59 meses, comprar duas ações da mesma empresa a mais do que comprou no mês anterior. Logo após sua última compra, a ser feita no final de dezembro de 2022, seu investimento resultará em um total de N ações. Supondo que no período considerado não haja proventos que resultem em aumento

no número de ações, pode-se afirmar que N é igual a:

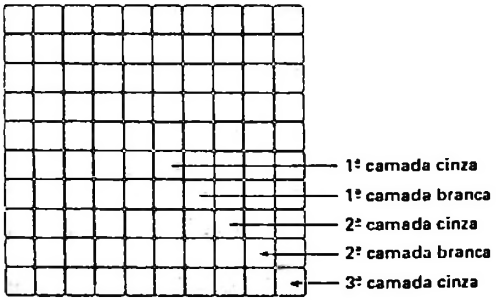
a) 9 440 b) 9 640 c) 9 240
d) 9 540 e) 9 340

15) (UFMA-03) Pedrinho, um velho funcionário público da UFMA/DEMAT, consegue despachar, como secretário, no 1º dia útil do mês, uma certa quantidade x de documentos; no dia seguinte, despacha o dobro do que despachou no primeiro dia; no terceiro dia, o triplo do que despachou no primeiro dia e, assim, sucessivamente. Ao final do mês de 30 dias, despachou 930 documentos. Assim, quantos documentos Pedrinho despachou no primeiro dia?

16) (FGV-17) a) Determinar a soma dos 20 primeiros termos da sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ definida por: $a_n = 2 + 4n$ se n é ímpar e $a_n = 4 + 6n$ se n é par.

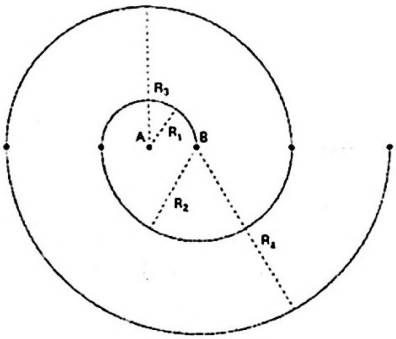
b) Considere a sequência (1, 10, 11, ..., 19, 100, 101, ... 199, ...) formada por todos os números naturais que têm 1 como primeiro algarismo no sistema decimal de numeração, tomados em ordem crescente. Se a soma dos seus n primeiros termos é 347, qual é o valor de n e o valor numérico de a_n?

17) (Unicamp-11) No centro de um mosaico formado apenas por pequenos ladrilhos, um artista colocou 4 ladrilhos cinza. Em torno dos ladrilhos centrais, o artista colocou uma camada de ladrilhos brancos, seguida por uma camada de ladrilhos cinza, e assim sucessivamente, alternando camadas de ladrilhos brancos e cinza, como ilustra a figura abaixo, que mostra apenas a parte central do mosaico. Observando a figura, podemos concluir que a 10ª camada de ladrilhos cinza contém



a) 76 ladrilhos. c) 112 ladrilhos.
b) 156 ladrilhos. d) 148 ladrilhos.

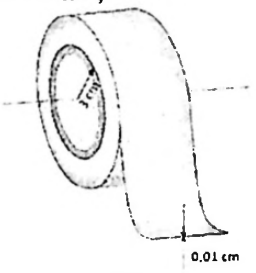
18) (Unicamp-12) Uma curva em formato espiral, composta por arcos de circunferência, pode ser construída a partir de dois pontos A e B, que se alternam como centros dos arcos. Esses arcos, por sua vez, são semicircunferências que concordam sequencialmente nos pontos de transição, como ilustra a figura ao lado, na qual supomos que a distância entre A e B mede 1cm.



a) Determine a área da região destacada na figura.

b) Determine o comprimento da curva composta pelos primeiros 20 arcos de circunferência.

19) (Fuvest-20) O cilindro de papelão central de uma fita crepe tem raio externo de 3 cm. A fita tem espessura de 0,01 cm e dá 100 voltas completas. Considerando que, a cada volta, o raio externo do rolo é aumentado no valor da espessura da fita, o comprimento total da fita é de, aproximadamente,



a) 9,4 m. b) 11,0 m. c) 18,8 m.
d) 22,0 m. e) 25,1 m.

20) (Fuvest-20) A figura apresenta uma parte de uma tabela na qual cada linha e cada coluna seguem de acordo com o padrão representado.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	...
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	...
22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	...
29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	...
36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

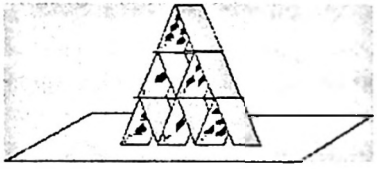
Com relação a essa tabela de números:
a) Escolha um quadrado 3 × 3 e, exibindo a soma de seus 9 números, verifique que o resultado é múltiplo de 9.
b) Um quadrado com 16 números tem por soma de todos esses números o valor de 1.056 (mil e cinquenta e seis). Descubra o menor número desse quadrado.
c) A soma de todos os números de um quadrado n × n, com menor número igual a 4, é de 108.000 (cento e oito mil). Qual é o valor de n?

21) (F.C.M.Sta.Casa-80) A sucessão S dos números 1, 5, 13, 25,..., a_k, ..., possui a propriedade de que as diferenças:

$d_k = a_{k+1} - a_k$, com k = 1, 2, 3, ...

formam uma progressão aritmética. O 30° termo de S é:
a) 120 b) 117 c) 871 d) 1741
e) impossível de ser calculado.

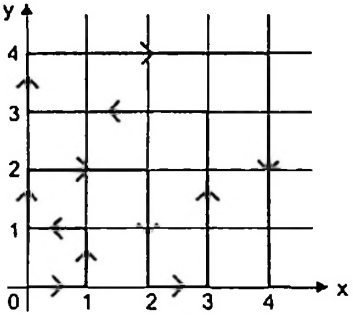
22) (UFRJ-98) Num Ka Kay, o oriental famoso por sua inabalável paciência, deseja bater o recorde mundial de construção de castelo de cartas. Ele vai montar um castelo na forma de um prisma triangular no qual cada par de cartas inclinadas que se tocam deve estar apoiado em uma carta horizontal, excetuando-se as cartas da base, que estão apoiadas em uma mesa. A figura a seguir apresenta um castelo com três níveis.



Num Ka Kay quer construir um castelo com 40 níveis. Determine o número de cartas que ele vai utilizar.

23) (UECE-03) O número de termos, menores que 500, comuns às progressões aritméticas
• 2, 6, 10, 14, ...
• 3, 10, 17, 24, ... é:
a) 17 b) 18 c) 19 d) 20

24) (FGV-20) Uma formiga desloca-se sobre uma malha quadriculada com eixos cartesianos ortogonais. Ela parte do ponto de coordenadas (0, 0) e segue um caminho conforme o padrão indicado na figura.



Sabendo que essa formiga se desloca por uma unidade da malha a cada 1 segundo, para chegar ao ponto de coordenadas (99, 99) ela levará
(A) 1 hora e 45 minutos.
(B) 2 horas e 15 minutos.
(C) 2 horas e 45 minutos.
(D) 3 horas e 15 minutos.
(E) 4 horas e 25 minutos.

25) (Mackenzie-05) A caixa d'água reserva de um edifício, que tem capacidade para 25000 litros, contém, em um determinado dia, 9600 litros. Contrata-se uma empresa para fornecer 400 litros de água nesse dia, 600 litros no dia seguinte, 800 litros no próximo e assim por diante, aumentando em 200 litros o fornecimento de cada dia. O número de dias necessários para que a caixa atinja a capacidade total é:
a) 11 b) 13 c) 14 d) 12 e) 10

26) (PUC/SP-05) Considere as sequências (1, 4, 7, 10, ..., 67) e (8, 12, 16, 20, ..., 104). O número de termos comuns a essas duas progressões é
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

27) (EsPCEx-13) Os números naturais ímpares são dispostos como mostra o quadro:

1ª linha:	1					
2ª linha:	3	5				
3ª linha:	7	9	11			
4ª linha:	13	15	17	19		
5ª linha:	21	23	25	27	29	
...	...	...	...	...	...	...

O primeiro elemento da 43ª linha, na horizontal, é:
a) 807 b) 1007 c) 1307
d) 1507 e) 1807

28) (FGV-18) Seja S_n a soma dos cubos dos n primeiros números inteiros positivos, com $n \geq 2$ e $S_1 = 1^3$.
a) Calcule S_2, S_3 e S_4.
b) É correta a proposição:
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$?
c) Demonstre que a soma dos cubos dos n primeiros números inteiros positivos, $n \geq 2$, é igual a $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

29) (UFRJ-04) Felipe começa a escrever números naturais em uma folha de papel muito grande, uma linha após a outra, como mostrado a seguir:

1										
2	3	4								
3	4	5	6	7						
4	5	6	7	8	9	10				
5	6	7	8	9	10	11	12	13		
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16

.....

Considerando que Felipe mantenha o padrão adotado em todas as linhas:

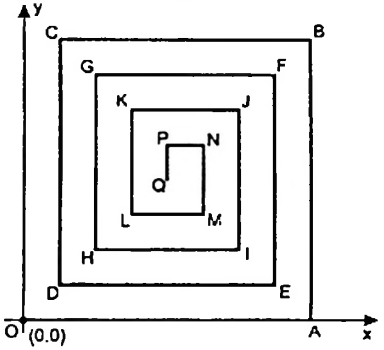
a) determine quantos números naturais ele escreverá na 50ª linha;
b) determine a soma de todos os números escritos na 50ª linha;
c) prove que a soma de todos os elementos de uma linha é sempre o quadrado de um número ímpar.

30) (UECE-13) Se a soma dos 99 primeiros termos da sequência $k, \frac{k^2+1}{k}, \frac{k^2+2}{k}, \frac{k^2+3}{k}, \ldots$ é igual a 1386, então o valor de k é
A) 7. B) 8. C) 9. D) 10.

31) (UECE-19) Considere a soma dos números inteiros ímpares positivos agrupados do seguinte modo:
$1 + (3+5) + (7 + 9 + 11) + (13 + 15 + 17 + 19) + (21 + 23 + 25 + 27 + 29) + \ldots$
O grupo de ordem n é formado pela soma de n inteiros positivos ímpares e consecutivos. Assim, pode-se afirmar corretamente que a soma dos números que compõem o décimo primeiro grupo é igual a
a) 1223 b) 1331 c) 1113 d) 1431

32) (UEFS-19) Observe a sequência numérica em que um número 9 separa cada grupo de números 1, e cada grupo de números 1 contém um número 1 a mais do que o grupo anterior.
(1, 9, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 9, 1, 1, 1, 1, 9, ...)
A soma de todos os termos anteriores ao 99º número 9 dessa sequência é igual a
(A) 5 733. (B) 6 030. (C) 5 841.
(D) 5 931. (E) 5 832.

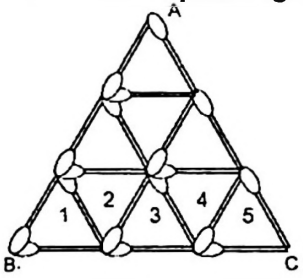
33) (AFA-19) Considere, no plano cartesiano, a figura abaixo, em que os segmentos horizontais são paralelos ao eixo Ox e os segmentos verticais são paralelos ao eixo Oy.



Sabe-se que:
• os comprimentos de segmentos consecutivos da poligonal, que começa na origem O(0, 0) e termina em Q, formam uma progressão aritmética decrescente de
razão r e primeiro termo a_1, em que $-1/15 < r < 0$.
• dois comprimentos consecutivos da poligonal são sempre perpendiculares;
• $OA = a_1$, $AB = a_2$, $BC = a_3$, e, assim sucessivamente, até $PQ = a_{16}$.
Suponha que uma formiga parta da origem O(0, 0), e percorra a trajetória descrita pela poligonal até chegar ao ponto Q.
Com base nas informações acima, analise as proposições abaixo.
I. Se $a_1 = 1$ e $r = -1/16$, então a distância d percorrida pela formiga até chegar ao ponto Q é tal que $d = 17a_1/2$.
II. Quando a formiga estiver na posição do ponto L(x,y), então $x = -6r$
III. Se $a_1 = 1$, então de A até C, a formiga percorrerá a distância $d = 2 + 3r$

Quanto a veracidade das proposições, tem-se
a) apenas uma delas é verdadeira.
b) apenas duas são verdadeiras.
c) todas são verdadeiras.
d) nenhuma delas é verdadeira.

34) (Escola Naval-13) Um grande triângulo equilátero será construído com palitos de fósforos, a partir de pequenos triângulos equiláteros congruentes e dispostos em linhas. Por exemplo, a figura abaixo descreve um triângulo equilátero (ABC) construído com três linhas de pequenos triângulos equiláteros congruentes (a linha da base do triângulo (ABC) possui 5 pequenos triângulos equiláteros congruentes). Conforme o processo descrito, para que seja construído um triângulo grande, com linha de base contendo 201 pequenos triângulos equiláteros congruentes, é necessário, um total de palitos igual a



a) 15433 b) 14553 c) 13453
d) 12553 e) 11453

35) (AFA-00) Se a soma dos 6 primeiros termos de uma progressão aritmética é 21 e o sétimo termo é o triplo da soma do terceiro com o quarto termo, então o primeiro termo dessa progressão é
a) -7 b) -8 c) -9 d) -10

36) (ITA-58) Provar que se em uma P.A. é tal que a soma dos n primeiros termos é igual a $n + 1$ vezes a metade do n-ésimo termo então $r = a_1$.

37) (ITA-80) Considere a progressão aritmética $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n termos, $n \geq 2$, cuja soma de seus termos é K. A soma da sequência dos n valores $y_1, y_2, \ldots, y_n$ definidos por $y_i = ax_i + b$, $i = 1, 2, \ldots, n$, onde a e b são números reais com $a \neq 0$, é dada por:
a) K b) $aK + b$ c) $aK + nb$
d) $a^nK + nb$ e) a^nK

38) (ITA-85) Seja $f: \Re \to \Re$ uma função satisfazendo $f(x + \alpha y) = f(x) + \alpha f(y)$ para todo $\alpha, x, y \in \Re$. Se $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ é uma progressão aritmética de razão d, então podemos dizer que $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), \ldots, f(a_4))$
a) É uma progressão aritmética de razão d.
b) é uma progressão aritmética de razão f(d) cujo termo primeiro é a_1.
c) é uma progressão geométrica de razão f(d).
d) É uma progressão aritmética de razão f(d).
e) Nada se pode afirmar.

39) (ITA-97) Os números reais x, y e z formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão r. Seja a um número real com $a > 0$ e $a \neq 1$ satisfazendo $3a^x + 2a^y - a^z = 0$. Então r é igual a:
a) a^2 b) $(1/2)^a$ c) $\log_{2a} 4$
d) $\log_a (3/2)$ e) $\log_a 3$

40) (IME-66) Demonstre que a soma da série $\frac{1}{1.3.5}+\frac{1}{3.5.7}+\frac{1}{5.7.9}+...$ é igual a 1/12.

41) (IME-76) A soma dos 50 primeiros termos de uma progressão aritmética é igual a 200 e a soma dos 50 seguintes é igual a 2700. Calcule a razão da progressão e o seu primeiro termo.

42) (IME-79) Seja uma progressão aritmética de 1° termo $a_1 \neq 0$ e último termo a_{10} tal que $a_1 \neq a_{10} \neq 0$. Seja a progressão aritmética de 1° termo $b_1 = 1/a_1$ e último termo $b_{10} = 1/a_{10}$. Calcule a_5/b_6 em função de a_1 e a_{10}.

43) (IME-82) O quadrado de qualquer número par *2n* pode ser expresso como a soma de *n* termos em progressão aritmética. Determine o primeiro termo e a razão desta progressão.

44) (IME-80) Prove que: $n^3 = \sum_{i=1}^{n} a_i$, onde: $a_i = n(n-1)+2i-1$.

45) (IME-96) Calcule o valor da soma:

$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+...+\frac{1}{2998.3001}$$

46) (ITA-10) Considere a progressão aritmética (a_1, a_2, ..., a_{50}) de razão d. Se $\sum_{n=1}^{10} a_n = 10+25d$ e $\sum_{n=1}^{50} a_n = 4550$, então $d - a_1$ é igual a

a) 3 b) 6 c) 9 d) 11 e) 14

47) (ITA-12) Sabe-se que (x + 2y, 3x – 5y, 8x – 2y, 11x – 7y + 2z) é uma progressão aritmética com o último termo igual a – 127. Então, o produto xyz é igual a

a) – 60. b) – 30. c) 0. d) 30. e) 60.

48) (IME-09) É dada uma PA de razão r. Sabe-se que o quadrado de qualquer número par x, x > 2, pode ser expresso como a soma dos n primeiros termos desta PA, onde n é igual à metade de x. O valor de r é

A) 2 B) 4 C) 8 D) 10 E) 16

49) (IME-10) Seja $S = 1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + ...+ 79^2$. O valor de S satisfaz:

a) $S < 7.10^4$

b) $7.10^4 \leq S < 8.10^4$

c) $8.10^4 \leq S < 9.10^4$

d) $9.10^4 \leq S < 10^5$

e) $S \geq 10^5$

50) (IME-11) Uma progressão aritmética $\{a_n\}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$, tem $a_1 > 0$ e $3a_8 = 5a_{13}$. Se S_n é a soma dos n primeiros termos desta progressão, o valor de n para que S_n seja máxima é:

a) 10 b) 11 c) 19 d) 20 e) 21

51) (IME-14) Em uma progressão aritmética crescente, a soma de três termos consecutivos é S_1 e a soma de seus quadrados é S_2. Sabe-se que os dois maiores desses três termos são raízes da equação $x^2 - S_1 x + \left(S_2 - \frac{1}{2}\right) = 0$. A razão desta PA é

a) 1/6 b) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ c) $\sqrt{6}$ d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) 1

52) (IME-15) A soma dos termos de uma progressão aritmética é 244. O primeiro termo, a razão e o número de termos formam, nessa ordem, outra progressão aritmética de razão 1. Determine a razão da primeira progressão aritmética.
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

53) (IME-65) Determine a relação que deve existir entre os números m, n, p e q, para que se verifique a seguinte igualdade entre os termos da mesma progressão aritmética: $a_m + a_n = a_p + q_q$.

Exercícios Gerais

54) Se numa P.A. a soma dos m primeiros termos é igual á soma dos n primeiros termos, $m \neq n$, mostre que a soma dos $m + n$ primeiros termos é igual a zero.

55) São dados a soma S de três números em PA e a soma S' dos quadrados desses números. Demonstre que os números são:

$$\frac{S}{3} - \sqrt{\frac{S'}{2} - \frac{S^2}{6}}, \frac{S}{3} \text{ e } \frac{S}{3} + \sqrt{\frac{S'}{2} - \frac{S^2}{6}}$$

56) Demonstrar que o raio do círculo inscrito no triângulo retângulo cujos lados estão em PA, é igual à razão dessa progressão.

57) O menor ângulo de um polígono convexo é de 139° e os outros ângulos formam com o primeiro uma PA cuja razão é 2 graus. Demonstrar que o polígono possui 12 lados.

58) Provar que se $\left(\frac{1}{x+y}, \frac{1}{y+z}, \frac{1}{z+x}\right)$ é uma P.A., então (z^2, x^2, y^2) também é.

39) Provar que se $(a_1, a_2, ..., a_n)$ é P.A., com n>2, então

$$\left(a_2^2 - a_1^2, a_3^2 - a_2^2, a_4^2 - a_3^2, ... a_n^2 - a_{n-1}^2\right)$$

também é.

60) Provar que se uma P.A. apresenta $a_m = x$, $a_n = y$ e $a_p = z$, então verifica-se a relação:

$$(n - p).x + (p - m).y + (m - n).z = 0.$$

61) Demonstrar que em toda P.A. com número ímpar de termos, o termo médio é igual a diferença entre a soma dos termos de ordem ímpar e a soma dos termos de ordem par.

62) Numa PA finita de 2n elementos, a soma dos 2n – 1 primeiros é A e a dos 2n – 1 últimos é B. Demonstrar que $a_1 = [nA - (n - 1)B]/n$ e $r = (B - A)/n$.

63) Prove que se os números a, b e c formam uma progressão aritmética então os números $\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ também formam uma progressão aritmética.

64) Os números positivos $a_1, a_2, ..., a_n$ formam uma progressão aritmética. Prove que:

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}$$

65) Prove que se os números $a_1, a_2, ..., a_n$ são termos diferentes de zero e formam uma progressão aritmética então:

$$\frac{1}{a_1.a_2}+\frac{1}{a_2.a_3}+\frac{1}{a_3.a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1}a_n}=\frac{n-1}{a_1.a_n}.$$

66) Dada uma progressão aritmética a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}, ... prove que a igualdade: $a_1^2 - C_n^1 a_2^2 + C_n^2 a_3^2 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_n^2 + (-1)^n C_n^n a_{n+1}^2 = 0$ é válida para $n \geq 3$.

67) A sequência de números: 1, 4, 10, 19, ... satisfazem a condição de que a diferença de dois termos subsequentes formam uma progressão aritmética. Encontre o n-ésimo termo e a soma dos n primeiros termos dessa sequência.

68) Considere a tabela:

1
2 3 4
3 4 5 6 7
4 5 6 7 8 9 10
...

Prove que a soma dos termos em cada linha é igual ao quadrado de um número ímpar.

69) Prove que para toda progressão aritmética a_1, a_2, a_3, ..., a_n nós temos as igualdades

$$a_1 - 2a_2 + a_3 = 0,$$
$$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4 = 0,$$
$$a_1 - 4a_2 + 6a_3 - 4a_4 + a_5 = 0;$$

generalizando:

$$a_1 - C_n^1 a_2 + C_n^2 a_3 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} a_n + (-1)^n C_n^n a_{n+1} = 0$$

70) Dispõe-se de 120 bolas idênticas que devem ser empilhadas a fim de formar uma pirâmide regular triangular. Quantas bolas devem formar a base da pirâmide?

71) Dada a seguinte configuração dos números naturais:

1
2 3 4
5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16
.....

Achar a soma dos números situados na n-ésima fila.

72) Para numerar um livro são necessários N dígitos. Por exemplo, para numerar um livro de 11 páginas são necessários N = 13 dígitos. Qual dos seguintes valores não pode ser N para um certo livro?

a) 109 b) 999 c) 1992
d) 1995 e) 1996

73) Escreve-se as cifras de 1995 como segue:

199511999955111999999555...

a) Calcular quantos dígitos devem ser escritos para que a soma dos dígitos seja 2880.
b) Determine o dígito que aparece no lugar 1995

74) Iniciando com 46, se forma a sequência de dígitos colocando, em cada passo, a continuação do último número escrito, o produto dos dois últimos dígitos que se escrevem (os primeiros 5 dígitos são: 46248...). Calcular o dígito que está na posição 1996.

75) Em uma progressão aritmética $a_1 = 98$ e $a_{13} = 89$. Define-se $A = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_{n-6}$. Determine o menor valor de $|A|$ e o correspondente valor de n.

76) Dados os conjuntos de inteiros {1}, {2, 3}, {4, 5, 6}, etc. onde cada conjunto

possui um elemento a mais que o antecessor, e onde o primeiro elemento de cada conjunto é igual ao último elemento do conjunto antecessor mais 1. Seja S_n a soma dos elementos do n-ésimo conjunto. Prove que $S_{21} = 4641$.

77) A soma de cinco números inteiros em PA é 25 e o produto – 880. Demonstrar que esses números são – 1, 2, 5, 8 e 11.

78) São dados quatro números em PA cuja soma é igual a 26 e a soma dos quadrados é igual a 214. Demonstrar que os números são 2, 5, 8 e 11.

79) Calcule o último termo escrito no somatório do lado direito da igualdade na 80ª linha.

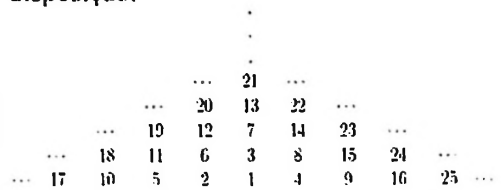
$$1 + 2 = 3$$
$$4 + 5 + 6 = 7 + 8$$
$$9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$$
$$16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

80) Os termos de uma PA somam 715. Ao 1° termo é somado 1, ao 2° termo é somado 3, ao 3° termo é somado 5 e, de forma geral, ao k° termo é somado o k° ímpar positivo. Os termos da nova sequência somam 836. Determine a soma do 1° termo, o último termo e o termo central da sequência original.

81) Calcule o valor de $S = 100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + 92^2 + \ldots + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$.

Exercícios de Olimpíada

82) (Minas Gerais-08) Considere uma configuração em forma de pirâmide cuja lei de formação obedece à seguinte disposição:



a) Qual é o número que está 40 posições acima do número 1?

b) Qual é o número que ocupa a 20ª posição na reta, seguindo a ordem 1-8-23 · · · ?

83) (Bahia-13) Calcule a soma: $-1 + 2 - 3 + 4 - \ldots - 97 + 98 - 99 + 100$.

84) (Ceará-83) Seja n um número inteiro positivo:

a) Expresse $\frac{1}{n(n+1)}$ como uma soma algébrica de duas frações;

b) Calcule a soma:

$$S = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \ldots + \frac{1}{n.(n+1)}.$$

85) (Distrito Federal-18) Maricota está brincando com blocos de madeira durante o intervalo da aula de matemática e propõe um desafio aos seus amigos com as sequências de blocos que está inventando, observe a figura abaixo. Maricota chamou seu amigo Pedro e o desafiou a descobrir o número de blocos que usará nas próximas construções de sua sequência.

a) Quantos blocos Maricota usará na quinta construção?

b) Se ela dispõe de uma quantidade infinita de blocos, quantos blocos ela usará na centésima construção?
c) Pedro, agora desafia sua amiga: Maricota se você fizer 2018 construções com esse padrão, a quantidade total de blocos usados nessas construções será um número par ou ímpar? Ajude Maricota e dê a resposta a Pedro. Justifique sua resposta.

86) (Grande PoA-19) Determine o valor de x na igualdade:

$$2 + 5 + 8 + ... + x = 155.$$

87) (Goiás-04) O símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ representa a soma $a_1 + a_2 + ... + a_n$ Por exemplo

$$\sum_{k=1}^{5} k = 1+2+3+4+5,$$

$$\sum_{k=1}^{n} a = \underbrace{a+a+...+a}_{n \text{ vezes}} = na$$

a) Mostre que $\sum_{k=1}^{n}(k-1)k = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$.
b) Defina uma sequência de números pela seguinte fórmula $h_n = 1 + 3n(n-1)$, $n \geq 1$. Por exemplo: $h_1 = 1$, $h_2 = 7$ e $h_3 = 19$. Calcule a soma $S_n = h_1 + h_2 + \cdots + h_n$, para n = 1, 2, 3, 4 e 5.
c) Use os dados numéricos obtidos no item b) para intuir a fórmula da soma S_n.
d) Prove a fórmula encontrada no item c).

88) (Grande PoA-15) Expressar como uma fração ordinária irredutível o valor da diferença a – b, sabendo que

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + ... + \frac{50^2}{99},$$

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + ... + \frac{50^2}{101}.$$

89) (Grande PoA-12) a) Achar todos os inteiros positivos p e q, tais que $\frac{1}{\sqrt{p}+\sqrt{q}} = \sqrt{p} - \sqrt{q}$.
b) Achar o menor inteiro positivo n, tal que

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \geq 100$$

90) (Rio de Janeiro-07) Seja A um conjunto de 2007 números inteiros positivos consecutivos, cujo menor elemento é a. Determine o menor valor de a para o qual a soma dos elementos de A é um quadrado perfeito par.

91) (Rio de Janeiro-01) Considere o triângulo:

1
3 5
7 9 11
13 15 17 19
21 23 25 27 29
.....

Ache o primeiro elemento da linha 2001, e determine quantos elementos tem essa linha.

92) (OBM-13) O triângulo aritmético de Fibonacci é formado pelos números ímpares inteiros positivos a partir do 1 dispostos em linhas com ordem crescente em cada linha e pulando para a linha seguinte. A linha *n* possui exatamente *n* números. Veja as quatro primeiras linhas.

Linha 1: 1
Linha 2: 3 5
Linha 3: 7 9 11
Linha 4: 13 15 17 19
...

Em qual linha aparecerá o 2013?
a) 45 b) 46 c) 62 d) 63 e) 64

93) (Rio Grande do Norte-19) Sabendo-se que para todo número natural n, tem-se:

$$1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2};$$

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

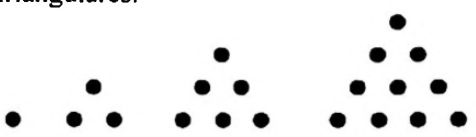
$$1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

O maior número primo que divide o número 1.2.3 + 2.3.4 + ... + 44.45.46 é:
a) 17 b) 31 c) 47 d) 61 e) 73

94) (Ceará-98) Seja $S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots - 1998^2 + 1999^2$. Expresse S como a soma de 1000 números ímpares, todos eles termos de uma progressão aritmética.

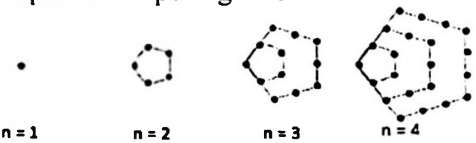
95) (Rio Grande do Norte-19) As somas a seguir possuem a mesma quantidade de parcelas:
$S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + ...$
$S_2 = 100 + 99 + 98 + 97 + ...$
Se $S_1 = S_2$, podemos afirmar que a quantidade de parcelas em cada soma é:
a) 54 b) 72 c) 67 d) 100 e) 50

96) (Goiás-14) Os números 1, 3, 6, 10, 15, ..., chamam-se números triangulares e correspondem ao número de pontos igualmente espaçados e arranjados geometricamente em triângulos equiláteros, como na figura a seguir, que representa os quatro primeiros números triangulares.



(a) Qual é o número triangular mais próximo de 2014?
(b) Denotando por T_n o n-ésimo número triangular determine, em função de n, o valor de $T_n^2 - T_{n-1}^2$, para $n \geq 2$ e utilize este resultado para obter a soma dos cubos dos números naturais até n, ou seja, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$, em função de n.

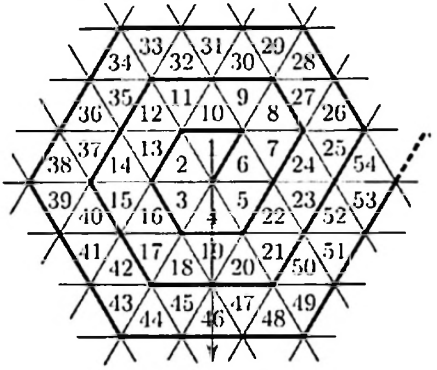
97) (Paraná-17) "Números pentagonais", P(n), são números que são dados pelas quantidades de bolinhas na seguinte sequência de pentágonos



Os quatro primeiros números pentagonais são P(1) = 1, P(2) = 5, P(3) = 12 e P(4) = 22.
Faça o que se pede:
a) Encontre P(2018) − P(2017)
b) Calcule P(100).
c) "Números triangulares" são números da forma $T(m) = \frac{1}{2}m(m+1)$ onde m é um inteiro positivo. Mostre que todo número pentagonal é um terço de um número triangular.

98) (Pernambuco-16) Considere a sequência (1; 4; 19; 46; :::) indicada na

figura abaixo. Encontre o décimo termo dessa sequência.



99) (Ceará-90) Determine o algarismo final do número $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$, sabendo-se que o último algarismo de $S' = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$ é igual a 1.

100) (Canadá-70) Seja f(n) a soma dos primeiros n termos da sequência 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 6, 6, ...
a) Dê uma formula para f(n).
b) Prove que $f(s + t) - f(s - t) = st$ onde s e t são inteiros positivos e $s > t$.

101) (OBM-85) a) Sejam a, b, c, d inteiros tais que $ad \neq bc$. Demonstre que é sempre possível escrever $\dfrac{1}{(ax+b)(cx+d)}$ sob a forma $\dfrac{r}{ax+b}+\dfrac{s}{cx+d}$.
b) Encontre a soma:
$$\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{2998.3001}.$$

102) (Espanha-97) Calcular a soma dos quadrados dos cem primeiros termos de uma progressão aritmética, sabendo que a soma deles vale – 1, e que a soma dos termos de lugar par vale + 1.

103) (Holanda-85) Anita calcula a soma dos quadrados dos primeiros N inteiros positivos, e Bernadette fez o mesmo para os seguintes N inteiros. A diferença das duas somas é 28224. Calcule N.

104) (Rio Grande do Norte-18) Arruma-se uma coleção de 2016 bolas em linhas formando um triângulo, com uma bola na primeira linha, duas bolas na segunda, três bolas na terceira, etc. Removem-se todas as linhas com um número par de bolas. Ao final, podemos afirmar que a quantidade de bolas restantes é:
(a) 2018 (b) 2048 (c) 512
(d) 1024 (e) 256

105) (Rio Grande do Norte-17) Numa progressão aritmética $\{a_n\}$, com $a_1 > 0$, temos que $3a_8 = 5a_{13}$. Chamamos de S_n a soma dos primeiros n termos da progressão. O valor de n para o qual a soma S_n seja máxima é:
(a) 10 (b) 11 (c) 20 (d) 24 (e) 32

106) (AIME-03) Cem círculos concêntricos com raios 1, 2, 3, ..., 100 são desenhados em um plano. O interior do círculo de raio 1 é colorido de vermelho e cada uma das regiões consecutivas é colorida de vermelho ou verde, não existindo regiões adjacentes da mesma cor. Calcule a razão entre a área total das regiões verdes e a área do círculo.

107) (USAMO-73) Mostre que as raízes cúbicas de três distintos números primos não podem ser termos (não necessariamente consecutivos) de uma progressão aritmética.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

3.1. DEFINIÇÃO

Uma sequência geométrica ou Progressão Geométrica (PG) é uma sequência em que cada termo é igual ao termo antecessor multiplicado por uma constante. Por exemplo, os quatro números 2, 6, 18, 54, nesta ordem, formam uma progressão geométrica, pois cada termo, a partir do segundo, é igual ao termo anterior multiplicado por 3. Desta maneira, podemos definir PG como sendo uma sequência em que a razão de dois elementos consecutivos é uma constante: $\frac{A_n}{A_{n-1}}$ = constante, $A_{n-1} \neq 0$, $n \geq 2$. O nome desta constante é razão da progressão geométrica. Portanto, se os números A_1, A_2, A_3, ... formam uma PG (com $A_i \neq 0$, $i \geq 1$), então temos que $q = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \frac{A_4}{A_3} = \ldots$

Perceba que, ao contrário do caso da progressão aritmética, na PG a expressão "**razão da sequência**" possui o mesmo significado tradicional de razão na matemática em geral, que é da divisão entre duas grandezas, no caso de dois termos consecutivos da PG.

Uma sequência em que todos os termos sejam iguais (sequência constante) pode ser interpretada como uma PG de razão 1. Por outro lado, uma sequência com todos os termos iguais a 0 pode ser interpretada como uma PG de 1º termo igual a 0. Analogamente, uma sequência em que, com exceção do 1º termo os demais sejam iguais a 0 pode ser interpretada como uma PG de razão igual a 0.

Se a razão q de uma PG é tal que $q > 1$ e seu primeiro termo A_1 é tal que $A_1 > 0$ então esta sequência é chamada de PG crescente, pois $A_n > A_{n-1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. Outro caso de PG crescente ocorre quando $0 < q < 1$ e $A_1 < 0$. Se a razão q de uma PG é tal que $0 < q < 1$ e seu primeiro termo A_1 é tal que $A_1 > 0$ então esta sequência é chamada de PG decrescente, pois $A_n < A_{n-1}$. Outra situação de PG decrescente ocorre quando $A_1 < 0$ e $0 < q < 1$. Se a razão q de uma PG é tal que $q < 0$ e $A_1 \neq 0$ então esta sequência é chamada de PG alternante, pois dois termos consecutivos possuem sinais contrários ($A_k . A_{k+1} < 0$).

Em resumo:

i) PG constante: ocorre quando $A_1 = 0$ ou $q = 1$
ii) PG crescente: ocorre quando $A_1 > 0$ e $q > 1$ ou quando $A_1 < 0$ e $0 < q < 1$
iii) PG decrescente: ocorre quando $A_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou quando $A_1 < 0$ e $q > 1$
iv) PG alternante: ocorre quando $A_1 \neq 0$ e $q < 0$

3.2. TERMO GERAL

Observe as seguintes relações entre os termos de uma PG:

$A_2 = A_1.q$; $A_3 = A_2.q = A_1.q^2$; $A_4 = A_3.q = A_2.q^3$; $A_5 = A_4.q = A_1.q^4$; ...

Observando os primeiros termos pode-se conjecturar que $A_n = A_1.q^{n-1}$. Este resultado será demonstrado por indução matemática. Perceba que a proposição é válida para n = 1. Suponha que exista $k \in IN^*$ tal que $a_k = A_1.q^{k-1}$. Assim:

$A_{k+1} = A_k.q = A_1.q^{k-1}.q \Rightarrow A_{k+1} = A_1.q^k$

Desta forma, segue, por indução finita, que o termo geral de uma PA é:

$$A_n = A_1.q^{n-1}$$

Por exemplo, a sequência (A_n) dada por (1, 2, 4, 8, 16, ...), possui 1º termo igual a 1 e razão igual a 2, implicando que seu termo geral seja dado por $A_n = 2^{n-1}$.

Pode-se escrever o termo geral de uma PG em função de qualquer termo, além de A_1, e da razão. Como $A_n = A_1.q^{n-1}$ e $A_k = A_1.q^{k-1} (k \geq 1)$, escrevendo A_n em função de A_k e de q obtém-se:

$$A_n = A_k.q^{n-k}$$

Deste modo, uma PG cujo termo geral seja igual a $A_n = A_1.q^{n-1}$, também pode ser escrita da forma $A_n = A_4.q^{n-4}$. Assim, podemos afirmar que $A_{51} = A_{20}.q^{31}$ e que $A_{11} = A_7.q^4$.

Em alguns livros de língua inglesa trabalha-se com o primeiro termo da sequência sendo igual a A_0. Neste caso, o termo geral da PG passa a ser $A_n = A_0.q^n$, onde A_1 agora é o segundo termo da PG, A_2 é o terceiro termo, A_3 é o quarto termo e assim por diante. Particularmente, o autor desse livro não adota tal prática. Quando o primeiro termo é A_0 há uma confusão muito grande com a ordem de cada termo, como citado anteriormente.

Exercícios Resolvidos

1) (UECE-14) Sendo os números $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{7}$, $\sqrt[6]{7}$ termos consecutivos de uma progressão geométrica, o termo seguinte desta progressão é

a) 1 b) $\sqrt[7]{7}$ c) $\sqrt[9]{7}$ d) $\sqrt[12]{7}$

Solução: Alternativa A

A razão de uma PG é a divisão entre termos consecutivos:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \frac{7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = 7^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{-\frac{1}{6}}$$

Assim: $a_4 = a_3 q = 7^{\frac{1}{6}}.7^{-\frac{1}{6}} = 7^0 = 1$

2) (PUC/SP-00) Considere uma progressão geométrica crescente, cujo primeiro termo é diferente de zero, e uma progressão aritmética decrescente cujo primeiro termo é zero. Somando-se os termos correspondentes das duas progressões, obtém-se a sequência $(2, 1, 2, a_4, a_5, \ldots)$. A diferença $a_5 - a_4$ é igual a

a) 13 b) 15 c) 18 d) 20 e) 22

Solução: Alternativa A

Suponha que a PG dada é por $(a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, a_1q^4, \ldots)$, com $q > 1$, e a PA é dada por $(0, -r, -2r, -3r, -4r, \ldots)$, com $r > 0$. Portanto, temos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_1q - r = 1 \\ a_1q^2 - 2r = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q - r = 1 \\ 2q^2 - 2r = 2 \end{cases} \Rightarrow 2q^2 - 4q = 0 \Rightarrow q(q-2) = 0 \Rightarrow$$

$q = 0$ ou $q = 2$.

Como $a_1 = 2$ e a PG é crescente devemos ter $q = 2 \Rightarrow r = 3$.

Assim: $a_4 = a_1q^3 - 3r = 16 - 9 = 7$ e $a_5 = a_1q^4 - 4r = 32 - 12 = 20$.

Logo: $a_5 - a_4 = 20 - 7 = 13$.

3) (UENP-17) Na entrada de um festival, foi entregue um folheto com informações sobre alguns cuidados quanto à higiene para dificultar o proliferamento de bactérias. Entre outras informações, estava escrito: As bactérias reproduzem-se, redominantemente, por um processo no qual uma bactéria duplica o seu material genético e se divide em duas bactérias idênticas à original. Considere que, nesse instante, uma bactéria se dividiu em duas e que, de agora em diante, cada bactéria existente se divide em duas outras bactérias de 20 em 20 minutos. Ou seja, daqui a 40 minutos teremos oito bactérias. De acordo com essas informações, assinale a alternativa que apresenta, corretamente, o número de bactérias, decorridas 5 horas, desde o instante inicial.

a) 2×6 b) 2×16 c) 2^6 d) 2^{15} e) 2^{16}

Solução: Alternativa E

Segundo o enunciado, a quantidade de bactérias sobra a cada 20 minutos, ou seja, é possível formar uma PG, de razão 2 e termo inicial $a_0 = 2$, com o número de bactérias a cada 20 minutos: $a_n = a_0.q_n = 2.2^n = 2^{n+1}$.

Em 5 horas tem-se $5.60 = 300$ minutos, ou seja, há $n = 300/20 = 15$ ciclos completos de 20 minutos. Deste modo, segue que $a_{15} = 2^{15+1} = 2^{16}$.

4) (Fuvest-01) Uma progressão aritmética e uma progressão geométrica têm, ambas, o primeiro termo igual a 4, sendo que os seus terceiros termos são estritamente positivos e coincidem. Sabe-se ainda que o segundo termo da progressão aritmética excede o segundo termo da progressão geométrica em 2. Então, o terceiro termo das progressões é:

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

Solução: Alternativa E

Podemos organizar as duas progressões das seguintes maneiras:
PA: $(4, 4 + r, 4 + 2r)$ e PG: $(4, 4q, 4q^2)$

Pelo enunciado: $\begin{cases} 4 + 2r = 4q^2 \\ 4 + r - 4q = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2q^2 - r = 2 \\ 4q - r = 2 \end{cases} \Rightarrow 2q^2 - 4q = 2q(q-2) = 0 \Rightarrow$

$q = 0$ ou $q = 2$.
Uma vez que os termos são estritamente positivos, convém apenas $q = 2$.
Consequentemente, o terceiro termo da PG (e da PA) é $4q^2 = 18$.

5) (Fuvest-05) Uma sequência de números reais a_1, a_2, a_3, ... satisfaz à lei de formação:
$a_{n+1} = 6a_n$, se n é ímpar
$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$, se n é par.
Sabendo-se que $a_1 = \sqrt{2}$
a) escreva os oito primeiros termos da sequência.
b) determine a_{37} e a_{38}.
Solução:
a) $a_1 = \sqrt{2}$; $a_2 = 6\sqrt{2}$; $a_3 = 2\sqrt{2}$; $a_4 = 12\sqrt{2}$; $a_5 = 4\sqrt{2}$; $a_6 = 24\sqrt{2}$; $a_7 = 8\sqrt{2}$; $a_8 = 48\sqrt{2}$.
b) Podemos observar que os termos de ordem ímpar formam uma PG de primeiro termo $\sqrt{2}$ e razão 2. Seja (b_n) a sequência dos termos de ordem ímpar da sequência (a_n), ou seja, $b_n = a_{2n-1}$. O termo geral de (b_n) é dado por:

$b_n = b_1.q^{n-1} = \sqrt{2}.2^{n-1} = 2^{\frac{1}{2}}.2^{n-1} = 2^{n-\frac{1}{2}}$.

Quando $2n - 1 = 37$ temos $n = 19$, portanto $a_{37} = b_{19} = 2^{19-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{37}{2}}$.

Desde que $a_{38} = 6a_{37} \Rightarrow a_{38} = 6.2^{\frac{37}{2}} = 3.2^{\frac{39}{2}}$.

6) (Epcar-05) Em uma sequência de 10 números, a_1, a_2, ..., a_9, a_{10}, os sete primeiros termos estão em progressão aritmética de primeiro termo 1, os três últimos termos estão em progressão geométrica, cujo primeiro termo é 7. Sabendo-se que $a_7 = a_8$ e $a_6 = a_9$, a soma dos termos dessa sequência é um número entre
a) 45 e 46 b) 46 e 47 c) 47 e 48 d) 48 e 49
Solução: Alternativa B
Seja r a razão da PA e q a razão da PG. Assim, as progressões são dadas por:
PA: $(1, 1 + r, 1 + 2r, 1 + 3r, 1 + 4r, 1 + 5r, 1 + 6r)$ e PG: $(7, 7q, 7q^2)$
- $a_7 = a_8 \Rightarrow 1 + 6r = 7 \Rightarrow r = 1$.
- $a_6 = a_9 \Rightarrow 1 + 5r = 7q \Rightarrow 6 = 7q \Rightarrow q = 6/7$.

Logo: $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 7 + 6 + 36/7 \Rightarrow S \cong 46{,}14 \Rightarrow 46 \leq S \leq 47$.

7) (ITA-99) O conjunto de todos os números reais $q > 1$, para os quais a_1, a_2 e a_3, formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão q e representam as medidas dos lados de um triângulo, é:

a) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$ b) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]$ c) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}}]$ d) $]1, \frac{1+\sqrt{5}}{4}[$ e) $]1, 1+\sqrt{5}[$

Solução: Alternativa A

Como a_1, a_2, a_3 formam uma PG crescente, então para que estes valores possam representar os lados de um triângulo basta que o maior dos lados (a_3) seja menor que a soma dos outros dois lados ($a_1 + a_2$):

$$a_3 < a_1 + a_2 \Rightarrow a_1q^2 < a_1 + a_1q \overset{a_1>0}{\Rightarrow} q^2 < 1 + q \Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Entretanto, como $q > 1$, a desigualdade que define q é dada por: $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

8) (ITA-91) Numa progressão geométrica de razão q, sabe-se que:

I- o produto do logaritmo natural do primeiro termo a_1 pelo logaritmo natural da razão é 24.

II- a soma do logaritmo natural do segundo termo com o logaritmo natural do terceiro termo é 26.

Se ln q é um número inteiro então o termo geral a_n vale:

a) e^{6n-2} b) 4^{4+6n} c) e^{24n} d) e^{4-6n} e) nda

Notação: ln q denota o logaritmo natural (ou neperiano) de q

Solução: Alternativa A

De acordo com o enunciado:

$\ln a_2 + \ln a_3 = 26 \Rightarrow \ln(a_1.q) + \ln(a_1.q^2) = 26 \Rightarrow$

$\ln a_1 + \ln q + \ln a_1 + 2.\ln q = 26 \Rightarrow 2.\ln a_1 + 3.\ln q = 26$

Como $(\ln a_1)(\ln q) = 24 \Rightarrow 2.\ln a_1 + \frac{72}{\ln a_1} = 26 \Rightarrow (\ln a_1)^2 - 13.\ln a_1 + 36 = 0 \Rightarrow$

$[(\ln a_1) - 4][(\ln a_1) - 9] = 0 \Rightarrow \ln a_1 = 4$ ou $\ln a_1 = 9 \Rightarrow a_1 = e^4$ ou $a_1 = e^9$.

Se $a_1 = e^4 \Rightarrow \ln q = \frac{24}{\ln e^4} = \frac{24}{4} = 6 \Rightarrow q = e^6$.

Se $a_1 = e^9 \Rightarrow \ln q = \frac{24}{\ln e^9} = \frac{24}{9} = \frac{8}{3}$ que não convém, pois não é inteiro.

Deste modo, $a_n = a_1.q^{n-1} = e^4.(e^6)^{n-1} = e^{6n-2}$.

9) (ITA-90) Numa progressão geométrica de três termos a razão é e^{-2a}, a soma dos termos é 7 enquanto que a diferença do último termo com o primeiro é 3. Nestas condições o valor de a é:

a) $\ln\sqrt{2}$ b) $-\ln\frac{5}{2}$ c) $\ln\sqrt{3}$

d) $-\ln\sqrt{2}$ e) não existe número real a nestas condições

Solução: Alternativa D

Podemos caracterizar a PG da seguinte forma: $(k, k.e^{-2a}, k.e^{-4a})$.

De acordo com o enunciado:

i) $k + k.e^{-2a} + k.e^{-4a} = 7 \Rightarrow k(1 + e^{-2a} + e^{-4a}) = 7$ (1)

ii) $k.e^{-4a} - k = 3 \Rightarrow k(e^{-4a} - 1) = 3$ (2)

Dividindo as equações (1) e (2): $\frac{1+e^{-2a}+e^{-4a}}{e^{-4a}-1} = \frac{7}{3} \Rightarrow$

$3 + 3.e^{-2a} + 3.e^{-4a} = 7.e^{-4a} - 7 \Rightarrow 4.e^{-4a} - 3.e^{-2a} - 10 = 0 \Rightarrow$

$(4.e^{-2a} + 5)(e^{-2a} - 2) = 0 \Rightarrow e^{-2a} = -5/4$ ou $e^{-2a} = 2$.

Como $e^{-2a} > 0$ então a única possibilidade é $e^{-2a} = 2 \Rightarrow -2a = \ln 2 \Rightarrow$

$a = -\ln(2)^{1/2} = -\ln\sqrt{2}$.

10) (Escola Naval-01) Considere uma progressão geométrica de razão maior do que 1 em que três de seus termos consecutivos representam as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Se o primeiro termo dessa progressão geométrica é 64, então seu décimo terceiro termo vale:

a) $2\left(1+\sqrt{3}\right)^6$ b) $\left(1+\sqrt{3}\right)^{12}$ c) $\left(1+\sqrt{5}\right)^6$ d) $\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{12}}{2}$

Solução: Alternativa C

Sejam $A_k = A_1.q^{k-1}$, $A_{k+1} = A_1.q^k$ e $A_{k+2} = A_1.q^{k+1}$ os três termos consecutivos da PG que representam os três lados de um triângulo retângulo.

Como $q > 1$, pelo Teorema de Pitágoras:

$(A_{k+2})^2 = (A_{k+1})^2 + (A_k)^2 \Rightarrow (A_1.q^{k+1})^2 = (A_1.q^k)^2 + (A_1.q^{k-1})^2 \Rightarrow$

$A_1^2 q^{2k+2} = A_1^2 q^{2k} + A_1^2 q^{2k-2}$

Dividindo os dois lados da última expressão por $A_1^2 q^{2k-2}$ obtemos:

$q^4 = q^2 + 1 \Rightarrow q^4 - q^2 - 1 = 0 \Rightarrow q^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Como $q > 1$ temos que $q = \sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Portanto: $A_{13} = A_1.q^{12} = 64.\left(\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)^{12} = (1+\sqrt{5})^6$.

3.3. PROPRIEDADES

1) Se i, j e k são índices de termos de uma PG (A_n), com $q \neq 0$, $|q| \neq 1$ e $A_1 \neq 0$, então $i + k = 2j$ se e somente se $A_i.A_k = (A_j)^2$.
Demonstração:

$A_i.A_k = (A_j)^2 \Leftrightarrow (A_1.q^{i-1})(A_1.q^{k-1}) = (A_1.q^{j-1})^2 \Rightarrow A_1^2 q^{i+k-2} = A_1^2 q^{2j-2} \overset{A_1 \neq 0}{\Leftrightarrow}$

$q^{i+k-2} = q^{2j-2} \overset{q \neq 0, |q| \neq 1}{\Leftrightarrow} i + k - 2 = 2j - 2 \Leftrightarrow i + k = 2j.$

Por exemplo, em uma PG $\{A_n\}$ com muitos termos pode-se afirmar que $A_3.A_7 = A_5^2$, $A_9.A_{17} = A_{13}^2$, $A_{24}.A_{76} = A_{50}^2$ e $A_{112}.A_{256} = A_{184}^2$.

2) Se i, j, k e m são índices de termos de uma PG (A_n), com $q \neq 0$, $|q| \neq 1$ e $A_1 \neq 0$, então temos que $i + m = j + k$ se e somente se $A_i.A_m = A_j.A_k$.
Demonstração:

$A_i.A_m = A_j.A_k \Leftrightarrow (A_1.q^{i-1})(A_1.q^{m-1}) = (A_1.q^{j-1})(A_1.q^{k-1}) \Rightarrow$

$A_1^2 q^{i+m-2} = A_1^2 q^{j+k-2} \overset{A_1 \neq 0}{\Leftrightarrow} q^{i+m-2} = q^{j+k-2} \overset{q \neq 0, |q| \neq 1}{\Leftrightarrow} i + m - 2 = j + k - 2 \Leftrightarrow$

$i + m = j + k.$

Por exemplo, em uma PG $\{A_n\}$ com muitos termos pode-se afirmar que $A_3.A_7 = A_2.A_8$, $A_9.A_{17} = A_{10}.A_{16}$, $A_{24}.A_{76} = A_{39}.A_{61}$ e $A_{112}.A_{256} = A_{170}.A_{198}$.

3) Os números x, y e z não-nulos estão em PG se e somente se $y^2 = x.z$.
Demonstração:

Note que $y^2 = x.z \overset{x,y,z \neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = q \Leftrightarrow y = x.q$ e $z = y.q = x.q^2$.

Desde que os números x, xq e xq^2 formam uma PG, então x, y e z estão em PG. Observe, porém, que não necessariamente x, y e z devem ser termos consecutivos de uma PG, já que os números 1, 2, 4, 8, 16 formam uma PG e, por mais que $(1)(16) = (4)^2$, nesta PG os termos 1, 4 e 16 não são consecutivos.

4) Se (a, b, c, d) estão em PG, nesta ordem, então ad = bc.
Demonstração:

Se (a, b, c, d) é uma PG de razão q, segue que $b = aq$, $c = aq^2$ e $d = aq^3$.
Assim: $ad = a^2q^3$ e $bc = aq.aq^2 = a^2q^3$, ou seja, $ad = bc$

Obs: Perceba que a condição ad = bc é apenas necessária, mas não suficiente para que (a, b, c, d) seja uma PG. Por exemplo, tem-se que $1.4 = 2.2$, entretanto (1, 2, 2, 4) não formam uma PG.

Observação: A partir das propriedades, é possível escrever todos os termos de uma PG simetricamente em relação aos seus extremos, de forma que o produto dos termos seja independente da razão q, de acordo com o número de termos da progressão:

3 termos: $\left(\frac{a}{q}, a, aq\right)$

4 termos: $\left(\frac{a}{q^{3/2}}, \frac{a}{q^{1/2}}, aq^{1/2}, aq^{3/2}\right)$

5 termos: $\left(\frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2\right)$

6 termos: $\left(\frac{a}{q^{5/2}}, \frac{a}{q^{3/2}}, \frac{a}{q^{1/2}}, aq^{1/2}, aq^{3/2}, aq^{5/2}\right)$

7 termos: $\left(\frac{a}{q^3}, \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2, aq^3\right)$

8 termos: $\left(\frac{a}{q^{7/2}}, \frac{a}{q^{5/2}}, \frac{a}{q^{3/2}}, \frac{a}{q^{1/2}}, aq^{1/2}, aq^{3/2}, aq^{5/2}, aq^{7/2}\right)$

9 termos: $\left(\frac{a}{q^4}, \frac{a}{q^3}, \frac{a}{q^2}, \frac{a}{q}, a, aq, aq^2, aq^3, aq^4\right)$

...

e assim por diante.

3.3.1. Condições para que Números Formem uma PG

3.3.1.1. Três Números

De acordo com a propriedade 3 da PG, para que (a, b, c) formem uma PG, nesta ordem, é necessário é suficiente que $\mathbf{ac = b^2}$.

3.3.1.2. Quatro Números

De acordo com a propriedade 4 de PG, ad = bc é apenas uma condição necessária, porém não suficiente, para que (a, b, c, d) formem uma PG, nesta ordem. Mas então quais as condições suficientes? Simples, basta separar os quatro números em dois ternos (a, b, c) e (b, c, d) e aplicar a condição de PG para os dois ternos. Assim, (a, b, c, d) formam uma PG, nesta ordem, se e somente se as duas condições seguintes são satisfeitas: $\mathbf{ac = b^2}$ e $\mathbf{bd = c^2}$.

3.3.1.3. Cinco Números

De forma análoga ao caso anterior, de modo que (a, b, c, d, e) formem, nesta ordem, uma PG, deve-se aplicar o critério de PG para os termos (a, b, c), (b, c, d) e (c, d, e). Assim, (a, b, c, d, e) estão, nesta ordem, em PG se e somente se as três condições seguintes são satisfeitas: $\mathbf{ac = b^2}$, $\mathbf{b\,d = c^2}$ e $\mathbf{ce = d^2}$.

3.3.1.4. Uma Quantidade Qualquer de Números

Generalizando o resultado anterior, pode-se afirmar que $(a_1, a_2, ..., a_n)$ formam uma PG, nesta ordem, se e somente se todas as condições abaixo forem válidas:

$$a_1a_3 = a_2^2,\ a_2a_4 = a_3^2,\ ...\ \text{e}\ a_{n-2}a_n = a_{n-1}^2.$$

3.4. INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

Interpolação Geométrica ou Inserção de Meios Geométricos consiste em determinar quais números, em uma certa quantidade n fornecida, devem ser inseridos entre dois números dados de modo que estes n + 2 números formem uma progressão geométrica. Por exemplo, se desejamos inserir 3 meios geométricos reais entre 2 e 162, então estes 5 números (2, A_2, A_3, A_4, 162) devem formar uma PG. Neste caso, temos que $A_5 = A_1.q^4$, ou seja, $162 = 2.q^4$, onde obtemos $q = \pm 3$. Assim, existem duas possibilidades para os meios geométricos:

$$A_2 = 6,\ A_3 = 18 \text{ e } A_4 = 54 \text{ ou } A_2 = -6,\ A_3 = 18 \text{ e } A_4 = -54.$$

Observação: Na interpolação geométrica é importante observar em qual campo devem ser determinados os meios geométricos. No exemplo apresentado acima, para determinar a razão q da PG foi necessário resolver a equação $q^4 = 81$, que possui duas raízes no campo dos números reais, porém apresenta quatro raízes no campo dos números complexos. Normalmente as questões de vestibular evitam trabalhar com PGs de números complexos, mas nada impede que uma sequência de números complexos esteja em progressão geométrica.

Exercícios Resolvidos

1) (FGV-19) Existem dois valores distintos para a média aritmética dos números reais representados por F, G e V, de maneira que a sequência (–3, F, G, V, –768) seja geométrica. A soma desses valores é igual a

a) 52. b) – 32. c) – 48. d) – 52. e) – 84.

Solução: Alternativa B

Determinar F, G e V é equivalente a inserir três meios geométricos entre – 3 e – 768:

$A_5 = A_1.q^4 \Rightarrow -768 = (-3)q^4 \Rightarrow q^4 = 256 \Rightarrow q = 4$ ou $q = -4$

i) se q = 4 segue que F = – 12, G = – 48 e V = – 192

A média desses valores vale (– 12 – 48 – 192)/3 = – 84

ii) se q = – 4 segue que F = 12, G = – 48 e V = 192

A média desses valores vale (12 – 48 + 192)/3 = 52

A soma dessas duas médias é igual a – 84 + 52 = – 32

2) (AFA-00) Seja (x, y, z, w) uma progressão aritmética crescente cuja soma é 10 e (a, b, c, d) uma progressão geométrica com a + b = 1 e c + d = 9. Se ambas têm a mesma razão, então o produto yw é

a) – 8 b) – 2 c) 7 d) 9

Solução: Alternativa C

Se (a, b, c, d) é uma PG então $b = aq$, $c = aq^2$ e $d = aq^3$. Assim:

$a + b = 1$ e $c + d = 9 \Rightarrow a + aq = 1$ e $aq^2 + aq^3 = 9 \Rightarrow$

$a(1 + q) = 1$ e $aq^2(1 + q) = 9 \Rightarrow q^2 = 9 \Rightarrow q = 3$ (uma vez que $q > 0$).

Como a soma dos termos da PA é 10:

$x + (x + 3) + (x + 6) + (x + 9) = 10 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -2$.

Portanto: $yw = (x + 3)(x + 9) = 1.7 = 7$.

3) (FGV-20) As idades de três irmãos (a, b, c) formam uma progressão aritmética crescente. Se o irmão mais novo tivesse 1 ano a mais, ou se o irmão mais velho tivesse dois anos a mais, as suas idades estariam em progressão geométrica nessa ordem. Quais são as idades dos três irmãos?

Solução:

Segundo os dados do texto base, segue que (a, b, c) é uma PA e as duas sequências (a + 1, b, c) e (a, b, c + 2) são PGs. Pelas condições de PA e PG tem-se que:

i) $2b = a + c$ (1)

ii) $b^2 = (a + 1)c \Rightarrow b^2 = ac + c$ (2)

iii) $b^2 = a(c + 2) \Rightarrow b^2 = ac + 2a$ (3)

De (2) e (3) conclui-se: $c = 2a$ (4)

De (1) e (4): $2b = 3a$ (5)

Substituindo (4) e (5) em (2): $\left(\frac{3a}{2}\right)^2 = a.2a + 2a \Rightarrow \frac{9a^2}{4} = 2a^2 + 2a \Rightarrow$

$\frac{9a^2}{4} - 2a^2 = 2a \Rightarrow \frac{a^2}{4} = 2a \overset{a \neq 0}{\Rightarrow} a = 8 \Rightarrow b = 12$ e $c = 16$

As idades dos irmãos são 8 anos, 12 anos e 16 anos.

4) (EspCEx-02) Os números a, b e c determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r ($r \neq 0$). Na ordem b, a, c determinam uma progressão geométrica (PG). Então a razão da PG é:

a) – 3 b) – 2 c) – 1 d) 1 c) 2

Solução: Alternativa B

Se b, a, c é uma PG então $b.c = a^2$.

Se a, b, c é uma PA então $a + c = 2b \Rightarrow a = 2b - c \Rightarrow (a)^2 = (2b - c)^2 \Rightarrow$

$a^2 = 4b^2 - 4bc + c^2 \Rightarrow bc = 4b^2 - 4bc + c^2 \Rightarrow c^2 - 5bc + 4b^2 = 0 \Rightarrow$

$(c - 4b)(c - b) = 0 \overset{r \neq 0}{\Rightarrow} c = 4b \Rightarrow q^2 = 4 \Rightarrow q = \pm 2$

Se $q = 2 \Rightarrow a = 2b$ e $c = 4b \Rightarrow a + c = 6b = 2b \Rightarrow a = b = c = 0$ (não convém)

Assim, a única possibilidade é $q = -2$, que concorda com a relação $a + c = 2b$, uma vez que $a = -2b$ e $c = 4b$.

5) (IME-16) Os inteiros $a_1, a_2, a_3, ..., a_{25}$ estão em PA com razão não nula. Os termos a_1, a_2 e a_{10} estão em PG, assim como a_6, a_j e a_{25}. Determine j.

Solução:

Como a_1, a_2 e a_{10} estão em PG: $a_2^2 = a_1a_{10} \Rightarrow (a_1 + r)^2 = a_1(a_1 + 9r) \Rightarrow$
$a_1^2 + 2a_1r + r^2 = a_1^2 + 9a_1r \Rightarrow 7a_1r = r^2$
Como $r \neq 0$ segue que $r = 7a_1$
Desde que a_6, a_j e a_{25} estão em PG:
$a_j^2 = a_6a_{25} \Rightarrow [a_1 + (j-1)r]^2 = (a_1 + 5r)(a_1 + 24r) \Rightarrow$
$[a_1 + 7(j-1)a_1]^2 = (a_1 + 5.7.a_1)(a_1 + 24.7.a_1) \Rightarrow [a_1(7j-6)]^2 = 36a_1.169a_1 \Rightarrow$
$(7j-6)^2 = 78^2 \Rightarrow 7j - 6 = 78 \Rightarrow j = 12$

6) (IME-91) Determine quatro números reais a, b, c, d sabendo que:
1º) a, c, d estão em progressão aritmética.
2º) a, b, d estão em progressão geométrica.
3º) $a + c + d = 39$ e $abd = 1728$.

Solução:

Se a, c, d é uma PA então $2c = a + d$ e se a, b, d é uma PG então $b^2 = ad$. Assim:
i) $a + c + d = 39 \Rightarrow 3c = 39 \Rightarrow c = 13$;
ii) $abd = 1728 \Rightarrow b^3 = 1728 \Rightarrow b = 12$.
Desta forma temos que: $a + d = 26$ e $ad = 144 \Rightarrow a = 8$ e $d = 18$ ou $a = 18$ e $d = 8$.
Logo, temos duas possibilidades: $a = 8, b = 12, c = 13, d = 18$ ou $a = 18, b = 12, c = 13, d = 8$.

7) (Olimpíada do Canadá-79) Dados: (i) $a, b > 0$; (ii) a, A_1, A_2, b estão em progressão aritmética; (iii) a, G_1, G_2, b estão em progressão geométrica. Mostre que $A_1A_2 \geq G_1G_2$.

Solução:

Se a, G_1, G_2, b é uma PG então $G_1G_2 = ab$.

Se a, A_1, A_2, b é uma PA então: $b = a + 3r \Rightarrow r = \frac{b-a}{3}$.

- $A_1 = a + r = a + \frac{b-a}{3} = \frac{2a+b}{3}$
- $A_2 = a + 2r = a + \frac{2(b-a)}{3} = \frac{a+2b}{3}$

$$A_1A_2 - G_1G_2 = \frac{(2a+b)(a+2b)}{9} - ab = \frac{2a^2+2b^2+5ab-9ab}{9} = \frac{2(a-b)^2}{3} \geq 0 \Rightarrow$$

$A_1A_2 \geq G_1G_2$.

3.5. SOMA DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA PG

Considere a sequência (A_n) como sendo uma progressão geométrica não constante de razão q. Seja S_n a soma dos n primeiros termos da sequência (A_n). Assim:

$S_n = A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{n-1} + A_n \Rightarrow$

$S_n = A_1 + A_1q + A_1q^2 + ... + A_1q^{n-2} + A_1q^{n-1}$ (1)

Multiplicando esta última expressão por q:

$S_nq = A_1q + A_1q^2 + A_1q^3 + ... + A_1q^{n-1} + A_1q^n$ (2)

Subtraindo as equações (2) e (1) obtemos: $S_nq - S_n = A_1q^n - A_1 \Rightarrow$

$$S_n = \frac{A_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

Observação: Note que a fórmula demonstrada não é válida para q = 1. Entretanto, quando q = 1 tem-se um caso trivial, onde todos os elementos são iguais. Se o número de termos é n, para q = 1 segue diretamente que $S_n = n.A_1$.

3.5.1. Soma dos Termos de uma PG Infinita

Suponha que (A_n) é uma progressão geométrica de infinitos termos tal que a sua razão q satisfaz $|q| < 1$, $q \neq 0$. Neste caso, pode-se demonstrar (não é objetivo deste livro) que a sequência A_n é convergente, ou seja, que a soma dos seus infinitos termos é finita. Assim, se $|q| < 1$, quando n tende para infinito, o valor de q^n tende para zero. Como podemos escrever a soma dos n primeiros termos de uma PG da forma $S_n = \frac{A_1.q^n}{q-1} + \frac{A_1}{1-q}$, então a soma dos termos de uma PG infinita ($|q| < 1$) é:

$$S_\infty = \frac{A_1}{1-q}$$

Exercícios Resolvidos

1) (UFAM-03) Numa P. G. a soma do 2° com o 5° termo é 84 e a soma do 3° com o 6° termo é 252. Então a soma dos cinco primeiros termos é igual a:

a) 45 b) 364 c) 121 d) 182 e) 242

Solução: Alternativa C

$A_2 + A_5 = 84 \Rightarrow A_1q + A_1q^4 = 84 \Rightarrow A_1q(1 + q^3) = 84$ (1)

$A_3 + A_6 = 252 \Rightarrow A_1q^2 + A_1q^5 = 252 \Rightarrow A_1q^2(1 + q^3) = 252$ (2)

Dividindo as expressões (2) e (1) obtemos q = 3.

Substituindo q = 3 na equação (1): $A_1(3)(28) = 84 \Rightarrow A_1 = 1$.

Logo: $S_5 = \frac{A_1(q^5 - 1)}{q - 1} = \frac{(1)(3^5 - 1)}{3 - 1} = 121$.

2) (AFA-99) Uma bola é solta de uma altura de 128 metros em relação ao solo, e, ao atingir o mesmo, ela sobe a metade da altura anterior. Esse movimento se repete até atingir o solo pela décima vez. Nesse momento, quanto a bola terá percorrido, em metros?

a) 255,50 b) 383,00 c) 383,50 d) 383,63

Solução: Alternativa C

As alturas atingidas formam uma PG de 1º termo 128 e razão 1/2. Contudo, com exceção da 1a queda, nos demais movimentos o corpo sobe e desce o mesmo espaço. Assim, a soma dos espaços percorridos até a bola atingir o solo pela décima vez é:

$S = A_1 + 2A_2 + 2A_3 + ... + 2A_{10} = 2(A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_{10}) - A_1 \Rightarrow$

$$S = \frac{2A_1(q^{10}-1)}{q-1} - A_1 \Rightarrow S = \frac{(2)(128)\left(\frac{1}{2^{10}}-1\right)}{\frac{1}{2}-1} - 128 \Rightarrow S = 383{,}50 \text{ m}$$

3) (UFV-02) Se a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica (P.G.) é dada por $S_n = 1 - \frac{1}{2^n}$, onde $n \geq 1$, então o nono termo desta P.G. é:

a) 2^{-9} b) 2^{-8} c) 2^{-10} d) 2^8 e) 2^9

1ª Solução: Alternativa A

Note que: $S_1 = A_1 = \frac{1}{2}$ e $S_2 = A_1 + A_2 = \frac{3}{4}$.

Subtraindo estas equações obtemos $A_2 = \frac{1}{4}$.

Como $A_1 = \frac{1}{2}$ segue que $q = \frac{1}{2}$. Logo: $A_9 = A_1.q^8 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2^8} = 2^{-9}$.

2ª Solução:

Desenvolvendo a expressão de S_n fornecida: $S_n = 1 - \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{(1/2)^n - 1}{(1/2)-1}\right)$.

Comparando esta expressão com $S_n = \frac{A_1(q^n-1)}{q-1}$ concluímos que $A_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$.

Logo: $A_9 = A_1.q^8 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2^8} = 2^{-9}$.

3ª Solução:

Claramente tem-se que $A_9 = S_9 - S_8 = 1 - \frac{1}{2^9} - \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) = \frac{1}{2^8} - \frac{1}{2^9} = \frac{1}{2^9} = 2^{-9}$.

4) (Mackenzie-01) Numa progressão geométrica de 50 termos, a soma dos termos de ordem ímpar é o triplo da soma dos termos de ordem par. Se o primeiro termo é 9, o terceiro termo é:

a) 1 b) 3 c) 9 d) 18 e) 27

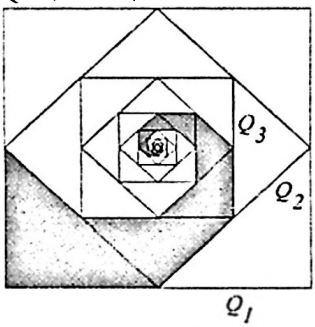
Solução: Alternativa A

Como em uma PG ocorre que $A_{2n} = (A_{2n-2})q^2$ e $A_{2n-1} = (A_{2n-3})q^2$ então os termos de ordem ímpar formam uma PG de 1° termo A_1 razão q^2 e os termos de ordem par formam uma PG de 1° termo A_2 e razão q^2. Portanto:

$$S_{impar} = 3.S_{par} \Rightarrow \frac{A_1[(q^2)^{25}-1]}{q^2-1} = \frac{3.A_2[(q^2)^{25}-1]}{q^2-1} \Rightarrow A_1 = 3.A_2 \Rightarrow q = 1/3.$$

Logo: $A_3 = A_1.q^2 = (9)(1/9) = 1$.

5) (UFRGS-17) Na figura abaixo, encontram-se representados quadrados de maneira que o maior quadrado (Q_1) tem lado 1. O quadrado Q_2 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_1; o quadrado Q_3 está construído com vértices nos pontos médios dos lados de Q_2 e, assim, sucessiva e infinitamente.



A soma das áreas da sequência infinita de triângulos sombreados na figura é

a) 1/2 b) 1/4 c) 1/8 d) 1/16 e) /132

Solução: Alternativa B

Inicialmente note que cada região sombreada possui área igual a $\frac{1}{8}$ da área do quadrado ao qual foi construída. Além disso, perceba também que o quadrado Q_n, obtido unindo os pontos médios de Q_{n-1}, possui área igual a 1/2 da área do quadrado Q_{n-1}. Desta forma, a sequência A_n, formada pelas áreas sombreadas é tal que $A_1 = \frac{1}{8}$ e $A_n = \frac{1}{2}A_{n-1}$. Logo, a soma das áreas sombreadas vale:

$$S_\infty = \frac{A_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$$

6) (ITA-93) A soma dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão r é 50 e a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita de razão q é 12. Se ambas as progressões tiverem o mesmo termo inicial menor do que 10 e sabendo-se que $q = r^2$, podemos afirmar que a soma dos 4 primeiros termos da progressão geométrica será:

a) 623/11 b) 129/32 c) 25/2 d) 765/64 e) 13

Solução: Alternativa D

Sejam $x - 2r$, $x - r$, x, $x + r$ e $x + 2r$ os termos da PA. Portanto:

$50 = x - 2r + x - r + x + x + r + x + 2r = 5x \Rightarrow x = 10 \Rightarrow$

PA: $(10 - 2r, 10 - r, 10, 10 + r, 10 + 2r)$.

Por outro lado, na PG:

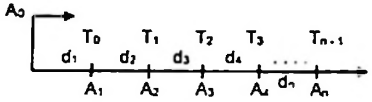
$$S_\infty = \frac{A_1}{1-q} \Rightarrow 12 = \frac{10-2r}{1-q} \Rightarrow 6 - 6q = 5 - r \Rightarrow 6q - r = 1.$$

Desde que $q = r^2$: $6r^2 - r - 1 = 0 \Rightarrow (3r + 1)(2r - 1) = 0 \overset{r>0}{\Rightarrow} r = 1/2 \Rightarrow$
$q = 1/4$ e $A_1 = 9$.

Logo: $S_4 = \dfrac{A_1(q^4 - 1)}{q - 1} = \dfrac{9[(1/4)^4 - 1]}{(1/4) - 1} = \dfrac{765}{64}$.

7) (ITA-03) Considere a seguinte situação baseada num dos paradoxos de Zenão de Eléia, filósofo grego do século V A.C. Suponha que o atleta Aquiles e uma tartaruga apostam uma corrida em linha reta, correndo com velocidades constantes v_A e v_T, com $0 < v_T < v_A$. Como a tartaruga é mais lenta, é-lhe dada uma vantagem inicial, de modo a começar a corrida no instante $t = 0$ a uma distância $d_1 > 0$ na frente de Aquiles. Calcule os tempos t_1, t_2, t_3, ... que Aquiles precisa para percorrer as distância d_1, d_2, d_3, ..., respectivamente, sendo que, para todo $n > 2$, d_n denota a distância entre a tartaruga e Aquiles no instante $\sum_{k=1}^{n-1} t_k$ da corrida. Verifique que os termos t_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$, formam uma progressão geométrica infinita, determine sua soma e dê o significado desta soma.

Solução:



Cálculo das distâncias percorridas por Aquiles (A) e a tartaruga (T):

i) Como $d_1 = V_A.t_1$ e $d_2 = V_T.t_1 \Rightarrow t_2 = \dfrac{V_T}{V_A} t_1$;

ii) Como $d_2 = V_A.t_2$ e $d_3 = V_T.t_2 \Rightarrow t_3 = \dfrac{V_T}{V_A} t_2$

iii) Como $d_3 = V_A.t_3$ e $d_4 = V_T.t_3 \Rightarrow t_4 = \frac{V_T}{V_A} t_3$

Daí conclui-se que para $n \geq 2$:

$V_T t_n = V_A.t_{n+1} \Rightarrow t_{n+1} = \frac{V_T}{V_A} t_n$, com $0 < \frac{t_{n+1}}{t_n} = \frac{V_T}{V_A} < 1$ ($V_A > V_T$).

Logo, os tempos $(t_1, t_2, t_3, ...)$ formam uma P.G. infinita de razão $\frac{V_T}{V_A}$, cuja soma será:

$$S_\infty = t_1 + \frac{V_T}{V_A} t_1 + \frac{V_T}{V_A} t_1 + ... \Rightarrow S_\infty = \frac{t_1}{1 - \frac{V_T}{V_A}} = \frac{t_1 . V_A}{V_A - V_T} = \frac{d_1}{V_A - V_T}.$$

Esta soma representa o tempo necessário para Aquiles alcançar a tartaruga.

8) (ITA-98) Seja $(a_1, a_2, a_3, ...)$ uma progressão geométrica infinita de razão a_1, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:

a) $\frac{8}{27}$ b) $\frac{20}{27}$ c) $\frac{26}{27}$ d) $\frac{30}{27}$ e) $\frac{38}{27}$

Solução: Alternativa E

$$S_\infty = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 3a_1 = \frac{a_1}{1-a_1} \overset{a_1 \neq 0}{\Rightarrow} \Rightarrow 1 - a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow a_1 = \frac{2}{3}.$$

$$S_3 = \frac{a_1(q^3 - 1)}{q - 1} = \frac{(2/3)[(2/3)^3 - 1]}{(2/3) - 1} = \frac{38}{27}.$$

9) (Escola Naval-91) O limite da soma $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \ldots$ é igual a:

a) 3/8 b) 1/2 c) 5/8 d) 2/3 e) 1

Solução: Alternativa C

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{2}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{2}{3^6} + \ldots = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \frac{1}{3^3} + \left(\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^4}\right) + \frac{1}{3^5} + \left(\frac{1}{3^6} + \frac{1}{3^6}\right) + \ldots \Rightarrow$$

$$S = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{3^6} \ldots\right) + \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^6} + \ldots\right) = \frac{(1/3)}{1-(1/3)} + \frac{(1/3^2)}{1-(1/3^2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}.$$

10) (Escola Naval-03) Cada termo da sequência $(1, q, q^2, q^3, ...)$, $q \neq 0$, é igual a x vezes o limite da soma dos que o seguem se, e somente se

a) $-1 < x < 1$ b) $x > 1$ c) $x < -2$ ou $x > 0$

d) $x < -1$ ou $x > 1$ e) $0 < x < 1$

Solução: Alternativa C

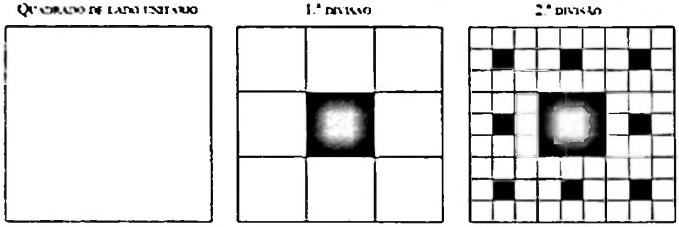
O termo geral da sequência é dado por $A_n = q^{n-1}$. Pelo enunciado:

$A_n = x(A_{n+1} + A_{n+2} + A_{n+3} + ...) \Rightarrow q^{n-1} = x(q^n + q^{n+1} + q^{n+2} + ...) \overset{|q|<1}{\Rightarrow}$

$q^{n-1} = \frac{x.q^n}{1-q} \Rightarrow q^{n-1} - q^n = x.q^n \overset{q\neq 0}{\Rightarrow} 1 - q = x.q \Rightarrow q = \frac{1}{1+x}.$

Como $|q| < 1$: $\left|\frac{1}{x+1}\right| < 1 \Rightarrow |x+1| > 1 \Rightarrow x < -2$ ou $x > 0$.

11) (Unesp-11) Divide-se, inicialmente, um quadrado de lado com medida unitária em 9 quadrados iguais, traçando-se dois pares de retas paralelas aos lados. Em seguida, remove-se o quadrado central. Repete-se este processo de divisão, para os quadrados restantes, n vezes. Observe o processo para as duas primeiras divisões:



Quantos quadrados restarão após as n divisões sucessivas do quadrado inicial e qual a soma das áreas dos quadrados removidos, quando n cresce indefinidamente?

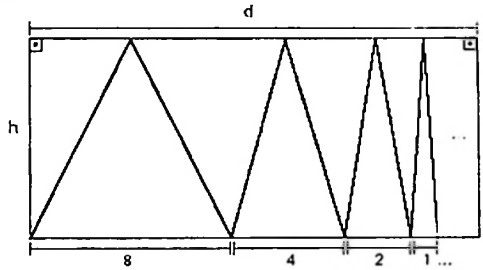
Solução:

Na 1ª divisão restam 8 dos 9 quadrados, ou seja, 8/9 do total. Cada um destes 8 quadrados restantes é dividido em 9 quadrados menores e 8/9 destes 72 são mantidos, a saber, 64 quadrados. Este procedimento segue indefinidamente, sempre em cada divisão restando 8/9 dos quadrados de cada divisão.

Pode-se montar, portanto, uma PG A_n com as quantidades de quadrados restantes em cada divisão, onde $A_1 = 8$ e $A_{n+1} = 9A_n \frac{8}{9} = 8A_n$, ou seja, a sequência A_n é uma PG de 1° termo 8 e razão 8: $A_n = 8^n$.

Também é possível formar uma sequência com as áreas dos quadrados removidos em cada divisão. Para tanto, repare que na nª divisão são retirados 8^{n-1} quadrados e cada um desses quadrados tem lado $\frac{1}{3^n}$. Logo, a sequência S_n das áreas retiradas na divisão n satisfaz: $S_{n+1} = 8^{n-1}.\left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{8^{n-1}}{9^n} = \frac{1}{9}\left(\frac{8}{9}\right)^{n-1}$, onde segue que S_n é uma PG de 1° termo $\frac{1}{9}$ e razão $\frac{8}{9}$. Assim: $S_\infty = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{8}{9}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{9}} = 1$.

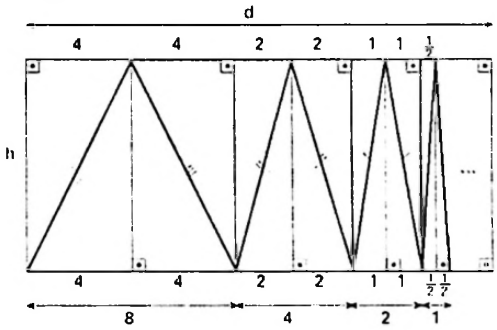
12) (FGV-05) A figura indica infinitos triângulos isósceles, cujas bases medem, em centímetros, 8, 4, 2, 1, ...



Sabendo que a soma da área dos infinitos triângulos hachurados na figura é igual a 51, pode-se afirmar que a área do retângulo de lados h e d é igual a

a) 68 b) 102 c) 136 d) 153 e) 192

Solução: Alternativa C



Observe a figura ao lado. A partir dela pode-se concluir que:

$$d = 8+4+2+1+\frac{1}{2}+\ldots = \frac{8}{1-(1/2)} = 16.$$

As áreas hachuradas são dadas por:

$$A_1 = \frac{6h}{2},\ A_2 = \frac{3h}{2},\ A_3 = \frac{3h}{4},\ \ldots$$

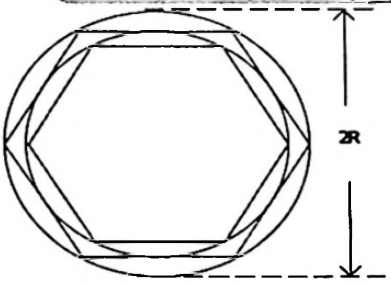
Conclui-se, então, que as áreas hachuradas formam uma PG de 1º termo $\frac{6h}{2}$ e razão $\frac{1}{2}$. Portanto:

$$51 = \frac{6h}{2}+\frac{3h}{2}+\frac{3h}{4}+\ldots = \frac{3h}{1-(1/2)} = 6h \Rightarrow h = 8{,}5$$

Assim, a área do retângulo é dada por:

$$h.d = (8{,}5)(16) = 136.$$

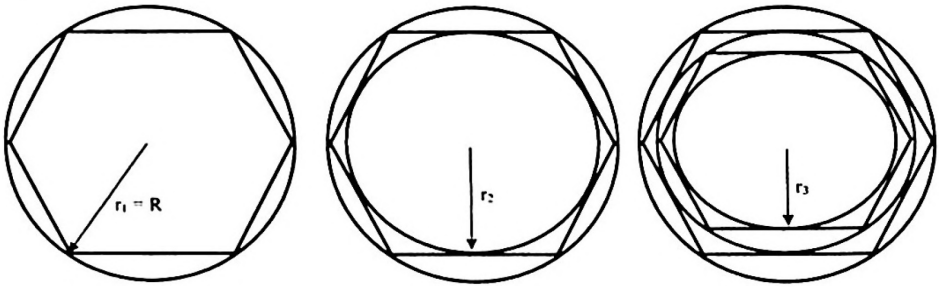
13) (EsPCEx-15) Considere o seguinte procedimento: em uma circunferência de diâmetro 2R, inscreve-se um hexágono regular para, em seguida, inscrever neste polígono uma segunda circunferência. Tomando esta nova circunferência, o processo é repetido gerando uma terceira circunferência. Caso este procedimento seja repetido infinitas vezes, a soma dos raios de todas as circunferências envolvidas nesse processo é igual a:



a) $2R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ b) $4R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ c) $4R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

d) $R\left(2+\sqrt{3}\right)$ e) $2R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

Solução: Alternativa B



Da 1ª figura segue diretamente que $r_1 = R$.

Observando a sequência das figuras, conclui-se que, para $n \geq 2$, o raio da n^a circunferência é igual ao apótema do $n-1°$ hexágono regular. Assim, r_2 é igual ao apótema do 1° hexágono regular. Esse apótema, por sua vez, é igual à altura de um triângulo equilátero de lado R: $r_2 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Desde que o 2° hexágono possui lado igual a r_2, segue que r_3 é igual à altura de um triângulo equilátero de lado r_2, ou seja, $r_3 = \frac{r_2\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{4}$.

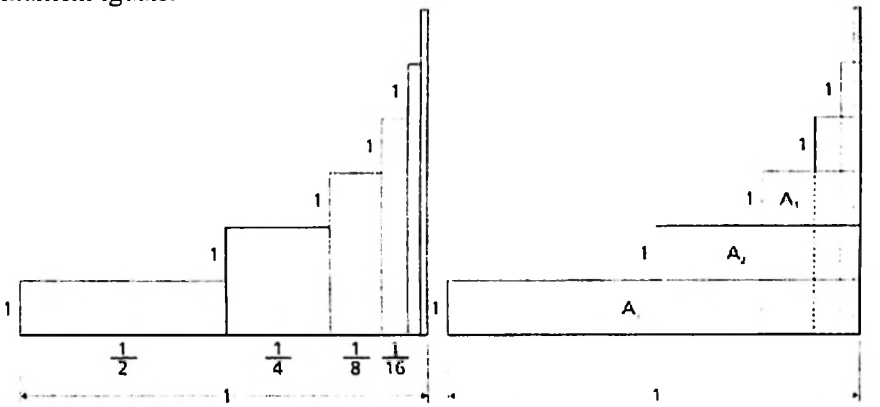
Generalizando esse procedimento, tem-se que $r_{n+1} = r_n \frac{\sqrt{3}}{2}$, implicando que a sequências dos raios das circunferências é uma PG de 1° termo R e razão $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como $|q| < 1$, a soma dos termos dessa PG vale:

$$S_\infty = \frac{r_1}{1-q} = \frac{R}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2R}{2-\sqrt{3}} = \frac{2R}{2-\sqrt{3}}\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = 4R\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

14) (UERJ-04) Considere a seguinte soma infinita: $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+...$

No gráfico I, abaixo, cada parcela desta soma é representada pela área de um retângulo, e a soma infinita é determinada pela soma das áreas desses retângulos. No gráfico II, embora a configuração dos retângulos tenha sido alterada, as áreas se mantêm iguais.



Com base nessas informações, podemos afirmar que a soma infinita tem o seguinte valor:

a) 3/2 b) 2 c) 5/2 d) 4

Solução: Alternativa B

Observando o gráfico I, concluímos que a área da figura é igual à soma das áreas dos retângulos, ou seja, $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+....$ Porém, o gráfico II mostra que podemos calcular o valor de S somando as áreas dos retângulos destacados:

$$S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...=\frac{1}{1-(1/2)}=2 \Rightarrow \frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+...=2.$$

15) (UFPI-03) Considere a sequência infinita $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}, \frac{4}{81}, ...$ Assinale com V (verdadeiro) ou F (falso) as opções abaixo.

(1) A sequência é uma progressão geométrica

(2) A sequência é decrescente

(3) A soma dos termos desta sequência é igual a 3/4

(4) A soma dos termos desta sequência é igual a 1

Solução: FVVF

(1) FALSO. O termo geral da sequência é $x_n = \frac{n}{3^n}$, $n \geq 1$, que não é o termo geral de uma PG.

(2) VERDADEIRO. Note que $x_{n+1} = \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n}.\frac{n}{3^n} = \frac{n+1}{3n}x_n$. Como para $n \geq 1$ temos $\frac{n+1}{3n} < 1$ então $x_{n+1} < x_n$, ou seja, a sequência é decrescente.

(3) VERDADEIRO. $S = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\right) + \left(\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}+\frac{1}{81}\right) + \ldots \Rightarrow$

$S = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots\right) + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\ldots\right) + \left(\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+\frac{1}{243}+\ldots\right) + \ldots \Rightarrow$

$S = \frac{(1/3)}{1-(1/3)} + \frac{(1/9)}{1-(1/3)} + \frac{1/27}{1-(1/3)} + \ldots = \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}+\ldots = \frac{1/2}{1-(1/3)} = \frac{3}{4}$

(4) FALSO. No item anterior provamos que a soma é igual a 3/4.

16) (IME-66) Prove que:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1} = \frac{n.x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2},\ x \neq 1.$$

1ª Solução:

$S = 1 + (x + x) + (x^2 + x^2 + x^2) + (x^3 + x^3 + x^3 + x^3) + \ldots + (x^{n-1} + x^{n-1} + \ldots + x^{n-1}) \Rightarrow$

$S = (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}) + (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}) + (x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n-1}) + \ldots + x^{n-1} \Rightarrow$

$S = \frac{(1)(x^n-1)}{x-1} + \frac{(x)(x^{n-1}-1)}{x-1} + \frac{(x^2)(x^{n-2}-1)}{x-1} + \ldots + \frac{x^{n-1}(x-1)}{x-1} \Rightarrow$

$S = \frac{x^n - 1 + x^n - x + x^n - x^2 + \ldots + x^n - x^{n-1}}{x-1} = \frac{nx^n - (1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})}{x-1} \Rightarrow$

$S = \frac{n.x^n - \frac{(x^n-1)}{x-1}}{x-1} = \frac{n.x^n(x-1) - x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{n.x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$

2ª Solução:

Multiplicando $S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots + nx^{n-1}$ por x obtemos:

$x.S = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \ldots + nx^n$.

Subtraindo estas duas equações: $x.S - S = n.x^n - (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}) \Rightarrow$

$S(x-1) = n.x^n - \frac{x^n - 1}{x-1} \Rightarrow S = \frac{n(x-1)x^n - x^n + 1}{(x-1)^2} = \frac{n.x^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}.$

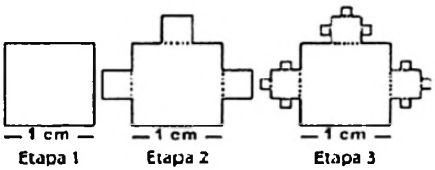
3ª Solução:

Sabemos que $1+x+x^2+x^3+x^4+...+x^n=\dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$.

Derivando os dois lados, em x, obtemos:

$$1+2x+3x^2+4x^3+...+nx^{n-1}=\frac{(n+1)x^n(x-1)-(x^{n+1}-1)}{(x-1)^2}=\frac{n.x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}.$$

17) (UFRJ-03) A região fractal *F*, construída a partir de um quadrado de lado 1cm, é constituída por uma infinidade de quadrados e construída em uma infinidade de etapas. A cada nova etapa consideram-se os quadrados de menor lado (ℓ) acrescentados na etapa anterior e acrescentam-se, para cada um destes, três novos quadrados de lado $\ell/3$. As três primeiras etapas de construção de *F* são apresentadas a seguir.



Calcule a área de *F*.

Solução:

Seja (F_n) a sequência das áreas dos fractais formados na etapa n. Assim:

$$F_1 = 1;\ F_2 = 1+3.\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{3};\ F_3=\frac{4}{3}+9\left(\frac{1}{9}\right)^2=\frac{13}{9};\ F_4=\frac{13}{9}+27\left(\frac{1}{27}\right)^2=\frac{40}{27}.$$

Portanto, temos que

$$F_n=F_{n-1}+\frac{1}{3^{n-1}} \Rightarrow F_n=F_1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+...+\frac{1}{3^{n-1}}=1+\frac{(1/3)[(1/3)^{n-1}-1]}{(1/3)-1} \Rightarrow$$

$$F_n=1+\frac{1-(1/3)^{n-1}}{2}.$$

Quando n tende para infinito temos que $(1/3)^{n-1}$ tende para zero:

$$F_\infty=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

3.6. PRODUTO DOS N PRIMEIROS TERMOS DE UMA PG

Suponha que (A_n) é uma progressão geométrica. Seja P_n o produto dos n primeiros termos da sequência (A_n), ou seja,

$$P_n = A_1.A_2.A_3...A_{n-2}.A_{n-1}.A_n.$$

Invertendo a ordem dos termos nesta multiplicação obtemos:

$$P_n = A_n.A_{n-1}.A_{n-2}...A_3.A_2.A_1.$$

Multiplicando termo a termo as duas expressões que fornecem P_n:

$$(P_n)^2 = (A_1.A_n)(A_2.A_{n-1})(A_3.A_{n-2})...(A_n.A_1)$$

Sabemos que em uma PG: $A_1.A_n = A_2.A_{n-1} = A_3.A_{n-2} = ... = A_k.A_{n-k+1}$. Assim:

$$(P_n)^2 = \underbrace{(A_1.A_n)(A_1.A_n)(A_1.A_n)...(A_1.A_n)}_{\text{n parcelas}} \Rightarrow P_n = \pm\sqrt{(A_1.A_n)^n}$$

Também podemos escrever P_n em função do primeiro termo e da razão:

$$P_n = (A_1.A_n)^{n/2} = \left(A_1.A_1q^{n-1}\right)^{n/2} = \left(A_1^2.q^{n-1}\right)^{n/2} \Rightarrow P_n = \pm A_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Observação: A definição do sinal + ou – depende da quantidade de termos negativos que estão sendo multiplicados. Se a quantidade de termos negativos de A_1 até A_n é par, P_n terá sinal positivo. Por outro lado, se a quantidade de termos negativos de A_1 até A_n for ímpar, P_n terá sinal negativo.

Exercícios Resolvidos

1) (UFRJ-01) Seja $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ uma sequência infinita de números reais. Sabendo que $x_0 = 10$ e que os logaritmos decimais $a_0 = \log x_0, a_1 = \log x_1, ..., a_n = \log x_n, ...$ formam uma PG de razão 1/2, calcule o valor limite do produto $P_n = x_0x_1x_2...x_n$ quando n tende a infinito.

Solução:

O termo geral da PG é igual a $a_n = a_0.q^n = \log_{10} 10.\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n}$.

Logo: $a_n = \log_{10} x_n \Rightarrow x_n = 10^{a_n} = 10^{\frac{1}{2^n}}$.

Quando n tende a infinito:

$$P_\infty = x_0x_1x_2x_3... = 10^{\frac{1}{2^0}}.10^{\frac{1}{2^1}}.10^{\frac{1}{2^2}}.10^{\frac{1}{2^3}}... = 10^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+...} = 10^{\frac{1}{1-(1/2)}} = 10^2 = 100.$$

2) (ITA-89) Numa progressão geométrica de razão q sabemos que $a_1 = 1/q$, $a_1a_n = (2/3)^5$ e o produto dos n primeiros termos é q^{20}. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:

a) $\frac{1}{2}\frac{3^8-2^8}{3^6}$ b) $\frac{1}{2}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ c) $\frac{1}{4}\frac{3^8-2^8}{3^6}$ d) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^6}$ e) $\frac{1}{4}\frac{3^6-2^6}{3^8}$

Solução: Alternativa A

Se a_1 é igual a 1/q, então da PG é dada por: $\left(\frac{1}{q}, 1, q, q^2, q^3, \ldots\right)$, onde o termo geral é $a_n = q^{n-2}$.

Note que: $(P_n)^2 = (a_1a_n)^n \Rightarrow q^{40} = \left(\frac{2}{3}\right)^{5n} \Rightarrow q^{40/n} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ (1)

Igualando (1) e (2): $a_1a_n = \frac{1}{q}.q^{n-2} = q^{n-3} = \left(\frac{2}{3}\right)^5$ (2)

Logo: $q^{n-3} = q^{40/n} \overset{q\neq 0, q\neq 1}{\Rightarrow} n-3 = \frac{40}{n} \Rightarrow n^2 - 3n - 40 = 0 \Rightarrow$

$(n-8)(n+5) = 0 \overset{n>0}{\Rightarrow} n = 8.$

Substituindo n = 8 em (2): $q^5 = \left(\frac{2}{3}\right)^5 \Rightarrow q = \frac{2}{3}$.

Consequentemente: $S_8 = \frac{a_1(q^8-1)}{q-1} = \frac{(3/2)[(2/3)^8-1]}{(2/3)-1} = \frac{1}{2}\frac{3^8-2^8}{3^6}$.

3) (ITA-94) Seja $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ uma progressão geométrica com um número ímpar de termos e razão $q > 0$. O produto de seus termos é igual a 2^{25} e o termo do meio é 2^5. Se a soma dos $(n-1)$ primeiros termos é igual a $2(1+q)(1+q^2)$, então:

a) $a_1 + q = 16$ b) $a_1 + q = 12$ c) $a_1 + q = 10$

d) $a_1 + q + n = 20$ e) $a_1 + q + n = 11$

Solução: Alternativa E

Como n é ímpar, façamos $n = 2x - 1$. Note que neste caso x é o índice do termo central da sequência.

Em uma PG com número ímpar de termos:

$A_1.A_{2x-1} = (A_x)^2 \Rightarrow A_1.A_{2x-1} = 2^{10}$.

$P_{2x-1} = \sqrt{(A_1.A_{2x-1})^{2x-1}} \Rightarrow 2^{25} = \sqrt{(2^{10})^{2x-1}} \Rightarrow 2^{25} = 2^{5(2x-1)} \Rightarrow$

$2x - 1 = 5 \Rightarrow n = 5.$

$S_4 = 2(1+q)(1+q^2) = A_1 + A_1q + A_1q^2 + A_1q^3 = A_1(1+q+q^2+q^3) \Rightarrow$

$S_4 = A_1(1+q)(1+q^2) \Rightarrow A_1 = 2.$

Como o termo central vale 2^5, temos que:

$2^5 = A_3 = A_1q^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 16 \Rightarrow q = 4.$
Logo: $a_1 + q + n = 2 + 4 + 5 = 11$

4) (Mackenzie-00) $P = a_0.a_1.a_2.a_3...$ é o produto dos infinitos termos da sequência definida por $a_n = 3^{(0,5^n)}$. O valor de P é:

a) 9 b) $3\sqrt{3}$ c) 81 d) $\sqrt{3}$ e) 3

Solução: Alternativa A

$$P = 3^{(1/2)^0}.3^{(1/2)^1}.3^{(1/2)^2}.3^{(1/2)^3}... = 3^{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...} = 3^{\frac{1}{1-(1/2)}} = 3^2 = 9.$$

5) (Mackenzie-99) Seja a sequência geométrica, de n termos positivos, que se obtém inserindo-se k meios geométricos entre 1/2 e 8. Se o produto de todos os termos é 32, então n vale:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

Solução: Alternativa A

Nesta sequência temos $a_1 = 1/2$ e $a_n = 8$.
Logo: $(P_n)^2 = (a_1.a_n)^n \Rightarrow 1024 = 4^n \Rightarrow n = 5.$

6) (IME-02) Sabe-se que $\log_a b = X$, $\log_q b = Y$ e $n > 0$, onde n é um número natural. Sendo c o produto dos n termos de uma progressão geométrica de primeiro termo a e razão q, calcule o valor de $\log_c b$ em função de X, Y e n.

Solução:

$(P_n)^2 = (a_1.a_n)^n \Rightarrow c^2 = (a.aq^{n-1})^n \Rightarrow c^2 = a^{2n}.q^{n(n-1)} \Rightarrow$
$\log_b c^2 = \log_b (a^{2n}.q^{n(n-1)}) \Rightarrow 2.\log_b c = \log_b a^{2n} + \log_b q^{n(n-1)} \Rightarrow$

$$2.\log_b c = 2n.\log_b a + n(n-1).\log_b q \Rightarrow \frac{2}{\log_c b} = \frac{2n}{\log_a b} + \frac{n(n-1)}{\log_q b} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{\log_c b} = \frac{2n}{X} + \frac{n(n-1)}{Y} = n\left(\frac{2Y + (n-1)X}{XY}\right) \Rightarrow \log_c b = \frac{2XY}{n(2Y + (n-1)X)}.$$

3.7. PROGRESSÃO GEOMÉTRICA DE 2ª ORDEM

3.7.1. Sequência Razão:

Em uma sequência de números não nulos x_n, considere a sequência ∇x_n dada pela razão entre dois elementos consecutivos de x_n. Assim, para uma sequência $\{x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$, a sequência ∇x_n é dada por $\left\{\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_2}, ..., \frac{x_n}{x_{n-1}}\right\}$.

3.7.2. PG de 2ª Ordem

Uma sequência A_n, com todos seus termos não nulos, é classificada como uma PG de 2ª ordem se a sequência ∇A_n é uma PG de 1ª ordem.

Por exemplo, a sequência $\{A_n\}$: (1, 2, 8, 64, 1024) é uma PG de 2ª ordem pois $\frac{A_2}{A_1} = 2$, $\frac{A_3}{A_2} = 4$, $\frac{A_4}{A_3} = 8$, $\frac{A_5}{A_4} = 16$, ou seja, a sequência $\{\nabla A_n\}$ é dada por {2, 4. 8, 16}, que é uma PG de 1ª ordem.

3.7.3. Termo Geral

Suponha que $\{A_n\}$ seja uma PG de 2ª ordem. Logo:

$$\frac{A_2}{A_1} = x_1,\ \frac{A_3}{A_2} = x_2,\ \frac{A_4}{A_3} = x_3,\ ...,\ \frac{A_{n-1}}{A_{n-2}} = x_{n-2},\ \frac{A_n}{A_{n-1}} = x_{n-1}, \quad (1)$$

onde x_n é uma PG de 1ª ordem, ou seja, $x_k = x_1 q^{k-1}$, para $k = 1, 2, 3, ..., n-1$.

Multiplicando todas as expressões algébricas descritas em (1):

$$\frac{\cancel{A_2}}{A_1}.\frac{\cancel{A_3}}{\cancel{A_2}}.\frac{\cancel{A_4}}{\cancel{A_3}}...\frac{A_n}{\cancel{A_{n-1}}} = x_1.x_2.x_3...x_{n-1} = x_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad \Rightarrow \quad A_n = A_1.x_1^n.q^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Observações:

(1) Aqui temos mais uma clássica situação em que se deve aprender o procedimento de cálculo (para replicá-lo no futuro) em vez de decorar a fórmula final.

(2) Analogamente aos casos dos termos gerais da PA e da PG, o índice n do termo geral da PG de 2ª ordem se refere a um índice qualquer da sequência, não apenas ao maior do último termo da progressão.

Exercícios Resolvidos

1) Determine o termo geral da seguinte sequência: 2, 2, 6, 54, 1458, 118098, ...
Solução:

Note que $\frac{A_2}{A_1}=1,\ \frac{A_3}{A_2}=3,\ \frac{A_4}{A_3}=9,\ \frac{A_5}{A_4}=27,\ \frac{A_6}{A_5}=81,\ldots$, ou seja, a sequência formada pela razão de termos consecutivos da sequência original é uma PG de 1ª ordem, onde o 1° termo é 1 e a razão é 3.
Deste modo, pode-se afirmar que:

$$\frac{A_2}{A_1}=1,\ \frac{A_3}{A_2}=3,\ \frac{A_4}{A_3}=9,\ldots,\frac{A_n}{A_{n-1}}=3^{n-1}$$

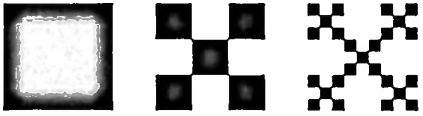
Multiplicando todos os termos acima:

$$\frac{\cancel{A_2}}{A_1}\cdot\frac{\cancel{A_3}}{\cancel{A_2}}\cdot\frac{\cancel{A_4}}{\cancel{A_3}}\cdots\frac{A_n}{\cancel{A_{n-1}}}=1.3.3^2\ldots3^{n-1}=3^{1+2+\ldots+n-1}=3^{\frac{n(n-1)}{2}}\Rightarrow$$

$$\frac{A_n}{A_1}=3^{\frac{n(n-1)}{2}}\Rightarrow A_n=2.3^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

Exercícios de Vestibular

1) (UFRGS-14) Considere o padrão de construção representado pelos desenhos abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

Na etapa 1, há um único quadrado com lado 1. Na etapa 2, esse quadrado foi dividido em nove quadrados congruentes, sendo quatro deles retirados, como indica a figura. Na etapa 3 e nas seguintes, o mesmo processo é repetido em cada um dos quadrados da etapa anterior. Nessas condições, a área restante, na etapa 5, é

a) 125/729 b) 125/2187 c) 625/729
d) 625/2187 e) 625/6561

2) (Unicamp-98) Considere uma progressão geométrica de termos não-nulos, na qual cada termo, a partir do terceiro, é igual à soma dos dois termos imediatamente anteriores.

a) Calcule os dois valores possíveis para a razão q dessa progressão.

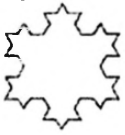
b) Supondo que o primeiro termo seja $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $q > 0$, calcule a soma dos três primeiros termos dessa progressão.

3) (Fuvest-20) O Floco de Neve de Koch (ou Estrela de Koch) é uma construção geométrica recursiva cujos primeiros passos se desenvolvem da seguinte forma:

Passo 0: começa-se com um triângulo equilátero de lados de medida 1.

Passo 1: divide-se cada lado do triângulo do Passo 0 em 3 segmentos iguais e constrói-se um triângulo equilátero com base em cada segmento do meio.

Passo 2: repete-se o procedimento descrito no Passo 1 em cada lado da figura obtida no passo anterior.



Os passos seguintes (Passo 3, Passo 4, Passo 5, ...) seguem o mesmo procedimento descrito no Passo 1, em cada lado da figura obtida no passo anterior. Considerando os passos descritos e os próximos passos, responda (Adote $\log 2 \cong 0{,}301$):

a) Qual é o número de lados da figura no Passo 3?

b) Qual é o perímetro da figura no Passo 5?

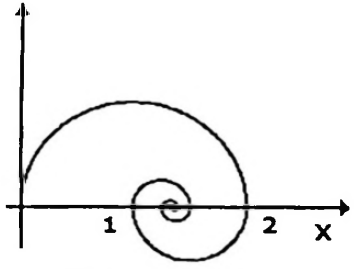
c) A partir de qual Passo o número de lados da figura supera 6.000.000.000.000 (seis trilhões)?

4) (UECE-18) Considerando $f: R \to R$ a função definida por $f(x) = 3.2^x$ e $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...)$ uma progressão aritmética cujo primeiro termo x_1 é igual a um e cuja razão é igual a $-1/2$, pode-se afirmar corretamente que o valor da "soma infinita" $f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + ... + f(x_n) + ...$ é igual a

A) $8\left(2+\sqrt{2}\right)$. B) $2\left(2+\sqrt{2}\right)$.

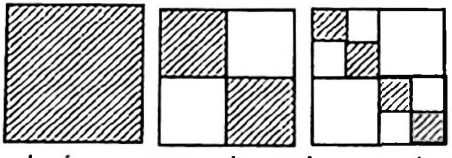
C) $6\left(2+\sqrt{2}\right)$. D) $4\left(2+\sqrt{2}\right)$.

5) (EsPCEx-14) Na figura abaixo temos uma espiral formada pela união de infinitos semicírculos cujos centros pertencem ao eixo das abscissas. Se o raio do primeiro semicírculo (o maior) é igual a 1 e o raio de cada semicírculo é igual à metade do semicírculo anterior, o comprimento da espiral é igual a



[A] π. [B] 2π. [C] 3π.
[D] 4π. [E] 5π.

6) (UFOP-03) Considere a sequência de figuras, na qual a área do primeiro quadrado é S.



Qual é a soma de todas as áreas tracejadas da sequência?

7) (UFMG-02) Os números a, b e c, nessa ordem, estão em progressão geométrica de razão 4/3. Além disso, a – 1, b e c, nessa ordem, estão em progressão aritmética. **DETERMINE** a, b e c.

8) (UnB-17) Para n = 1, 2, 3, ..., considere a sequência $b_n = 2^{a_n}$, em que a sequência a_n é uma progressão aritmética (PA). Sabendo que $2^{12} = 4096$, julgue os itens seguintes.

(1) Se a razão da PA for igual a 3, então a sequência b_n será uma progressão geométrica de razão igual a 8.

(2) Se $a_1 = 0$ e a soma dos seis primeiros termos da PA for igual a 30, então a soma dos seis primeiros termos da sequência b_n será superior a 1300.

9) (UnB-16) Um parque temático expõe dois aquários, com 50 espécies de peixes diferentes, conforme descrito a seguir.

- No primeiro (de água doce), há a_i exemplares da i-ésima espécie, com i = 1, 2, ..., 10; a sequência (a_1, ..., a_{10}) está em progressão geométrica; $a_1 = 2$ e $a_3 = 18$.
- No segundo aquário (de água salgada), há b_j exemplares da j-ésima espécie, com j = 1, 2, ..., 40; a sequência (b_1, ..., b_{40}) está em progressão aritmética; $b_4 = 70$ e $b_{30} = 668$.

Tendo como referência essas informações, julgue os itens de 1 a 4 e assinale a opção correta nos itens 5 e 6.

(1) A trigésima oitava espécie de peixes do aquário de água salgada possui mais de 850 exemplares.

(2) Para qualquer espécie de peixes, o número de exemplares é sempre par.

(3) Existe exatamente um par de espécies de peixes que possuem o mesmo número de exemplares.

(4) A sétima espécie de peixes do aquário de água doce possui mais de 1.500 exemplares.

(5) Considere que as expressões dos termos gerais das progressões a_i e b_j

sejam definidas para todo i e j no conjunto dos números reais. Nessa situação, as funções que associam i e j aos termos gerais são, respectivamente,
a) exponencial e polinomial.
b) logarítmica e exponencial.
c) exponencial e logarítmica.
d) polinomial e logarítmica.

(6) A quantidade total de exemplares das 50 espécies de peixes é
a) inferior a 40 mil.
b) superior a 40 mil e inferior a 70 mil.
c) superior a 70 mil e inferior a 100 mil.
d) superior a 100 mil.

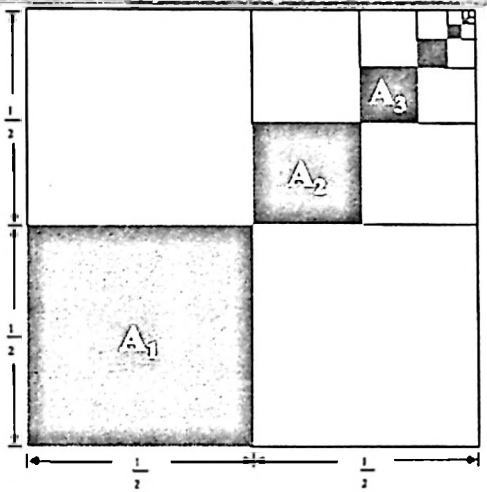
10) (UFMA-03) O número 38 é dividido em três parcelas positivas, formando uma progressão geométrica de tal modo que, se for adicionada uma unidade à segunda parcela, obtém-se uma progressão aritmética. Qual é a maior das parcelas?
a) 10 b) 15 c) 18 d) 20 e) 22

11) (UFLA-04) Um naturalista observou que o número de ramos de uma espécie arbórea cresce como uma progressão geométrica ao longo dos anos. Se o número de ramos em um certo ano é igual à soma dos números de ramos dos dois anos anteriores, qual a razão dessa progressão?

a) $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ b) $\sqrt{5}$ c) 2

d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$

12) (UnB-02) Na figura abaixo, A_k representa a área do k-ésimo quadrado sombreado, cujo lado é o dobro do lado do (k + 1)-ésimo quadrado, para k = 1, 2, 3, ...



Com base na figura acima, julgue os itens que se seguem.

(1) $A_4 = \frac{1}{256}$.

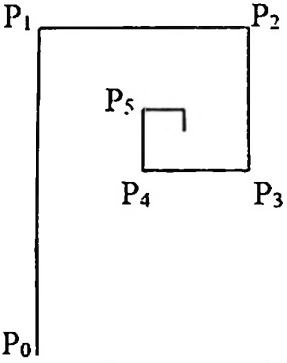
(2) $\frac{A_{201}}{A_{200}} = \frac{1}{8}$

(3) $A_1 + A_2 + ... + A_{10} < \frac{1}{3}$

(4) O menor valor de k para o qual $A_1 + A_2 + ... + A_k > \frac{1}{3} - \frac{1}{1200}$ é igual a 5.

13) (Fuvest-99) Seja (a_n) uma progressão geométrica de primeiro termo $a_1 = 1$ e razão q^2, onde q é um número inteiro maior que 1. Seja (b_n) uma progressão geométrica cuja razão é q. Sabe-se que $a_{11} = b_{17}$. Neste caso:
a) Determine o primeiro termo b_2 em função de q.
b) Existe algum valor de n para o qual $a_n = b_n$?
c) Que condição n e m devem satisfazer para que $a_n = b_m$?

14) (Unirio-93) Na linha poligonal da figura ao lado, de lados P_0P_1, P_1P_2, P_2P_3, ... cada lado é perpendicular ao anterior e tem comprimento igual à metade do comprimento do lado anterior. Se $P_0P_1 = 1$, então, quando n tende para infinito, o limite da distância entre os vértices P_0 e P_n vale:



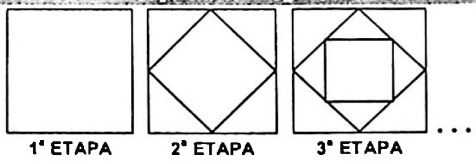
a) 1 b) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ c) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$

d) $\frac{4}{5}$ e) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

15) (Udesc-15) Os números reais a, b e c são tais que a progressão geométrica $S_1 = \{5a - b, b, 48, ...\}$ e a progressão aritmética $S_2 = \{c, a - b, -6a - c, ...\}$ possuem razões opostas. Então, o valor de $a + b + c$ é igual a:

A) 3 B) 20 C) 13 D) 15 E) 10

16) (UFPE-99) Na ilustração abaixo, cada nova etapa é obtida conectando-se os pontos médios de lados adjacentes do quadrado menor obtido na etapa anterior. Se o lado do quadrado maior mede **20 cm**, qual é o número inteiro que melhor aproxima a área, em **cm²**, do quadrado menor na quinta etapa.



17) (Unicamp-10) Dois sites de relacionamento desejam aumentar o número de integrantes usando estratégias agressivas de propaganda. O site A, que tem 150 participantes atualmente, espera conseguir 100 novos integrantes em um período de uma semana e dobrar o número de novos participantes a cada semana subsequente. Assim, entrarão 100 internautas novos na primeira semana, 200 na segunda, 400 na terceira, e assim por diante. Por sua vez, o site B, que já tem 2200 membros, acredita que conseguirá mais 100 associados na primeira semana e que, a cada semana subsequente, aumentará o número de internautas novos em 100 pessoas. Ou seja, 100 novos membros entrarão no site B na primeira semana, 200 entrarão na segunda, 300 na terceira, etc.

a) Quantos membros novos o site A espera atrair daqui a 6 semanas? Quantos associados o site A espera ter daqui a 6 semanas?

b) Em quantas semanas o site B espera chegar à marca dos 10000 membros?

18) (PUC/PR-05) Uma formiga minúscula, cujo tamanho é desprezível, faz um percurso linear. Inicialmente, caminha para a direita uma distância de 1 m. Então, ela vira para a esquerda, caminhando metade da distância do seu ponto corrente. Se a formiga continuar caminhando para a direita e para a esquerda, sempre andando a metade da

distância previamente caminhada, a formiga percorrerá, a partir da origem, a distância de:
a) 1 m b) 2 m c) 4 m
d) 8 m e) 10 m

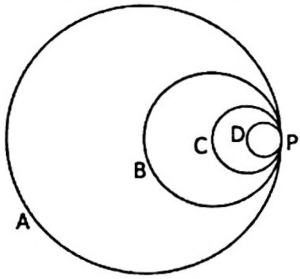
19) (Unicamp-18) Considere a sequência de números reais $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ tal que (a_1, a_2, a_3) é uma progressão geométrica e (a_3, a_4, a_5) é uma progressão aritmética, ambas com a mesma razão w.
a) Determine a sequência no caso em que $a_3 = 3$ e $w = 2$.
b) Determine todas as sequências tais que $a_1 = 1$ e $a_5 = 8$.

20) (Fuvest-10) Os números a_1, a_2, a_3 formam uma progressão aritmética de razão r, de tal modo que $a_1 + 3$, $a_2 - 3$, $a_3 - 3$ estejam em progressão geométrica. Dado ainda que $a_1 > 0$ e $a_2 = 2$, conclui-se que r é igual a

a) $3+\sqrt{3}$ b) $3+\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $3+\frac{\sqrt{3}}{4}$

d) $3-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $3-\sqrt{3}$

21) (UFRGS-15) Considere o padrão de construção representado pelo desenho abaixo. O disco A tem raio medindo 1. O disco B é tangente ao disco A no ponto P e passa pelo centro do disco A. O disco C é tangente ao disco B no ponto P e passa pelo centro do disco B. O disco D é tangente ao disco C no ponto P e passa pelo centro do disco C. O processo de construção dos discos é repetido infinitamente.

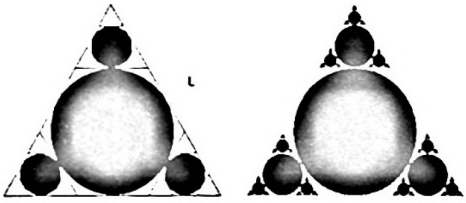


Considerando a sucessão infinita de discos, a soma das áreas dos discos é
a) $\pi/4$ b) $\pi/3$ c) $2\pi/3$ d) π e) $4\pi/3$

22) (UFPA-05) A figura ao lado é comumente reconhecida como um "fractal" (onde pequenas partes são cópias reduzidas do todo) e é constituída por uma infinidade de círculos de raios cada vez menores. Sua construção é dada a seguir. A partir de um triângulo equilátero ABC, cujo lado tem comprimento **L**, considere a circunferência nele inscrita. A reta paralela ao lado BC e tangente à circunferência inscrita intercepta o lado AB no ponto D e o lado AC no ponto E, formando um novo triângulo equilátero ADE. Fazendo construções equivalentes para os lados AC e AB, determinaremos dois novos triângulos equiláteros BFG e CHI. Para cada um dos triângulos, ADE, BFG e CHI, repetimos o processo acima, obtendo três novas circunferências inscritas e nove triângulos menores. Esse processo pode ser repetido indefinidamente, gerando círculos cada vez menores e formando a Figura 3.
Lembre-se que o raio do círculo inscrito é igual a um terço da altura do triângulo equilátero.
a) **Calcule** a área do primeiro círculo construído e a área de um dos círculos

menores da Figura 2, em função do lado L do triângulo inicial.

b) As somas das áreas dos círculos congruentes (de mesmo raio), em ordem decrescente, formam uma progressão geométrica. **Calcule** a soma dos infinitos termos dessa progressão.



23) (F.G.V.-76) Um químico tem 12 litros de álcool. Ele retira 3 litros e os substitui por água. Em seguida, retira 3 litros da mistura e os substitui por água novamente. Após efetuar essa operação 5 vezes, aproximadamente quantos litros de álcool sobram na mistura?

a) 2,35 b) 2,85 c) 1,75
d) 1,60 e) 1,15

24) (Mackenzie-79) Sendo

$S = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots \quad (0 < x < 1)$,

pode-se afirmar que:

a) $S = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ b) $S = \dfrac{x}{(1-x)^2}$

c) $S = \dfrac{2}{(2-x)^2}$ d) $S = \dfrac{1}{(2-x)^2}$

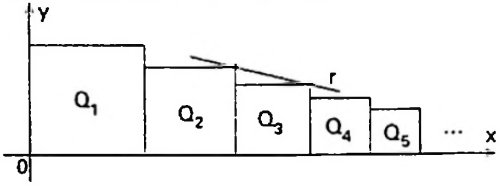
e) $S = \dfrac{x}{(2-x)^2}$

25) (Mackenzie-74) Calcule a soma

$$S = 1 + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} + \frac{15}{64} + \ldots + \frac{2^n - 1}{2^{2n-2}} + \ldots$$

a) 2 b) 2/3 c) 4
d) 4/3 e) 8/3

26) (Insper-11) A figura mostra uma sequência infinita de quadrados (Q_1, Q_2, Q_3, ... ,Q_n, ...) do plano cartesiano.



Sabe-se que:

• o lado do quadrado Q_1 mede 1;

• as medidas dos lados dos quadrados Q_1, Q_2, Q_3, ... formam, nessa ordem, uma progressão geométrica de razão positiva q;

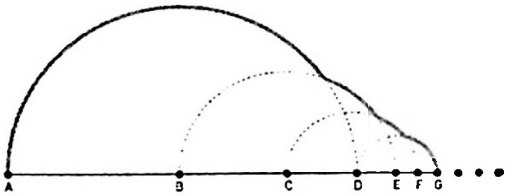
• a reta r, que passa pelos vértices dos quadrados Q_2 e Q_3 assinalados na figura, intercepta o eixo das abscissas no ponto (9/2, 0). Nessas condições, q é igual a

a) 7/9 b) 7/8 c) 5/7 d) 5/6 e) 3/5

27) (UERJ-07) A figura a seguir mostra um molusco Triton tritonis sobre uma estrela do mar.

(www.wikimedia.org)

Um corte transversal nesse molusco permite visualizar, geometricamente, uma sequência de semicírculos. O esquema abaixo indica quatro desses semicírculos.



Admita que as medidas dos raios (AB, BC, CD, DE, EF, FG, ...) formem uma progressão tal que

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{DE}=\frac{DE}{EF}=...$$

Assim, considerando AB = 2, a soma AB + BC + CD + DE + ... será equivalente a:

a) $2+\sqrt{3}$ b) $2+\sqrt{5}$

c) $3+\sqrt{3}$ d) $3+\sqrt{5}$

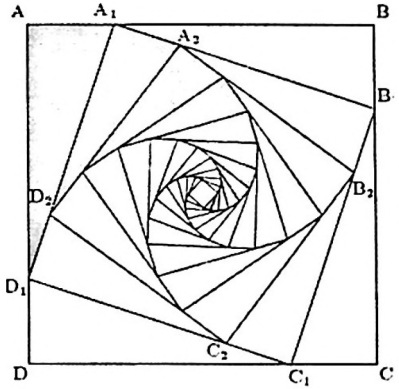
28) (Cefet/PR-04) Sejam uma PA e uma PG com três termos reais. A soma da PG adicionada à soma da PA é igual a 2. Sabe-se que suas razões são iguais ao primeiro termo da PG e que o primeiro termo da PA é igual a 2. A razão será igual a:

a) – 1 b) 2 c) – 2 d) 1 e) 4

29) (FGV-04) Durante o último jogo da seleção brasileira, brinquei com meu primo, apostando quem conseguiria colocar mais pipocas na boca. Comecei colocando 2 na boca e fui aumentando r pipocas por vez, como em uma PA. Ele começou colocando 1 na boca e foi multiplicando por r, como numa PG. Na quarta vez em que colocamos pipocas na boca, descobrimos que a quantidade colocada por nós dois foi a mesma. Nessa nossa brincadeira, o valor de r é

a) um número quadrado perfeito.
b) um número maior que 3.
c) um divisor de 15.
d) um múltiplo de 3.
e) um número primo.

30) (IBMEC-03) Na figura abaixo temos o quadrado ABCD de lado 4. Dividimos cada lado na razão 1:3 e, com os pontos obtidos, obtemos um outro quadrado $A_1B_1C_1D_1$ inscrito no maior. Dividimos cada lado do quadrado $A_1B_1C_1D_1$ na mesma razão e repetimos o processo obtendo o quadrado $A_2B_2C_2D_2$, e assim sucessivamente.



Se S_1 é a área do triângulo AD_1A_1, S_2 é a área do triângulo $A_1D_2A_2$ e assim sucessivamente, então o limite da soma $S_1 + S_2 + ...$ é igual a

a) 1 b) $\sqrt{2}$ c) 2 d) $2\sqrt{2}$ e) 4

31) (IBMEC-03) Considere as sequências $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$ e $(g_1, g_2, g_3, ..., g_n, g_{n+1}, ...)$ que satisfazem as leis de formação $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$ para n = 1, 2, 3, ...; com $a_1 = 1$ e $\frac{g_{n+1}}{g_n}=\frac{1}{2}$ para n = 1, 2, 3, ...; com $g_1 = 2$, respectivamente.

a) Mostre que a sequência $(2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, ..., 2^{a_n}, 2^{a_{n+1}}, ...)$ é uma progressão geométrica e exiba a fórmula do termo geral dessa progressão.

(b) Mostre que a sequência $(\log_2(g_1), \log_2(g_2), \log_2(g_3), ..., \log_2(g_n), \log_2(g_{n+1}), ...)$ é uma progressão aritmética e exiba a fórmula do termo geral dessa progressão.

32) (IBMEC-05) Uma bola de borracha é solta a 1m de altura do chão. Cada vez que esta bola se choca com o chão, ela volta a subir, sempre percorrendo uma trajetória totalmente vertical. Entretanto, por causa de fenômenos misteriosos da natureza, a cada choque com o chão a bola atinge uma altura igual a 80% da altura que havia atingido antes desse choque. Calcule o limite da soma dos espaços percorridos pela bola em todo o processo.

33) (Unicamp-12) Para construir uma curva "floco de neve", divide-se um segmento de reta (Figura 1) em três partes iguais. Em seguida, o segmento central sofre uma rotação de 60°, e acrescenta-se um novo segmento de mesmo comprimento dos demais, como o que aparece tracejado na Figura 2. Nas etapas seguintes, o mesmo procedimento é aplicado a cada segmento da linha poligonal, como está ilustrado nas Figuras 3 e 4.

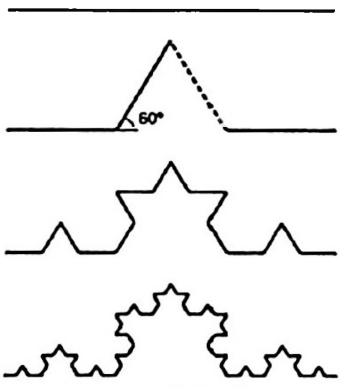


Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Se o segmento inicial mede 1cm, o comprimento da curva obtida na sexta figura é igual a

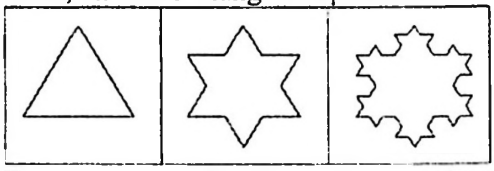
a) $\left(\frac{6!}{4!3!}\right)$ cm b) $\left(\frac{5!}{4!3!}\right)$ cm

c) $\left(\frac{4}{3}\right)^5$ cm d) $\left(\frac{4}{3}\right)^6$ cm

34) (PUC/PR-01) Em uma progressão geométrica infinitamente decrescente, cuja soma é igual a 9 e a soma dos quadrados de todos os seus termos é 40,5, o seu 4° termo vale:

a) 3/8 b) 1/27 c) 5/32
d) 2/9 e) 4/27

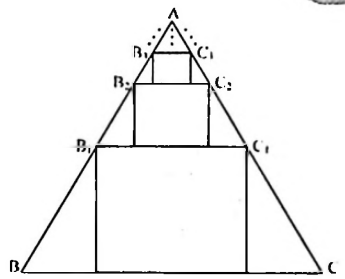
35) (UERJ-04) O fractal chamado floco de neve de Koch é obtido a partir de um triângulo equilátero, dividindo-se seus lados em 3 partes iguais e construindo-se, sobre a parte do meio de cada um dos lados, um novo triângulo equilátero.



Este processo de formação continua indefinidamente até a obtenção de um floco de neve de Koch. Supondo que o lado do triângulo inicial meça 1 unidade de comprimento, a área do floco de neve de Koch formado será, em unidades quadradas, equivalente a:

a) $\sqrt{3}/5$ b) $\sqrt{3}/4$ c) $2\sqrt{3}/5$ d) $\sqrt{3}/2$

36) (UFES-02) Na figura abaixo, o triângulo ABC é equilátero de lado igual a 1.



Considere o retângulo com dois vértices sobre a base BC e cujos outros dois vértices, B_1 e C_1, são os pontos médios dos lados AB e AC, respectivamente. No triângulo AB_1C_1, considere o retângulo com dois vértices sobre a base B_1C_1 e cujos outros dois vértices, B_2 e C_2, são os pontos médios dos lados AB_1 e AC_1, respectivamente. Continuando este processo indefinidamente, obtém-se uma sequência de retângulos. A soma das áreas totais de todos os retângulos assim obtidos é igual a

a) $\frac{\sqrt{3}}{24}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{8}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

37) (UFES-03) Um segmento de reta é dividido em três partes iguais e tem o seu segmento central retirado. Em cada uma das duas partes que sobraram, o procedimento é repetido: divide-se cada uma delas em três partes iguais e retira-se o segmento central de cada uma. Esse procedimento é repetido uma infinidade de vezes. Calcule a razão entre a soma dos comprimentos de todos os segmentos que são retirados nesse processo e o comprimento do segmento de reta original.

38) (AFA-12) Sejam $(1, a_2, a_3, a_4)$ e $(1, b_2, b_3, b_4)$ uma progressão aritmética e uma progressão geométrica, respectivamente, ambas com a mesma soma dos termos e ambas crescentes. Se a razão r da progressão aritmética é o dobro da razão q da progressão geométrica, então, o produto r.q é igual a

a) 15 b) 18 c) 21 d) 24

39) (UFMA-03) A sequência $(2^{a_1}, 2^{a_2}, 2^{a_3}, ..., 2^{a_n}, ...)$ forma uma progressão geométrica onde $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ satisfaz a lei de formação $a_{n-1} - a_n = 1/2$ para $n = 2, 3, 4, ...$, com $a_1 = 1$. Encontre a soma dessa PG infinita.

40) (Escola Naval-11) Uma PG infinita tem o 4° termo igual a 5. O logaritmo na base 5 do produto de seus 10 primeiros termos vale $10 - 15.\log_5 2$. Se S é a soma desta progressão, então o valor de $\log_2 S$ é

a) $2 + 3.\log_2 5$ b) $2 + \log_2 5$
c) $4 + \log_2 5$ d) $1 + 2.\log_2 5$
e) $4 + 2.\log_2 5$

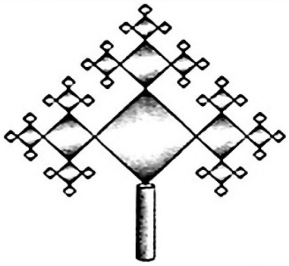
41) (AFA-14) Uma escultura de chapa de aço com espessura desprezível foi feita utilizando-se inicialmente uma chapa quadrada de 1 metro de lado apoiada por um de seus vértices sobre um tubo cilíndrico. A partir desse quadrado, a escultura foi surgindo nas seguintes etapas:

1ª) Em cada um dos 3 vértices livres do quadrado foi construído um quadrado de lado 1/2 metro.

2ª) Em cada um dos vértices livres dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado de lado 1/4 de metro.

E assim, sucessivamente, em cada vértice livre dos quadrados construídos anteriormente, construiu-se um quadrado

cuja medida do lado é a metade da medida do lado do quadrado anterior. A figura seguinte esquematiza a escultura nas etapas iniciais de sua confecção.



Considerando que a escultura ficou pronta completadas sete etapas, é correto afirmar que a soma das áreas dos quadrados da 7ª etapa é igual a

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^7$ b) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$ c) $\left(\frac{1}{4}\right)^8$ d) $\left(\frac{3}{4}\right)^8$

42) (Escola Naval-16) A soma dos três primeiros termos de uma P.G. crescente vale 13 e a soma dos seus quadrados 91. Justapondo-se esses termos nessa ordem, obtém-se um número de três algarismos. Pode-se afirmar que o resto da divisão desse número pelo inteiro 23 vale

a) 1 b) 4 c) 8 d) 9 e) 11

43) (UFSCar-00) Uma bola cai de uma altura de 30m e salta, cada vez que toca o chão, dois terços da altura da qual caiu. Seja h(n) a altura da bola no salto de número n. A expressão matemática para h(n) é:

a) $30.(2/3)^n$ b) $(2/3)(30)^n$ c) $20.n$
d) $(2/3)n$ e) $(2/3)^n$

44) (UFPB-97) Seja a_n uma progressão geométrica cuja soma dos n primeiros termos é $S_n = 3(2)^n - 3$. Determine o quarto termo dessa progressão.

45) (AFA-16) Considere as expressões

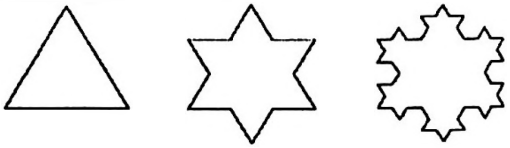
$A = 26^2 - 24^2 + 23^2 - 21^2 + 20^2 - 18^2 + ... + 5^2 - 3^2$

$B = 2.\sqrt{2}.\sqrt[4]{2}.\sqrt[8]{2}.\sqrt[16]{2}...$

O valor de $\frac{A}{B}$ é um número compreendido entre

a) 117 e 120 b) 114 e 117
c) 111 e 114 d) 108 e 111

46) (UEM-15) Um fractal é construído com uma sequência infinita de etapas da seguinte forma: começa-se com um triângulo equilátero de lado 1 cm e, a cada etapa, constrói-se um novo triângulo equilátero sobre o terço médio de cada aresta do polígono da etapa anterior. Em seguida retiram-se esses terços médios. A sequência abaixo mostra as três primeiras etapas dessa construção.



Sobre essa construção, assinale o que for correto.

01) O perímetro dos polígonos cresce em progressão geométrica.
02) A cada etapa, o número de lados do polígono triplica.
04) A cada etapa, a área do polígono duplica.
08) A área do polígono da terceira etapa é $\frac{4\sqrt{3}}{9}$ cm².
16) O perímetro do polígono da terceira etapa é $\frac{16}{9}$ cm.

47) (EsPCEx-00) Sendo **a, b** e **c**, nesta ordem, termos de uma progressão aritmética em que **a . c = 24** e **A, B** e **C**, nesta ordem, termos de uma progressão geométrica em que **A = a, B = c** e **C = 72**, então o valor de b é:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

48) (EsPCEx-01) Atribuindo-se um valor a cada letra da sigla **ESPCEX**, de modo que as letras **"E", "S", "P", "C"** e **"X"** formem nessa ordem uma progressão geométrica e que **E.P.C + E.S.X = 8**, pode-se afirmar que o produto **E.S.P.C.E.X** vale:
a) 10 b) 26 c) 20 d) 24 e) 16

49) (EsPCEx-01) A sequência de números reais **a, b, c, d** forma, nessa ordem, uma progressão aritmética cuja soma dos termos é **110**, a sequência de números reais **a, b, e, *f*** forma, nessa, uma progressão geométrica de razão **2**. A soma **d + *f*** é igual a:
a) 142 b) 132 c) 120 d) 102 e) 96

50) (EsPCEx-02) Os números a, b e c determinam, nessa ordem, uma progressão aritmética (PA) de razão r ($r \neq 0$). Na ordem b, a, c determinam uma progressão geométrica (PG). Então a razão da PG é:
a) -3 b) -2 c) -1 d) 1 e) 2

51) (AFA-99) Uma bola é solta de uma altura de 128 metros em relação ao solo, e, ao atingir o mesmo, ela sobe a metade da altura anterior. Esse movimento se repete até atingir o solo pela décima vez. Nesse momento, quanto a bola terá percorrido, em metros?
a) 255,50 b) 383,00 c) 383,50 d) 383,63

52) (AFA-00) Seja (x, y, z, w) uma progressão aritmética crescente cuja soma é 10 e (a, b, c, d) uma progressão geométrica com a + b = 1 e c + d = 9. Se ambas têm a mesma razão, então o produto yw é
a) –8 b) –2 c) 7 d) 9

53) (AFA-03) Uma P.A. cujo primeiro termo é zero e uma P.G. cujo primeiro termo é 1 possuem a mesma razão. O nono termo da P.G. é igual ao quadrado do nono termo da P.A.. Então
a) uma das razões comum é –2.
b) a razão comum é –1.
c) a razão comum é 1.
d) não existem as duas progressões.

54) (AFA-03) Considere uma P.G. onde o 1º termo é a, $a > 1$, a razão é q, $q > 1$, e o produto dos seus termos é c. Se $\log_a b = 4$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0{,}01$, então a soma dos termos da P.G. é

a) $\frac{a^{41} - a}{a^2 - 1}$ b) $\frac{a^{40} - a}{a^2 - 1}$

c) $\frac{a^{41} - 1}{a^2 - 1}$ d) $\frac{a^{40} - 1}{a^2 - 1}$

55) (Escola Naval-02) Considere uma progressão geométrica de razão maior do que 1 em que três de seus termos consecutivos representam as medidas dos lados de um triângulo retângulo. Se o primeiro termo dessa progressão geométrica é 64, então seu décimo terceiro termo vale:

a) $2(1+\sqrt{3})^6$ b) $(1+\sqrt{3})^{12}$

c) $2(1+\sqrt{5})^6$ d) $\frac{(1+\sqrt{5})^{12}}{2}$

56) (Escola Naval-03) Cada termo da sequência $(1, q, q^2, q^3, ...)$, $q \neq 0$, é igual a x vezes o limite da soma dos que o seguem se, e somente se

a) $-1 < x < 1$ b) $x > 1$
c) $x < -2$ ou $x > 0$ d) $x < -1$ ou $x > 1$
e) $0 < x < 1$

57) (ITA-53) Partindo de um quadrado Q_1, cujo lado mede a metros, consideremos os quadrados $Q_2, Q_3, Q_4, ..., Q_n$ tais que os vértices de cada quadrado sejam os pontos médios dos lados do quadrado anterior. Calcular, então, a soma das áreas dos quadrados $Q_1, Q_2, Q_3, ..., Q_n$.

58) (ITA-71) O produto dos termos da seguinte P.G.: $-\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, ..., -81\sqrt{3}$ é:

a) $-\sqrt{3^{25}}$ b) $-\sqrt{3^{42}}$ c) $-\sqrt{5.3^9}$
d) $-\sqrt{3^{45}}$ e) N.d.r.a.

59) (ITA-67) É dada uma progressão geométrica com 1.000 termos; a razão dessa progressão é igual ao seu primeiro termo. A soma dos logaritmos neperianos dos termos dessa progressão é 1.001.000. O primeiro termo dessa progressão é:

a) 2 b) 2^2 c) $e^{1/2}$ d) e^2 e) e

60) (ITA-71) A seguinte soma

log 1/2 + log 1/4 + ... + log $1/2^n$

com n natural, é igual a:

a) $\log (n + n^3)/2$ b) $(n + n^2) \log \sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $-n(n+1)^2 \log 2$ d) $\frac{(n^2-1)}{2} 2^{\sqrt{2}}$

e) N.d.r.a.

61) (ITA-72) Consideremos a função $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (\text{sen } x)^n$, onde $0 < x < \pi/2$. Para que valores de x: $10 \leq S(x) \leq 20$?

a) arc sen $9/10 \leq x \leq$ arc sen $19/20$
b) arc sen $10/9 \leq x \leq$ arc sen $20/19$
c) arc sen $10/11 \leq x \leq$ arc sen $20/21$
d) arc sen $\sqrt{2}/2 \leq x \leq$ arc sen $\sqrt{3}/2$
e) n. d .a.

62) (ITA-74) Seja $a > 0$ o 1° termo de uma progressão aritmética de razão r e também uma progressão geométrica de razão $q = 2r\frac{\sqrt{3}}{3a}$. A relação entre a e r para que o 3° termo da progressão geométrica coincida com a soma dos 3 primeiros termos da progressão aritmética é:

a) $r = 3a$ b) $r = 2a$
c) $r = a$ d) $r = \sqrt{2a}$
e) nenhuma das respostas anteriores.

63) (ITA-75) A expressão:

$$1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + \frac{5}{16} + ...$$

vale:

a) 4 b) 9/2 c) 7/2 d) 3,8 e) nda

64) (ITA-77) Sendo $S_k = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (k + 1)x^k$, onde $x > 1$ e k é um inteiro maior que 2, então, se n é um inteiro maior que 2,

a) $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2}$

b) $S_n = \frac{1+x^{n+1}}{(1-x)^2} + \frac{(n+2)}{1-x} x^{n+1}$

c) $S_n = \frac{1+x^{n+1}}{(1-x)} - \frac{(n+2)}{(1-x)^2} x^{n+1}$

d) $S_n = \frac{1-x^{n+1}}{(1-x)^2} - \frac{(n+1)}{1-x} x^{n+1}$

e) nenhuma das respostas anteriores.

65) (ITA-79) Considere uma progressão geométrica, onde o primeiro termo é a, $a > 1$, a razão é q, $q > 1$, e o produto dos seus termos é c. Se $\log_a b = 4$, $\log_q b = 2$ e $\log_c b = 0{,}01$, quantos termos tem esta progressão geométrica?
a) 12 b) 14 c) 16 d) 18 e) 20

66) (ITA-81) Se os três lados de um triângulo estão em progressão geométrica, então a razão desta progressão está compreendida necessariamente entre os valores:
a) $\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$
b) $\frac{1}{2}(\sqrt{4}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{4}+1)$
c) $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$
d) $\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)$ e $\frac{1}{2}(\sqrt{2}+1)$
e) 0 e 1

67) (ITA-82) Seja $a_1, a_2, ..., a_n$, ($a_1 > 0$, i = 1, 2, ..., n) uma progressão geométrica de razão r e f: $R^* \rightarrow R$ uma função definida por $f(x) = \log(qx^p)$ onde p e q são números reais positivos. Nestas condições, $f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)$ é
a) uma progressão geométrica de razão $\log(q\, r^p)$
b) uma progressão geométrica de razão p log r
c) uma progressão aritmética de razão log q + p.log a_1
d) uma progressão aritmética de razão log q + p.log r
e) uma progressão aritmética de razão p log r

68) (ITA-85) Sejam $a_1, a_2, ..., a_n$ números reais positivos e $P_n = a_1 . a_2 ... a_n$. Se $a > 0$ é uma constante real tal que $P_n = \frac{p^{n^2-n}}{2^n}$, então podemos afirmar que os números $a_1, a_2, ..., a_n$, nesta ordem:
a) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p$ e $a_n = (p^{2n})/2$
b) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p$ e $a_n = (p^n)/2$
c) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p^2$ e $a_n = (p^n)/2$
d) Formam uma progressão geométrica de razão $q = p^2$ e $a_n = (p^{2n})/2$
e) Não formam uma progressão geométrica.

69) (ITA-86) Sejam os números reais $x > 0$, $a > b > 1$. Os três números reais x, $\sqrt{x \log_a b}$, $\log_a(bx)$ são, nesta ordem, os três primeiros termos de uma progressão geométrica infinita. A soma S desta progressão vale:
a) $S = 2x/(1 - \log_a b)$
b) $S = (x + 1)/(1 - 1/2\log_a b)$
c) $S = 1/(1 - \sqrt{\log_a b})$
d) $S = 1/(1 + \sqrt{\log_a b})$
e) Impossível determinar S pois é finito.

70) (ITA-87) Seja $f: \Re \rightarrow \Re$ uma função real tal que: $f(x) \neq 0$, para cada x em $\Re$ e $f(x + y) = f(x).f(y)$, para todos x e y em $\Re$. Considere (a_1, a_2, a_3, a_4) uma PA de razão r, tal que $a_1 = 0$. Então $(f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4))$
a) É uma PA de razão igual a f(r) e 1° termo $f(a_1) = f(0)$
b) É uma PA de razão igual a r
c) É uma PG de razão igual a f(r) e 1° termo $f(a_1) = 1$

d) É uma PG de razão igual a r e 1° termo $f(a_1) = f(0)$
e) Não é necessariamente uma PA ou PG.

71) (ITA-88) Suponha que os números 2, x, y e 1458 estão, nesta ordem, em progressão geométrica. Desse modo o valor de x + y é:
a) 90 b) 100 c) 180 d) 360 e) 1460

72) (ITA-92) Numa progressão geométrica de razão inteira $q > 1$, sabe-se que $a_1 a_n = 243$, $\log_q a_n = 6$ e $\log_q P_n = 20$, onde a_n é o enésimo termo da progressão geométrica e P_n é o produto dos n primeiros termos. Então a soma dos n primeiros termos é igual a:
a) $(3^9 - 1)/6$ c) $(3^8 - 1)/6$ e) n.d.a
b) $(3^{10} - 1)/6$ d) $(3^9 - 1)/3$

73) (ITA-95) Se a soma dos termos da progressão geométrica dada por 0,3 : 0,03 : 0.003 : ... é igual ao termo médio de uma progressão aritmética de três termos, então a soma dos termos da progressão aritmética vale:
a) 1/3 b) 2/3 c) 1 d) 2 e) 1/2

74) (ITA-97) Seja θ um valor fixado no intervalo $]0, \pi/2[$. Sabe-se que $a_1 = \cotg \theta$ é o primeiro termo de uma progressão geométrica infinita de razão $q = \sen^2 \theta$. A soma de todos os termos dessa progressão é:
a) $\operatorname{cosec} \theta \tg \theta$ b) $\sec \theta \tg \theta$
c) $\sec \theta \operatorname{cosec} \theta$ d) $\sec^2 \theta$
e) $\operatorname{cosec}^2 \theta$

75) (ITA-98) Seja $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ uma progressão geométrica infinita de razão a_1, $0 < a_1 < 1$, e soma igual a $3a_1$. A soma dos três primeiros termos desta progressão geométrica é:
a) 8/27 b) 20/27 c) 26/27
d) 30/27 e) 38/27

76) (IME-66) A soma de três números que formam uma P.A. crescente é 36. Determine esses números, sabendo que se somarmos 6 unidades ao último, eles passam a constituir uma P.G.

77) (IME-67) Entre os números 3 e 192 ingere-se igual número de meios aritméticos e geométricos com razões r e q respectivamente. Sabe-se que o terceiro termo do desenvolvimento $(1 + 1/q)^8$ em potências de 1/q é r/9q. Pede-se determinar as progressões.

78) (IME-82) Três progressões geométricas têm mesma razão q e primeiros termos diferentes **a, b, c**. A soma dos **n** primeiros termos da primeira é igual a soma dos **2n** primeiros termos da segunda e também é igual a soma dos **3n** primeiros termos da terceira. Mostrar que a relação que liga as razões **b/a** e **c/a**, em função somente de **a, b, c** é:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{1}{(b/a)^2} - \frac{1}{b/a} + 1}.$$

79) (IME-86) Mostre que os números 12, 20 e 35 não podem ser termos de uma mesma progressão geométrica.

80) (IME-88) Para cada n inteiro, $n \geq 1$, define-se a equação E_n por $x^2 - 15.2^{2n}x + 36.2^{4n} = 0$.
a) Mostre que a sequência, cujo k-ésimo termo é a menor raiz da equação E_k, é uma progressão geométrica.

b) Calcule a razão desta progressão.
c) Calcule a soma dos i primeiros termos desta progressão.

81) (IME-89) Três números cuja soma é 126, estão em progressão aritmética e outros três em progressão geométrica. Somando os termos correspondentes das duas progressões obtém-se 85, 76 e 84 respectivamente. Encontre os termos destas progressões.

82) (IME-07) Considere uma sequência de triângulos retângulos cuja lei de formação é dada por:

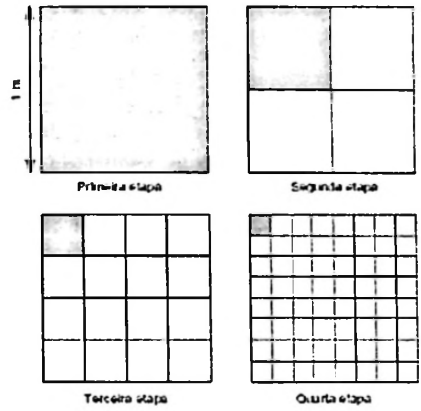
$$a_{K+1} = \frac{2}{3}a_K$$

$$b_{K+1} = \frac{4}{5}b_K$$

onde a_K e b_K, para $K \geq 1$, são os comprimentos dos catetos do K-ésimo triângulo retângulo. Se $a_1 = 30$ cm e $b_1 = 42$ cm, determine o valor da soma das áreas de todos os triângulos quando $K \to \infty$.

83) (ITA-06) Seja $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ uma progressão geométrica infinita de razão positiva r, em que $a_1 = a$ é um número real não nulo. Sabendo que a soma de todos os termos de índices pares desta progressão geométrica é igual a 4 e que a soma de todos os termos de índices múltiplos de 3 é 16/13, determine o valor de a + r.

84) (IME-07) Um quadrado de lado igual a um metro é dividido em quatro quadrados idênticos. Repete-se esta divisão com os quadrados obtidos e assim sucessivamente por n vezes. A figura abaixo ilustra as quatro primeiras etapas desse processo. Quando $n \to \infty$, a soma em metros dos perímetros dos quadrados hachurados em todas as etapas é:



a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

85) (IME-06) Sejam $a_1 = 1 - i$, $a_n = r + si$ e $a_{n+1} = (r - s) + (r + s)i$ $(n > 1)$ termos de uma sequência. Determine, em função de **n**, os valores de **r** e **s** que tornam esta sequência uma progressão aritmética, sabendo que **r** e **s** são números reais e $i = \sqrt{-1}$.

86) (IME-09) Dada a função $F: IN^2 \to IN$, com as seguintes características:
$F(0,0) = 1$
$F(n, m + 1) = q.\ F(n, m)$, onde q é um número real diferente de zero;
$F(n + 1, 0) = r + F(n, 0)$, onde r é um número real diferente de zero.
Determine o valor de $\sum_{i=0}^{2009} F(i,i), i \in IN$.

87) (ITA-10) A progressão geométrica infinita $(a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ tem razão $r < 0$. Sabendo-se que a progressão

infinita (a_1, a_6, ..., a_{5n+1},...) tem soma 8 e a progressão infinita (a_5, a_{10}, ...,a_{5n},...) tem soma 2. Determine a soma da progressão infinita (a_1, a_2, ..., a_n, ...)

88) (ITA-15) Sabe-se que 1, *B, C, D* e *E* são cinco números reais que satisfazem às propriedades:
(i) *B, C, D, E* são dois a dois distintos;
(ii) os números 1, *B, C,* e os números 1, *C, E,* estão, nesta ordem, em progressão aritmética;
(iii) os números *B, C, D, E,* estão, nesta ordem, em progressão geométrica.
Determine *B, C, D, E.*

89) (ITA-08) Uma sequência de quatro termos forma uma PG. Subtraindo-se 2 do primeiro termo e k do quarto termo, transforma-se a sequência original em uma PA. Uma terceira sequência é obtida somando-se os termos correspondentes da PG e da PA. Finalmente, uma quarta sequência, uma nova PA, é obtida a partir da terceira sequência, subtraindo-se 2 do terceiro termo e sete do quarto. Determine os termos da PG original.

90) (IME-12) O segundo, o sétimo e o vigésimo sétimo termos de uma Progressão Aritmética (PA) de números inteiros, de razão *r*, formam, nesta ordem, uma Progressão Geométrica (PG), de razão *q*, com q e $r \in$ IN (natural diferente de zero). Determine:
a) o menor valor possível para a razão *r*;
b) o valor do décimo oitavo termo da PA, para a condição do item a.

91) (IME-11) Os números m, 22.680 e n fazem parte, nessa ordem, de uma progressão geométrica crescente com razão dada por q. Sabe-se que:
- existem, pelo menos, dois elementos entre m e 22.680;
- n é o sexto termo dessa progressão geométrica;
- $n \leq 180.000$.

Determine os possíveis valores de m e n, sabendo que m, n e q são números naturais positivos.

92) (IME-17) Sejam uma progressão aritmética (a_1, a_2, a_3, a_4, ...) e uma progressão geométrica (b_1, b_2, b_3, b_4, ...) de termos inteiros, de razão r e razão q, respectivamente, onde r e q são inteiros positivos, com $q > 2$ e $b_1 > 0$. Sabe-se, também, que $a_1 + b_2 = 3$, $a_4 + b_3 = 26$. O valor de b_1 é:
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

93) (IME-08) Seja a_i um dos termos da progressão geométrica com oito elementos $\left(2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$, e $S = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \ldots + \log_2 a_8$. Se $b = \frac{S}{-5}$ e $f(x) = |x + 2b| + |2x - b|$, o valor de f(1) será:
a) -7 b) 7 c) 11
d) -11 e) 1

94) (Escola Naval-18) Sejam (a_n), (b_m), (c_k) três progressões geométricas de razão q e primeiro termo x. (b_m) tem o dobro de termos de (a_n), e (c_k) tem $\frac{3}{2}$ termos de (b_m). Sabendo que a soma dos termos de (a_n) é igual a 10 e a soma dos termos de (c_k) é $\frac{42}{5}$, assinale a opção que

apresenta a diferença, em módulo, dos possíveis valores da soma dos termos de (b_m).

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 14

Exercícios Gerais

95) Em um círculo de raio R inscreve-se um quadrado, neste quadrado inscreve-se um círculo, neste círculo um outro quadrado e assim sucessivamente. Calcular o limite da soma das áreas dos círculos.

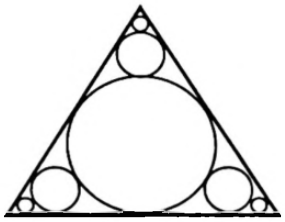
96) A soma de três números positivos em progressão aritmética é 30. Se esses números forem aumentados de 1, 4 e 14, respectivamente, os novos números estarão em progressão geométrica. Achar esses números.

97) Em um conjunto de quatro números os três primeiros estão em progressão geométrica e os três últimos estão em progressão aritmética com razão 6. O primeiro número é igual ao quarto. Ache a soma desses números.

98) Calcular todos os ângulos x, em radianos, de modo que os números $(\text{sen } x)/2$, sen x, tg x formem uma P.G.

99) Calcular os quatro ângulos de um quadrilátero, sabendo que os ângulos estão em PG e que o último é igual a nove vezes o segundo.

100) É dado um triângulo equilátero de lado a, nele inscreve-se um círculo, depois 3 círculos tangentes ao primeiro e aos lados do triângulo, depois 3 círculos tangentes aos 3 círculos precedentes a aos lados do triângulo, e assim por diante. Demonstrar que o limite da soma das áreas dos círculos inscritos é igual a $\frac{11\pi a^2}{96}$.



101) Provar que se uma P.G. apresenta $a_m = x$, $a_n = y$ e $a_p = z$, então verifica-se a relação:

$$x^{(n-p)}.y^{(p-m)}.z^{(m-n)} = 1.$$

102) Provar que se x, y, z estão em P.G. nesta ordem, vale a relação:

$$(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

103) Provar que se a, b, c formam nesta ordem uma P.A. e uma P.G., então $a = b = c$.

104) Provar que se os números a, b, c, d formam nesta ordem uma P.G. então vale a relação:

$$(b - c)^2 + (c - a)^2 + (d - b)^2 = (a - d)^2.$$

105) Provar que em toda PG:

$$S_n^2 + S_{2n}^2 = S_n.(S_{2n} + S_{3n}).$$

106) Dados os termos $a_{m-n} = A$ e $a_{m-n} = B$ de uma progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ache a_m e a_n $(A \neq 0)$.

107) Prove que os números 49, 4489, 444889, ... obtidos inserindo 48 no meio do termo anterior são quadrados de números inteiros.

108) Seja S_n a soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica ($S_n \neq 0$, $q \neq 0$). Prove que:

$$\frac{S_n}{S_{2n} - S_n} = \frac{S_{2n} - S_n}{S_{3n} - S_{2n}}.$$

109) Três números formam uma progressão aritmética de razão 11. Se ao primeiro termo é somado 6, ao segundo é subtraído 1 e o terceiro é dobrado, o resulta agora em uma progressão geométrica. Determine os termos da progressão aritmética.

110) Uma PG infinita possui soma 2005. Uma nova sequência, obtida elevando ao quadrado cada termo da PG original, possui soma 10 vezes a soma da PG original. Determine a razão da PG original.

111) A soma dos primeiros 2011 termos de uma PG é 200. A soma dos primeiros 4022 termos é 380. Determine a soma dos primeiros 6033 primeiros termos.

112) Numa progressão aritmética, não constante, de termos inteiros positivos, o 1º termo, o j-ésimo e o k-ésimo ($1 < j < k$) formam, nesta ordem, uma progressão geométrica. Demonstre que a razão da PG é igual a $(k - j)/(j - 1)$.

113) Prove que a soma dos primeiros n termos da sequência:

$1, (1 + 2), (1 + 2 + 2^2), (1 + 2 + 2^2 + 2^3),$
$\ldots, (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1})$

em termos de n é $2^{n+1} - n - 2$.

114) Uma P.G. finita tem n termos. Sendo S a soma dos termos, S' a soma dos inversos e P o produto dos elementos, provar que $P^2 = S/S'$.

115) Seja a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 uma progressão geométrica de razão r. Se $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3124$, e $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 2343$, determinar r e a_3.

116) Sejam uma Progressão geométrica $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ e uma Progressão Aritmética $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$, que verificam as condições: $a_1 > 0$, $a_2/a_1 > 0$ e $b_2 - b_1 > 0$. Determine um número α tal que a expressão $(\log_\alpha a_n) - b_n$ não depende de n.

117) Para $-1 < r < 1$, seja S(r) a soma da PG: $12 + 12r + 12r^2 + 12r^3 + \ldots$. Seja k entre -1 e 1 que satisfaz $S(k).S(-k) = 2016$. Determine $S(k) + S(-k)$.

118) Duas PGs $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ possuem mesma razão, com $a_1 = 27$, $b_1 = 99$ e $a_{15} = b_{11}$. Determine a_9.

Exercícios de Olimpíada

119) (Cone Sul-88) Calcular o valor da soma, onde o último número possui n dígitos:

$1 + 11 + 111 + 1111 + 111\ldots111$

120) (Campina Grande-05) Uma sequência (infinita) de números reais a_1, $a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots$ é dita uma *progressão geométrica* se existe uma

constante real q tal que, para todos n natural, $a_{n+1} = a_1 q^n$. Neste caso, denominamos $a_1, a_2, a_3, \ldots$ os termos e q a razão da progressão. Mostre que não existe uma progressão geométrica que admita 1, 7 e 512 como seus termos.

121) (Grande PoA-16) Determinar todas as PG que têm três termos consecutivos tais que o produto deles vale 64 e a sua soma vale 14.

122) (AIME-03) Em uma sequência crescente de quatro inteiros positivos, os primeiros três termos formam uma progressão aritmética, os últimos três termos formam uma progressão geométrica e o primeiro e o quarto termos diferem por 30. Determine a soma dos quatro termos.

123) (AIME-11) A soma dos primeiros 2011 termos de uma progressão geométrica é 200. A soma dos primeiros 4022 termos é 380. Determine a soma dos primeiros 6033 termos.

124) (AIME-09) Chamamos um número de três digito de geométrico se ele possui 3 dígitos distintos que, quando lidos da esquerda para direita, formam uma progressão geométrica. Determine a diferença entre o maior e o menor números geométricos.

125) (AIME-20) Existe um único número real positivo x tal que os três números $\log_8 2x$, $\log_4 x$ e $\log_2 x$, nesta ordem, formam uma progressão geométrica com razão positiva. Determine x.

126) (Campina Grande-19) Sabe-se que o número dado abaixo

$$\gamma = 1 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \frac{3}{10^4} + \ldots$$

é um número racional. Pode-se afirmar que $\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$ é:

a) 1/7 b) $-1/7$ c) 7 d) -7 e) 1

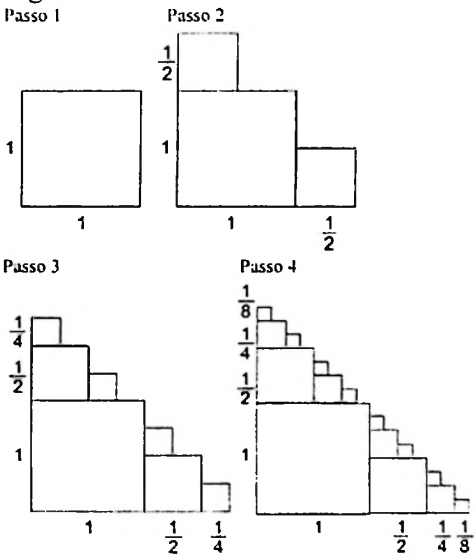
127) (Rio Grande do Norte-19) Seja:

$$K = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{9999..99}_{321 \text{ dígitos}}.$$

A soma dos dígitos de K é igual a:

a) 321 b) 322 c) 341
d) 342 e) 642

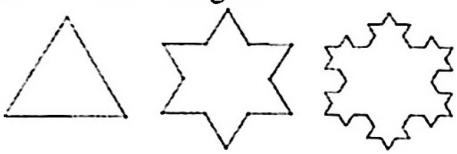
128) (Santa Catarina-09) Considere a figura plana construída com quadrados empilhados de forma recursiva da seguinte maneira:



Após uma infinidade de passos obtemos uma figura final com infinitos quadrados (suponha que isso fosse possível de ser feito).

a) Calcule o perímetro da figura final.
b) Calcule a área da figura final.

129) (Campina Grande-18) Seja F_0 o triângulo equilátero de lado 1. Defina, recursivamente, F_{k+1} a figura obtida de F_k como segue: trisectando cada lado da figura F_k, construímos um triângulo equilátero, exterior à figura F_k, assentando sobre o segmento do meio do lado trisectado e removemos o segmento do meio do lado trisectado que formou a base do novo triângulo.



(a) Figura F_0 (b) Figura F_1 (c) Figura F_2

a) Para cada $n \in \mathbb{N}$, determine a área de F_n.
b) Mostre que F_n não cresce indefinidamente, isto é, que existe uma constante $C > 0$ tal que

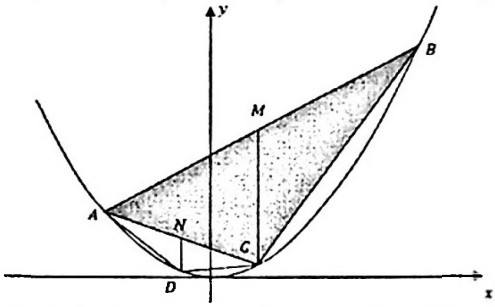
$$\text{Área}(F_n) \leq C, \forall n \in \mathbb{N}.$$

130) (Irlanda-96) Prove a inequação:

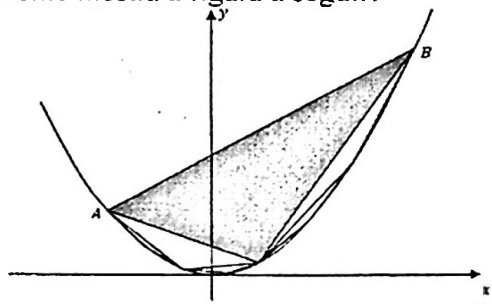
$$2^{\frac{1}{2}}.4^{\frac{1}{4}}.8^{\frac{1}{8}}...(2^n)^{\frac{1}{2^n}} < 4$$

para todo inteiro positivo n.

131) (São Paulo-16) Considere o gráfico da função $f(x) = x^2$. Escolhemos dois pontos $A = (a, a^2)$ e $B = (b, b^2)$ sobre o gráfico. Nesse problema, calcularemos a área da região R delimitada pelo segmento AB e pelo gráfico da função, usando um método criado por Arquimedes no século III a.C. Seja M o ponto médio de AB, C o ponto sobre o gráfico tal que MC é paralelo ao eixo y, N o ponto médio de AC e D o ponto sobre o gráfico tal que ND é paralelo ao eixo y.



a) Calcule o comprimento de MC em função de a e b.
b) Calcule o comprimento de ND em função de a e b.
c) Calcule a razão entre a altura relativa a ND no triângulo AND e a altura relativa a MC no triângulo AMC. Em seguida, calcule a razão entre as áreas de ACD e ABC.
d) A ideia principal de Arquimedes é dividir a região R em infinitos triângulos, como mostra a figura a seguir:



Começamos com o triângulo ABC, depois usamos os pontos médios de AC e BC para construir os dois triângulos cinza claro, depois usamos os pontos médios dos lados virados "para baixo" nesses dois triângulos para construir os quatro triângulos brancos (o da direita é "fininho" demais para ser visto), e assim por diante. Em cada passo, construímos o

dobro da quantidade de triângulos construídos no passo anterior.

Prove que a área da região R é $\frac{(b-a)^3}{6}$.

132) (Carnegie Mellon-19) Sejam a_1, a_2, ..., a_n uma progressão geométrica com $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_2 = \sqrt[3]{3}$. Qual é o valor de:

$$\frac{a_1 + a_{2013}}{a_7 + a_{2019}}?$$

133) (AHSME-71) Se P é o produto dos n primeiros termos de uma progressão geométrica, S a soma dos termos e S' a soma dos recíprocos dos termos, então P em termos de S, S' e n é

a) $(SS')^{\frac{1}{2}n}$ b) $(S/S')^{\frac{1}{2}n}$

c) $(SS')^{n-2}$ d) $(S/S')^n$

e) $(S/S')^{\frac{1}{2}n(n-1)}$

134) (Euclid-76) Dado que os números reais x, y e 2 estão em progressão geométrica e que x^{-1}, y^{-1} e $9x^{-2}$ estão em progressão aritmética, então determine o valor numérico de xy.

135) (AHSME-77) Se a_1, a_2, a_3, ... é uma sequência de números tais que $a_{n+2} = a_n.a_{n+1}$ para todos os inteiros positivos n, então a sequência a_1, a_2, a_3, ... é uma progressão geométrica

a) para todos os valores positivos de a_1 e a_2.

b) se e somente se $a_1 = a_2$.

c) se e somente se $a_1 = 1$.

d) se e somente se $a_2 = 1$.

e) se e somente se $a_1 = a_2 = 1$.

136) (AHSME-76) Seja uma progressão geométrica com n termos possuindo o primeiro termo igual a 1, razão r e soma s, onde r e s são não nulos. Então a soma dos termos da progressão formada trocando cada termo da progressão original pelo seu recíproco é

a) $\frac{1}{s}$ b) $\frac{1}{r^n s}$ c) $\frac{s}{r^{n-1}}$

d) $\frac{r^n}{s}$ e) $\frac{r^{n-1}}{s}$

137) (AHSME-78) Se os números distintos não nulos $x(y-z)$, $y(z-x)$, $z(x-y)$ formam uma progressão geométrica com razão r, então r satisfaz a equação

a) $r^2 + r + 1 = 0$ b) $r^2 - r + 1 = 0$

c) $r^4 + r^2 - 1 = 0$ d) $(r+1)^4 + r = 0$

e) $(r-1)^4 + r = 0$

138) (Estônia-00) Seja $x \neq 1$ um número positivo fixado e a_1, a_2, a_3, ... algum tipo de sequência de números. Prove que x^{a_1}, x^{a_2}, x^{a_3}, ... é uma sequência geométrica não constante se e somente se a_1, a_2, a_3, ... é uma sequência aritmética não constante.

139) (AIME-12) Duas progressões geométricas a_1, a_2, a_3, ... e b_1, b_2, b_3, ... possuem mesma razão, com $a_1 = 27$, $b_1 = 99$ e $a_{15} = b_{11}$. Determine a_9.

SEQUÊNCIAS RECORRENTES

4.1. DEFINIÇÃO

Uma sequência é dita recorrente quando a relação entre seus termos é dada por uma equação de recorrência, que é uma expressão matemática que relaciona um termo da sequência em função do(s) anterior(es). Por exemplo, podemos definir uma sequência (a_n) de acordo com a relação de recorrência $a_n = a_{n-1} + (a_{n-2})^2$, $n \geq 3$, com $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Neste caso relacionamos um termo com os dois termos anteriores.

4.2. CLASSIFICAÇÃO

Existem três classificações mais importantes para uma sequência recorrente:

i) Ordem ou Grau: A ordem (ou grau) de uma equação recorrente é igual à diferença entre o maior e o menor índices dos termos que pertencem à equação de recorrência. Por exemplo, a equação de recorrência $x_n = \frac{x_{n-1}}{x_{n-3}}$, com $n \geq 4$, é de 3ª ordem (ou grau 3), uma vez que a diferença entre o maior e o menor dos índices dos termos é igual a 3: $n - (n-3) = 3$.

ii) Linearidade: Afirmamos que uma sequência (a_n) possui uma equação de recorrência linear se esta é da forma $a_n = k_{n-1}.a_{n-1} + k_{n-2}.a_{n-2} + \ldots + k_1.a_1 + k_0.a_0$, onde k_i são constantes reais. Assim, são exemplos de sequências recorrentes lineares: $x_n = 3x_{n-1} - 15x_{n-2}$ e $x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + x_{n-3} + x_{n-4}$. Caso a equação de recorrência possua alguma parcela não linear, esta equação é chamada de não-linear. São exemplos de equações recorrentes não-lineares: $x_n = x_{n-1}.x_{n-2}$, $x_n = \frac{1}{x_{n-1}}$, $x_n = 2^{x_{n-1}} + 3^{x_{n-2}}$, $x_n = \mathrm{tg}(x_{n-1}) + \cot(x_{n-2})$ e $x_n = \sqrt{x_{n-1}^2 + x_{n-2}^2}$.

iii) Homogeneidade: Uma sequência recorrente é classificada como homogênea se todas as parcelas que incluem algum x_k forem escritas em um lado da igualdade e o outro lado seja igual a zero. São exemplos de sequências recorrentes homogêneas: $x_n - 2x_{n-1} + 3x_{n-2} = 0$, $x_n - 5x_{n-1}^2 + 3^{x_{n-2}} = 0$ e $x_n^2 - x_{n-1}x_{n-2} = 0$.

Uma sequência recorrente é classificada como não-homogênea se todas as parcelas que incluem algum x_k forem escritas em um lado da igualdade e o outro lado não seja igual a zero (normalmente é igual a um número ou uma função de n). São exemplos de sequências recorrentes homogêneas: $x_n - 5x_{n-1} + 4x_{n-2} = 1$, $2^{x_n} - 2^{x_{n-1}} = 2^n$ e $x_n^2 - 3\,\mathrm{tg}(x_{n-1}) + \frac{x_{n-2}}{x_{n-3}} = n^3 + 2n^2 - n + 3$.

4.3. SEQUÊNCIAS RECORRENTES LINEARES DE 1ª ORDEM

4.3.1. Sequências Recorrentes De 1ª Ordem Homogêneas

As sequências recorrentes de 1ª ordem homogêneas são da forma $x_n = a.x_{n-1}$, $a \in \mathbb{R}^*$. Se $a = 1$ a sequência é constante, com termo geral dado por $x_n = x_1$, $n \geq 1$. Se $a \neq 1$ a sequência é uma progressão geométrica de razão a, cujo termo geral é dado por $x_n = x_1.a^{n-1}$, $n \geq 1$.

4.3.2. Sequências Recorrentes De 1ª Ordem Não-Homogêneas

4.3.2.1. $x_n = a.x_{n-1} + b$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$

Suponha que uma sequência numérica tenha equação recorrente na forma $x_n = a.x_{n-1} + b$, onde b é um número real e $a \neq 0$. Se $a = 1$ a sequência é uma progressão aritmética de razão b, cujo termo geral é $x_n = x_1 + (n-1)b$, que já foi estudada no capítulo 2. Por outro lado, se $a \neq 1$ é possível encontrar uma sequência y_n, relacionada com x_n na forma $x_n = y_n + k$ ($k \in \mathbb{R}$), de modo que a equação de recorrência de (y_n) seja $y_n = a.y_{n-1}$ (que é uma PG!). Observe a demonstração abaixo:

Se $x_n = a.x_{n-1} + b$ ($a \neq 0$ e $b \neq 0$) e $x_n = y_n + k$ então:

$$y_n + k = a(y_{n-1} + k) + b \Rightarrow y_n = a.y_{n-1} + k(a-1) + b.$$

Para que se válida a expressão $y_n = a.y_{n-1}$, basta fazer $k(a-1) + b = 0$, ou seja, impor que $k = \dfrac{b}{1-a}$. Deste modo, o termo geral de x_n pode ser determinado:

$$y_n = y_1.a^{n-1} \Rightarrow x_n - k = (x_1 - k)a^{n-1} \Rightarrow x_n - \frac{b}{1-a} = \left(x_1 - \frac{b}{1-a}\right)a^{n-1} \Rightarrow$$

$$x_n = \left(x_1 + \frac{b}{a-1}\right)a^{n-1} - \frac{b}{a-1}$$

Por exemplo, considere a sequência (a_n) dada pela relação de recorrência de 1ª ordem $a_n = 2.a_{n-1} + 1$, $a_1 = 2$. Note que a equação de recorrência $a_n = 2.a_{n-1} + 1$ é equivalente à $(a_n + 1) = 2(a_{n-1} + 1)$. Assim, se definirmos uma sequência (b_n) de modo que $b_n = a_n + 1$, então temos a relação $b_n = 2.b_{n-1}$, que é uma equação de recorrência que caracteriza uma progressão geométrica de razão 2. Portanto, temos que o termo geral da sequência (b_n) é dado por:

$$b_n = b_1.2^{n-1} \Rightarrow a_n + 1 = (a_1 + 1)2^{n-1} \Rightarrow \mathbf{a_n = 3.2^{n-1} - 1,\ n \geq 1.}$$

Existe outra forma de proceder, que gera menos contas para se chegar no termo geral da sequência e dispensa a utilização de uma sequência auxiliar. Do exposto acima, pode-se concluir que o termo geral de uma sequência que possui uma equação de recorrência linear de 1ª ordem na forma $x_n = a.x_{n-1} + b$, $a \neq 0$, $a \neq 1$, $b \neq 0$, é dado por $x_n = \alpha.a^{n-1} + \beta$, onde α e β são constantes reais que devem ser calculadas. Para determinar os valores de α e β basta saber o valor de dois termos da sequência e,

após substituir estes valores na expressão do termo geral, montar um sistema linear de duas equações em α e β.

Por exemplo, vamos determinar o termo geral da sequência $a_n = 3.a_{n-1} - 2$, onde $a_1 = 3$. Utilizando o último procedimento exposto, pode-se afirmar que o termo geral é da forma $a_n = \alpha.3^{n-1} + \beta$. Observando que $a_1 = 3$ e $a_2 = 7$, então pode-se formar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 3 \\ 3\alpha + \beta = 7 \end{cases} \Rightarrow 2\alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow \beta = 1 \Rightarrow a_n = 2.3^{n-1} + 1.$$

Perceba que este procedimento somente pode ser aplicado em sequências recorrentes da forma $x_n = a.x_{n-1} + b$ com $b \in \mathbb{R}$. Caso b seja uma função de n não constante, não é possível afirmar que o termo geral seja da forma $x_n = \alpha.a^{n-1} + \beta$.

4.3.2.2. $x_n = ax_{n-1} + b^n$, $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$

Considere a sequência auxiliar y_n de modo que $x_n = a^n y_n$. Substituindo na equação recorrente:

$$a^n y_n = a.a^{n-1} y_{n-1} + b^n \Rightarrow a^n(y_n - y_{n-1}) = b^n \Rightarrow y_n - y_{n-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Fazendo n = 2, 3, 4, ..., n segue que:

$$y_2 - y_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2$$

$$y_3 - y_2 = \left(\frac{b}{a}\right)^3$$

$$y_4 - y_3 = \left(\frac{b}{a}\right)^4$$

...

$$y_n - y_{n-1} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Somando todas essas expressões:

$$y_n - y_1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{b}{a}\right)^n \Rightarrow \frac{x_n}{a^n} - \frac{x_1}{a} = \frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1} - 1\right]}{\frac{b}{a} - 1} \Rightarrow$$

$$x_n = a^{n-1}.x_1 + \frac{b^2(b^{n-1} - a^{n-1})}{b - a}$$

Exercícios Resolvidos

1) (Olimpíada da Bélgica-86) Uma sequência de números $\{a_k\}$ é definida como segue: $a_0 = 0$, $a_{k+1} = 3a_k + 1$, $k \geq 0$. Mostre que a_{155} é divisível por 11.

Solução:

Uma equação recorrente da forma $a_{k+1} = 3a_k + 1$ possui termo geral do seguinte modo: $a_n = A.3^n + B$.

i) $a_0 = 0 \Rightarrow 0 = A + B$;

ii) $a_1 = 1 \Rightarrow 1 = 3A + B$;

Resolvendo este sistema obtemos $A = 1/2$ e $B = -1/2$. Portanto: $a_n = \frac{3^n - 1}{2}$, $n \geq 0$.

Logo: $a_{155} = \frac{3^{155} - 1}{2}$. Como $3^5 = 243 = 11.22 + 1 = 11.k + 1 \Rightarrow$

$(3^5)^{31} = (11.k + 1)^{31} \Rightarrow 3^{155} = 11.q + 1$ $(q \in \mathbb{N}) \Rightarrow 3^{155} - 1 = 11.q \Rightarrow 11 \mid a_{155}$.

2) Demonstre que todos os números da forma $7^n - 1$ são divisíveis por 6.

Solução:

Considere a sequência $x_n = 7^n - 1$. O termo seguinte é $x_{n+1} = 7^{n+1} - 1$.

Agora note que: $x_n = 7^n - 1 \Rightarrow 7x_n = 7^{n+1} - 7 = x_{n+1} + 1 - 7 \Rightarrow x_{n+1} = 7x_n + 6$

Deste modo, conclui-se que $x_n = 7^n - 1$ é termo geral da recorrência linear de 1ª ordem $x_{n+1} = 7x_n + 6$ e $x_1 = 6$.

Observe que, se $x_n = 6k$, $k \in \mathbb{N}$, então $x_{n+1} = 7.6k + 6 = 6(7k + 1)$, ou seja, $6 \mid x_{n+1}$.

Assim, por indução, segue que $6 \mid x_n$, ou seja, $6 \mid 7^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

3) Determine o termo geral da sequência dada por $x_n = 3x_{n-1} + 3^n$, $x_1 = 2$.

Solução:

Seja a sequência auxiliar y_n tal que $x_n = 3^n y_n$. Assim:

$$x_n = 3x_{n-1} + 3^n \Rightarrow 3^n y_n = 3.3^{n-1} y_{n-1} + 3^n \overset{\div 3^n}{\Rightarrow} y_n = y_{n-1} + 1,$$ que é PA, ou seja:

$$y_n = y_1 + n - 1 \Rightarrow \frac{x_n}{3^n} = \frac{x_1}{3} + n - 1 \Rightarrow x_n = 2.3^{n-1} + (n-1)3^n \Rightarrow$$

$$x_n = (3n - 1)3^{n-1}$$

4.4. SEQUÊNCIA RECORRENTE LINEAR DE 2ª ORDEM HOMOGÊNEA

Se uma sequência de números é definida a partir de uma equação de recorrência da forma $x_n = a.x_{n-1} + b.x_{n-2}$, onde a e b são constantes reais não-nulas, afirmamos que esta sequência recorrente é de 2ª ordem homogênea. Vamos mostrar como determinar o termo geral de uma sequência recorrente linear de 2ª ordem que esteja escrita na forma $x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha.\beta.x_{n-2}$, $n \geq 3$, onde $\alpha \neq \beta$ e cujos dois valores iniciais são x_0 e x_1. Inicialmente observe que:

$$x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha.\beta.x_{n-2} \Rightarrow x_n - \alpha.x_{n-1} = \beta(x_{n-1} - \alpha.x_{n-2}) \quad (1)$$

Assim, se definirmos uma sequência auxiliar (y_n) de acordo com a expressão $y_n = x_n - \alpha.x_{n-1}$, então, a partir da equação (1), temos que $y_n = \beta.y_{n-1}$, que caracteriza uma progressão geométrica de razão β. Portanto:

$$y_n = y_1.\beta^{n-1} \Rightarrow x_n - \alpha.x_{n-1} = (x_1 - \alpha.x_0)\beta^{n-1} \quad (2)$$

Analogamente:

$$x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha.\beta.x_{n-2} \Rightarrow x_n - \beta.x_{n-1} = \alpha(x_{n-1} - \beta.x_{n-2})$$

Definindo uma outra sequência auxiliar (z_n) por $z_n = x_n - \beta.x_{n-1}$ temos:

$$z_n = \alpha.z_{n-1} \Rightarrow z_n = z_1.\alpha^{n-1} \Rightarrow x_n - \beta.x_{n-1} = (x_1 - \beta.x_0)\alpha^{n-1} \quad (3)$$

Multiplicando a equação (2) por β e a equação (3) por α:

$$\begin{cases} \beta.x_n - \alpha.\beta.x_{n-1} = (x_1 - \alpha.x_0)\beta^n \\ \alpha.x_n - \alpha.\beta.x_{n-1} = (x_1 - \beta.x_0)\alpha^n \end{cases}$$

Subtraindo estas duas equações:

$$(\alpha - \beta)x_n = (x_1 - \beta.x_0)\alpha^n - (x_1 - \alpha.x_0)\beta^n \Rightarrow x_n = \frac{(x_1 - \beta.x_0)}{\alpha - \beta}\alpha^n + \frac{(\alpha.x_0 - x_1)}{\alpha - \beta}\beta^n$$

Vamos aplicar este procedimento para determinar o termo geral da sequência definida pela equação de recorrência $x_n = 5.x_{n-1} - 6.x_{n-2}$, com $x_0 = 2$ e $x_1 = 3$.

i) $x_n = (2 + 3)x_{n-1} - 2.3.x_{n-2} \Rightarrow x_n - 2.x_{n-1} = 3(x_{n-1} - 2.x_{n-2})$

Definindo $y_n = x_n - 2.x_{n-1} \Rightarrow y_n = 3.y_{n-1} \Rightarrow y_n = y_1.3^{n-1} \Rightarrow$

$$x_n - 2.x_{n-1} = (x_1 - 2.x_0)3^{n-1} \Rightarrow x_n - 2.x_{n-1} = -3^{n-1} \quad (1)$$

ii) $x_n = (2 + 3)x_{n-1} - 2.3.x_{n-2} \Rightarrow x_n - 3.x_{n-1} = 2(x_{n-1} - 3.x_{n-2})$

Definindo $z_n = x_n - 3.x_{n-1} \Rightarrow z_n = 2.z_{n-1} \Rightarrow z_n = z_1.2^{n-1} \Rightarrow$

$$x_n - 3.x_{n-1} = (x_1 - 3.x_0)2^{n-1} \Rightarrow x_n - 3.x_{n-1} = -3.2^{n-1} \quad (2)$$

Multiplicando a equação (1) por 3 e a equação (2) por -2:

$$\begin{cases} 3.x_n - 6x_{n-1} = -3^n \\ -2x_n + 6x_{n-1} = 3.2^n \end{cases}$$

Somando estas duas equações, obtemos o termo geral: $x_n = 3.2^n - 3^n$, $n \geq 0$.

Observando os detalhes do desenvolvimento acima, podemos criar outro procedimento para determinar o termo geral de uma sequência cujo termo recorrente é da forma $x_n - (\alpha + \beta)x_{n-1} + \alpha.\beta.x_{n-2} = 0$, $\alpha \neq \beta$. Repare inicialmente que α e β são

as raízes da equação de 2º grau $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$, que é denominada equação característica da sequência recorrente. Pela expressão do termo geral obtida anteriormente, podemos concluir que x_n é da forma $x_n = A.\alpha^n + B.\beta^n$, onde A e B são constantes. Os valores de A e B podem ser determinados a partir da substituição dos valores de dois termos da sequência em x_n.

Por exemplo, considere a sequência (x_n) definida por $x_n = x_{n-1} + 2x_{n-2}$, $x_0 = 5$ e $x_1 = 4$. Como a expressão recorrente é equivalente a $x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = 0$, sua equação característica é dada por $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes são 2 e – 1. Portanto, o termo geral é da forma $x_n = A.2^n + B.(-1)^n$. Como $x_0 = 1$ e $x_1 = 1$ temos que $A + B = 5$ e $2A - B = 4$. Resolvendo este sistema linear obtemos $A = 3$ e $B = 2$. Assim, o termo geral da sequência é $x_n = 3.2^n + 2.(-1)^n$, $n \geq 0$.

Vamos analisar agora o caso de uma sequência recorrente da forma $x_n = (\alpha + \beta)x_{n-1} - \alpha.\beta.x_{n-2}$, onde $\alpha = \beta$. Note que isto equivale a afirmar que a equação característica da sequência possui raízes iguais. Se $\alpha = \beta$ a equação pode ser escrita assim: $x_n = 2\alpha.x_{n-1} - \alpha^2.x_{n-2}$. Portanto:

$$x_n = 2\alpha.x_{n-1} - \alpha^2.x_{n-2} \Rightarrow x_n - \alpha.x_{n-1} = \alpha(x_{n-1} - \alpha.x_{n-2})$$

Definindo a sequência auxiliar (y_n) por $y_n = x_n - \alpha.x_{n-1}$ teremos:

$$y_n = \alpha.y_{n-1} \Rightarrow y_n = y_1.\alpha^{n-1} \Rightarrow x_n - \alpha.x_{n-1} = (x_1 - \alpha.x_0)\alpha^{n-1}.$$

Definindo outra sequência (z_n) de modo que $x_n = \alpha^n.z_n$ obtemos:

$$\alpha^n.z_n - \alpha^n.z_{n-1} = (\alpha z_1 - \alpha z_0)\alpha^{n-1} \Rightarrow z_n - z_{n-1} = z_1 - z_0$$

que caracteriza uma PA de razão $z_1 - z_0$.

$$\text{Logo: } z_n = z_0 + n(z_1 - z_0) \Rightarrow \frac{x_n}{\alpha^n} = x_0 + n\left(\frac{x_1}{\alpha} - x_0\right) \Rightarrow$$

$$\mathbf{x_n = x_0.\alpha^n + n(x_1 - \alpha.x_0)\alpha^{n-1}}$$

Por exemplo, utilizando o raciocínio acima, vamos encontrar o termo geral da sequência definida por $x_n = 10x_{n-1} - 25x_{n-2}$, $x_0 = 4$, $x_1 = 1$. Note que:

$$x_n = 10x_{n-1} - 25x_{n-2} \Rightarrow x_n - 5x_{n-1} = 5(x_{n-1} - 5x_{n-2})$$

Definindo $y_n = x_n - 5x_{n-1}$ teremos:

$$y_n = 5.y_{n-1} \Rightarrow y_n = y_1.5^{n-1} \Rightarrow x_n - 5x_{n-1} = (x_1 - 5x_0)5^{n-1}.$$

Definindo $x_n = 5^n.z_n$ obtemos:

$$5^n.z_n - 5^n.z_{n-1} = (5.z_1 - 5.z_0)5^{n-1} \Rightarrow z_n - z_{n-1} = z_1 - z_0 \Rightarrow$$

$$z_n = z_0 + n(z_1 - z_0) \Rightarrow \frac{x_n}{5^n} = x_0 + n\left(\frac{x_1}{5} - x_0\right) \Rightarrow \mathbf{x_n = 4.5^n - 19.n.5^{n-1}}.$$

Podemos também resolver de outra maneira. No caso em que $\alpha = \beta$ nota-se que o termo geral é da forma $x_n = A.\alpha^n + \mathbf{n}.B.\alpha^n$. Os valores de A e B são constantes que podem ser determinadas sabendo-se o valor de dois termos de x_n. Por exemplo, na determinação do termo geral da sequência recorrente $x_n = 4.x_{n-1} - 4.x_{n-2}$ ($x_0 = 1$, $x_1 = 5$), temos que a raiz dupla da equação característica é $\alpha = 2$. Logo, o termo geral é da forma $x_n = A.2^n + n.B.2^{n-1}$. Como $x_0 = 1$ e $x_1 = 2$ temos $A = 1$ e $2A + B = 5$, onde obtemos $B = 3$. Assim, $\mathbf{x_n = 2^n + 3.n.2^{n-1}}$, $n \geq 0$.

Exercícios Resolvidos

1) Determine o termo geral da sequência de Fibonacci, definida por: $F_0 = F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Solução:

A equação característica da sequência é $x^2 = x + 1 \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Logo, o termo geral é da forma $F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

Como $F_0 = 1$ e $F_1 = 1$:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ (1+\sqrt{5})A + (1-\sqrt{5})B = 2 \end{cases} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \text{ e } B = -\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Rightarrow$$

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}, \text{ para } n \geq 0.$$

.) (Olimpíada do Canadá-88) Sejam as sequências $x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}$; $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $y_{n+1} = 4y_n - y_{n-1}$, $y_0 = 1$, $y_1 = 2$. Mostre para todo $n \geq 0$ que $y_n^2 = 3x_n^2 + 1$.

Solução:

Sabe-se que uma sequência dada pela recorrência $x_n = a.x_{n-1} + b.x_{n-2}$ possui termo geral dado por

$$x_n = \frac{(x_1 - \beta.x_0)}{\alpha - \beta}\alpha^n + \frac{(\alpha.x_0 - x_1)}{\alpha - \beta}\beta^n,$$

onde α e β são as raízes da equação característica $x^2 = ax + b$.

Note que as duas sequências possuem a mesma equação característica: $x^2 = 4x - 1$, ou seja, para as duas sequências tem-se as mesmas raízes α e β tais $\alpha = 2 + \sqrt{3}$ e $\beta = 2 - \sqrt{3}$.

Logo, tem-se que $x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}$ e $y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}$

$$3x_n^2 + 1 = 3\left[\frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}}\right]^2 + 1 = \frac{(2+\sqrt{3})^{2n} + (2-\sqrt{3})^{2n} - 2}{4} + 1 =$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^{2n} + (2-\sqrt{3})^{2n} + 2}{4} \Rightarrow 3x_n^2 + 1 = \left[\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2}\right]^2 = y_n^2$$

3) (Olimpíada da Romênia-02) Considere a sequência $(a_n)_{n \geq 0}$ definida por $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = 14a_n - a_n$, $\forall n \geq 1$. Prove que para todo $n \geq 0$, $2a_n - 1$ é um quadrado perfeito.

Solução:

A equação característica é $x^2 - 14x + 1 = 0$, com raízes $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2$.

Assim, o termo geral é $a_n = \dfrac{(2+\sqrt{3})^{2n-1} + (2-\sqrt{3})^{2n-1}}{4}$

Desenvolvendo obtém-se: $2a_n - 1 = \dfrac{\left(\sqrt{(2+\sqrt{3})^{2n-1}} - \sqrt{(2-\sqrt{3})^{2n-1}}\right)^2}{2}$.

Além disso, as duas expressões entre parênteses podem ser escritas como:

$$(2+\sqrt{3})^{2n-1} = 2\left(\frac{(\sqrt{3}+1)^{2n-1}}{2^n}\right)^2 \text{ e } (2-\sqrt{3})^{2n-1} = 2\left(\frac{(\sqrt{3}-1)^{2n-1}}{2^n}\right)^2.$$

Assim: $2a_n - 1 = \left[\dfrac{(\sqrt{3}+1)^{2n-1} - (\sqrt{3}-1)^{2n-1}}{2^n}\right]^2$.

4.5. SEQUÊNCIA RECORRENTE LINEAR DE 2ª ORDEM NÃO-HOMOGÊNEA

Suponha que uma sequência é definida pela equação de recorrência não homogênea $x_n = a.x_{n-1} + b.x_{n-2} + c$, com $c \neq 0$, e por seus dois primeiros termos x_0 e x_1. Se y_n uma sequência auxiliar de modo que $x_n = y_n + k$, $k \in \mathbb{R}$:

$$(y_n + k) = a(x_{n-1} + k) + b(x_{n-2} + k) + c \Rightarrow y_n = a.y_{n-1} + b.y_{n-2} + k(a + b - 1) + c$$

Portanto, fazendo $k = -\dfrac{c}{a+b-1}$, com $a + b \neq 1$, podemos transformar uma equação recorrente não homogênea da forma $x_n = a.x_{n-1} + b.x_{n-2} + c$ em uma homogênea da forma $y_n = a.y_{n-1} + b.y_{n-2}$, que já sabemos resolver. Se α e β são as raízes da equação característica desta sequência ($x^2 - ax - b = 0$) então temos que $x_n = A.\alpha^n + B.\beta^n + k$. O valor de k pode ser calculado substituindo o valor de x_n na equação de recorrência. Depois de determinado o valor de k podemos calcular A e B através de dois valores de termos da sequência.

Por exemplo, vamos aplicar esse método para calcular o termo geral da sequência não homogênea definida por $c_n = c_{n-1} + 6.c_{n-2} + 12$, onde $c_0 = 1$ e $c_1 = 3$. Fazendo $c_n = b_n + k$, deseja-se determinar k de modo que a sequência b_n seja homogênea, ou seja, $b_n = b_{n-1} + 6b_{n-2}$. Substituindo na equação de recorrência da sequência c_n segue que:

$$b_n + k = b_{n-1} + k + 6(b_{n-2} + k) + 12 \Rightarrow b_n = b_{n-1} + 6.b_{n-2} + 6k + 12 \Rightarrow$$
$$6k + 12 = 0 \Rightarrow k = -2 \Rightarrow c_n = b_n - 2$$

Logo, a equação característica de $b_n = b_{n-1} + 6.b_{n-2}$ é dada por:

$$x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+2) = 0 \Rightarrow \alpha = 3 \text{ e } \beta = -2.$$

Assim, o termo geral de (b_n) é da forma $b_n = A.3^n + B.(-2)^n$

Desde que $c_n = b_n - 2$: $c_n = A.3^n + B.(-2)^n - 2$.

Como $c_0 = 7$ e $c_1 = -10$:

$A + B = 9$ e $3A - 2B = -8 \Rightarrow A = 2$ e $B = 7 \Rightarrow c_n = 2.3^n + 7.(-2)^n - 2$, $n \geq 0$.

Observação: Neste procedimento de cálculo fizemos $k = -\frac{c}{a+b-1}$, supondo que ocorre o fato de $a + b \neq 1$. Fica como exercício o caso em que uma sequência é definida por $x_n = a.x_{n-1} + b.x_{n-2} + c$, onde $a + b = 1$.

Exercícios Resolvidos

1) (Olimpíada da Índia-96) Define-se uma sequência a_n, $n \geq 1$, por $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ e $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2$, para $n \geq 1$. Prove que para todo m, $a_m.a_{m+1}$ também é um termo na sequência.

Solução:

$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2 \Rightarrow a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n + 2$.

Fazendo $b_n = a_{n+1} - a_n \Rightarrow b_{n+1} = b_n + 2$, com $b_1 = 1$

Observe que:

$b_2 - b_1 = 2$

$b_3 - b_2 = 2$

$b_4 - b_3 = 2$

.....

$b_n - b_{n-1} = 2$

Somando estas equações: $b_n - b_1 = 2n - 2 \Rightarrow b_n = 2n - 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n = 2n - 1$, com $a_1 = 1$, $a_2 = 2$

Note que:

$a_2 - a_1 = 1$

$a_3 - a_2 = 3$

$a_4 - a_3 = 5$

.....

$a_{n-1} - a_n = 2n - 1$

Somando: $a_{n-1} - a_1 = n^2 \Rightarrow a_{n-1} = n^2 + 1 \Rightarrow a_n = (n-1)^2 + 1 = n^2 - 2n + 2$

Logo: $a_n.a_{n+1} = (n^2 + 1)(n^2 - 2n + 2) = n^4 - 2n^3 + 3n^2 - 2n + 2 = (n^2 - n + 1)^2 + 1 \Rightarrow a_n a_{n+1} = a_{n^2-n+1}$.

2) (Olimpíada do Vietnã-98) A sequência $\{a_n\}$ é definida por $a_0 = 20$, $a_1 = 100$, $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20$ para $n = 0, 1, 2, \ldots$. Determine o menor inteiro positivo h satisfazendo $a_{n+h} - a_n$ é divisível por 1998 para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$

Solução:

Seja b_n uma sequência com relação de recorrência $b_{n+2} = 4b_{n+1} + 5b_n$ relacionada com a sequência a_n da forma $b_n = a_n + k$.

Assim: $a_{n+2} + k = 4(a_{n+1} + k) + 5(b_n + k) \Rightarrow a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 8k \Rightarrow$

$8k = 20 \Rightarrow k = \frac{5}{2} \Rightarrow a_n = b_n - \frac{5}{2}$

A equação característica de b_n é $x^2 = 4x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow$

$(x - 5)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$ e $x = 5$

Assim $b_n = A.5^n + B.(-1)^n \Rightarrow a_n = A.5^n + B.(-1)^n - \frac{5}{2}$

$a_0 = 20 \Rightarrow 20 = A + B - 5/2$

$a_1 = 100 \Rightarrow 100 = 5A - B - 5/2$

Resolvendo o sistema: $120 = 6A - 5 \Rightarrow 6A = 125 \Rightarrow A = \frac{125}{6}$

$B = 20 + \frac{5}{2} - \frac{125}{6} \Rightarrow B = \frac{5}{3}$

Assim, temos que $a_n = \frac{125}{6}5^n + \frac{5}{3}(-1)^n - \frac{5}{2} \Rightarrow a_n = \frac{5[5^{n+2} + 2(-1)^n - 3]}{6}$

Logo: $a_{n+h} - a_n = \frac{5[5^{n+2}(5^h - 1) + 2(-1)^n((-1)^h - 1)]}{6}$

Como $1998 = 2.3^3.37$ então se $1998 \mid a_{n+h} - a_n$ então $3 \mid a_{n+h} - a_n$

Como $a_0 = 20$, $a_1 = 100$ e $a_{n+2} = 4a_{n+1} + 5a_n + 20$, pode-se montar uma tabela do resto da divisão por 3 de a_n:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
resto de a_n por 3	−1	1	1	−1	0	0	−1	1	1	−1	0	0

Perceba que os restos se repetem com período 6, ou seja, $3 \mid a_{n+h} - a_n \Rightarrow h = 6k$

Assim: $a_{n+h} - a_n = \frac{5^{n+3}(5^{6k} - 1)}{6} = 1998x = 2.3^3.37.x \Rightarrow$

$5^{n+3}(5^{6k} - 1) = 2^2.3^4.37.x \Rightarrow 2^2.3^4.37 \mid 5^{6k} - 1$

Note que 4 sempre divide $5^{6k} - 1$, faltando analisar a divisibilidade por 3^4 e 37

Pelo Teorema de Fermat: $5^{36} \equiv 1 \pmod{37}$ (1)

Pelo Teorema de Euler: $\phi(3^4) = 3^4(1 - 1/3) = 54 \Rightarrow 5^{54} \equiv 1 \pmod{3^4}$ (2)

Como mmc (36, 54) = 108, basta elevar ao cubo (1) e ao quadrado (2):

$5^{108} \equiv 1 \pmod{37}$ e $5^{108} \equiv 1 \pmod{3^4} \Rightarrow 5^{108} \equiv 1 \pmod{2^2.3^4.37}$

Portanto, o menor valor de h é 108.

4.5. SEQUÊNCIAS RECORRENTES NÃO-LINEARES

Infelizmente não existe padrão de análise (semelhante ao que foi feito nos casos das sequências recorrentes lineares) quando uma sequência possuir uma equação de recorrência não-linear. O que se deve fazer é tentar encontrar progressões conhecidas (PA's, PG's, equações de recorrência lineares, etc) manipulando as equações de recorrências fornecidas. Abaixo estão resolvidas algumas questões clássicas envolvendo sequências que possuem equação de recorrência não-linear.

Exercícios Resolvidos

1) Determine em função de n o termo geral da sequência definida por: $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = \frac{2a_{n-1}^2}{a_{n-2}}$.

Solução:

Podemos reescrever o termo geral da forma: $\frac{a_n}{a_{n-1}} = 2\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

Seja u_n tal que $u_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$, então $u_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} = 2u_{n-1}$, onde $u_1 = \frac{a_1}{a_0} = 2$

Como a sequência definida por $u_1 = 2$, $u_n = 2u_{n-1}$ é uma progressão geométrica, então o termo geral de u_n é $u_n = u_1 2^{n-1} \Rightarrow u_n = 2^n \Rightarrow a_n = 2^n a_{n-1}$

Assim: $a_n = 2^n a_{n-1} = 2^n.2^{n-1}.a_{n-2} = 2^n.2^{n-1}.2^{n-2}.a_{n-3} = 2^n.2^{n-1}.2^{n-2}....2^3.2^2.2.a_0 \Rightarrow$

$a_n = (2^{1+2+3+...+n-1+n}).a_0 \Rightarrow a_n = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

2) Uma sequência é definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n^2}$. Mostre que $a_{9000} > 30$.

Solução:

Notemos que $a_2 = 2$

$a_{n+1} = a_n + 1/a_n^2 \Rightarrow a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3 + 3/a_n^3 + 1/a_n^6 > a_n^3 + 3 \Rightarrow a_{n+1}^3 - a_n^3 > 3$

Notemos que $a_2 = 2$, ou seja, $a_2^3 - a_1^3 = 7$

$a_2^3 - a_1^3 = 7$

$a_3^3 - a_2^3 > 3$

$a_4^3 - a_3^3 > 3$

.....

$a_n^3 - a_{n-1}^3 > 3$

$a_{n+1}^3 - a_n^3 > 3$

Somando temos que $a_{n+1}^3 > 3n + 4 \Rightarrow a_{9000}^3 > 27001 \Rightarrow a_{9000} > 30$

3) Seja $\{x_n\}$ uma sequência satisfazendo $x_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}x_n - 1}{x_n + \sqrt{3}}$, $n \geq 1$. Prove que a sequência é periódica.

Solução:

Façamos $x_n = \operatorname{tg} y_n \Rightarrow \operatorname{tg}_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}\operatorname{tg} y_n - 1}{\operatorname{tg} y_n + \sqrt{3}} = \dfrac{\operatorname{tg} y_n - \sqrt{3}/3}{1 + (\sqrt{3}/3)\operatorname{tg} y_n} \Rightarrow$

$\operatorname{tg} y_{n+1} = \operatorname{tg}(y_n - \pi/6)$

Como a função $f(x) = \operatorname{tg} x$ é periódica de período π:

$x_{n+1} = \operatorname{tg} y_{n+1} = \operatorname{tg}(y_{n+1} - n\pi/6) = \operatorname{tg}(y_n - \pi/6) = x_{n+6}$

4) (IMO-88 Shortlist) Uma sequência de números $\{a_n\}$ é definida por $a_1 = 1/2$ e para cada $n \geq 2$, $a_n = \left(\dfrac{2n-3}{2n}\right)a_{n-1}$. Prove que $\sum_{k=1}^{n} a_k < 1$ para todo $n \geq 1$.

Solução:

Temos que $2ka_k - (2k-3)a_{k-1} = 0 \Rightarrow 2ka_k - 2(k-1)a_{k-1} = -a_{k-1}$

$2.2.a_2 - 2.1.a_1 = -a_1$

$2.3.a_3 - 2.2.a_2 = -a_2$

$2.4.a_4 - 2.3.a_3 = -a_3$

$2.5.a_5 - 2.4.a_4 = -a_4$

.....

$2.n.a_n - 2.(n-1).a_{n-1} = -a_{n-1}$

$2.(n+1).a_{n+1} - 2.n.a_n = -a_n$

Somando: $-S = 2(n+1)a_{n+1} - 2a_1 \Rightarrow S = 2a_1 - 2(n+1)a_{n+1} \Rightarrow$

$S = 1 - 2(n+1)a_{n+1} \Rightarrow S < 1$

5) (Olimpíada da Irlanda-98) Uma sequência de números reais x_n é definida recursivamente como segue: x_0, x_1 são números reais positivos arbitrários, e $x_{n+2} = \dfrac{1 + x_{n+1}}{x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Calcule x_{1998}.

Solução:

Calculemos os primeiros termos da sequência x_n:

$x_0 = x_0$, $x_1 = x_1$, $x_2 = \dfrac{1+x_1}{x_0}$, $x_3 = \dfrac{1 + x_0 + x_1}{x_0 x_1}$, $x_4 = \dfrac{1+x_0}{x_1}$, $x_5 = x_0$, $x_6 = x_1$, ...

Note que depois de x_5 temos uma repetição, formando uma sequência de período 5.

Como $1998 = 5k + 3$, temos que $x_{1998} = x_3 = (1 + x_0 + x_1)/x_0 x_1$

6) (Torneio das Cidades-97) A sequência x_n está definida pelas seguintes condições:

$$x_1 = 19; \quad x_2 = 97; \quad x_{n+2} = x_n - \frac{1}{x_{n+1}}$$

Demonstrar que existe um termo desta sequência que é igual a 0. Determinar o subíndice deste termo.

Solução:

Multiplicando a equação de x_{n+2} por x_{n+1}, temos: $x_{n+2}x_{n+1} = x_{n+1}x_n - 1$.

Fazendo $y_n = x_{n+1}.x_n$, então: $y_{n+1} = y_n - 1$, onde $y_1 = x_2.x_1 = 19.97 = 1843$

Assim, como cada termo de y_n é igual ao anterior menos um, temos que:

$y_2 = y_1 - 1$, $y_3 = y_2 - 1 = y_1 - 2$, $y_4 = y_3 - 1 = y_1 - 3$, ..., $y_n = y_1 - (n-1) \Rightarrow$

$y_n = 1843 - (n-1)$

Assim: $y_{1844} = 1843 - 1844 - 1 \Rightarrow y_{1844} = 0 \Rightarrow x_{1845}x_{1844} = 0 \Rightarrow x_{1844} = 0$

7) (Olimpíada da Inglaterra-83) A sequência de números reais $x_1, x_2, x_3, \ldots$ é definida por $x_1 = a \neq -1$ e $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ para todo $n \geq 1$. Seja S_n a soma e P_n o produto dos n primeiros termos da sequência $y_1, y_2, y_3, \ldots$, onde $y_n = \frac{1}{1+x_n}$. Prove que $aS_n + P_n = 1$ para todo n.

Solução:

Como $x_{n+1} = x_n^2 + x_n \Rightarrow x_{n+1} = x_n(1 + x_n) \Rightarrow y_n = \frac{1}{1+x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}}$

Então: $P_n = y_1.y_2.y_3 \ldots y_n = \frac{x_1}{x_2}.\frac{x_2}{x_3}.\frac{x_3}{x_4} \ldots \frac{x_n}{x_{n+1}} \Rightarrow P_n = \frac{x_1}{x_{n+1}} \Rightarrow P_n = \frac{a}{x_{n+1}}$

$$S_n = y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \ldots + \frac{x_n}{x_{n+1}}$$

Como $\frac{1}{1+x_n} = \frac{x_n}{x_{n+1}} \Rightarrow \frac{1+x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} \Rightarrow \frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$

$$S_n = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_3} - \frac{1}{x_4} + \ldots + \frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_{n+1}} \Rightarrow S_n = \frac{1}{a} - \frac{1}{x_{n+1}}$$

Assim: $aS_n + P_n = 1 - \frac{a}{x_{n+1}} \Rightarrow aS_n + P_n = 1$

8) (Olimpíada Putnam-93) Uma sequência de números reais não nulos satisfaz $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1$, para $n \geq 1$. Prove que existe um número real α tal que $a_{n+1} = \alpha a_n - a_{n-1}$ para $n \geq 1$.

Solução:

A partir de a_n pode-se determinar o termo seguinte da sequência, apenas substituindo n por n + 1 na equação de recorrência:

$a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} \Rightarrow$

$a_{n+1}^2 + a_{n-1}a_{n+1} = a_n^2 + a_n a_{n+2} \Rightarrow a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1}) = a_n(a_n + a_{n+2}) \Rightarrow$

$$\frac{a_{n+1}}{a_{n+2} + a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n-1}}$$

Logo: $\frac{a_{n+1}}{a_{n+2} + a_n} = \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n + a_{n-2}} = \ldots = \frac{a_1}{a_2 + a_0} = \frac{1}{\alpha} \Rightarrow$

$\alpha a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_{n+1} = \alpha a_n - a_{n-1}$

9) (Olimpíada da Moldávia-98) A sequência (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$, verifica as relações: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{a_{n-1}}{2na_{n-1} + 1}$ para todo natural $n > 1$. Calcule $a_1 + a_2 + \ldots + a_{1998}$.

Solução:

Fazendo $x_n = \frac{1}{a_n}$ tem-se que $x_n - x_{n-1} = 2n$ e substituindo $n = 1, 2, \ldots, n$:

$x_2 - x_1 = 4$

$x_3 - x_2 = 6$

...

$x_n - x_{n-1} = 2n$

Somando todas essas expressões: $x_n - x_1 = 2(2 + 3 + \ldots + n) \Rightarrow$

$x_n - x_1 = (2 + n)(n - 1) \Rightarrow x_n - 2 = n^2 - n - 2 \Rightarrow x_n = (n - 1)n \Rightarrow$

$\frac{1}{a_n} = (n - 1)n \Rightarrow a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \Rightarrow$

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{1998} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} = 1 - \frac{1}{1998} = \frac{1997}{1998}.$$

10) (Torneio das Cidades-95) A sequência 1, 2, 3, 4, 5, 119, ... de 70 inteiros é definida pela seguinte regra: cada um dos inteiros (iniciando do sexto) é o produto de todos os seus precedentes menos 1. Prove que a soma dos quadrados destes 70 inteiros é igual ao seu produto.

Solução:

$a_{n+1} = a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 - 1 = a_n(a_n + 1) - 1 \Rightarrow a_{n+1} - a_n + 1 = a_n^2$

Escrevendo desde $n = 6$ até $n = 70$:

$a_7 - a_6 + 1 = a_6^2$

$a_8 - a_7 + 1 = a_7^2$

$a_9 - a_8 + 1 = a_8^2$

...

$a_{71} - a_{70} + 1 = a_{70}^2$

Somando: $a_{71} - a_6 + 65 = a_6^2 + a_7^2 + \ldots + a_{70}^2 =$

$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + \ldots + a_{70}^2 - 55 \Rightarrow$

$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 + \ldots + a_{70}^2 = a_{71} - 119 + 120 = a_{71} + 1 = a_{70}a_{69} \ldots a_2 a_1$

Exercícios de Vestibular

1) (IME-85) Seja a sequência $\{v_n\}$, n = 0, 1, 2, ..., definida a partir de seus dois primeiros termos v_0 e v_1 e pela fórmula geral: $v_n = 6v_{n-1} - 9v_{n-2}$, para $n \geq 2$. Define-se uma nova sequência: $\{u_n\}$, n = 0, 1, 2, ... pela fórmula: $v_n = 3^n u_n$
a) Calcule $u_n - u_{n-1}$ em função de u_0 e u_1
b) Calcule u_n e v_n em função de n, v_1 e v_0
c) Identifique a natureza das sequências $\{v_n\}$ e $\{u_n\}$ quando: $v_1 = 1$ e $v_0 = 1/3$

Exercícios Gerais

2) Dada a sequência: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ satisfazendo para todo n:

$$a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 1.$$

Expresse a_n em termos de a_1, a_2 e n.

3) Uma sequência x_n é dada por $x_0 = 2$, $x_1 = 7$ e $x_{n+1} = 7x_n - 12x_{n-1}$. Determine o termo geral x_n desta sequência.

4) Determine a fórmula explícita de a_n em função de n, a_1 e a_2 da sequência definida por: $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ para $n \geq 1$.

5) Determine o termo geral da sequência definida por: $a_0 = 2$, $a_1 = 503$ e

$$a_{n-2} = 503a_{n+1} - 1996a_n.$$

6) Uma sequência $\{a_n\}$ de números reais é definida por $a_1 = 1$, $a_{n+1} = 1 + a_1.a_2 \ldots a_n$ ($n \geq 1$). Prove que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = 1$.

7) Determine o termo geral da sequência definida por $x_{n+1} = 2x_n + 1$, $x_1 = 2$.

8) Determine o termo geral da sequência $x_n = 3.x_{n-1} - 2$, onde $x_1 = 3$.

9) Determine o termo geral da sequência definida por $x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0$, $x_0 = 4$ e $x_1 = 1$.

10) Encontre o termo geral da sequência recorrente $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, com $x_0 = 1$ e $x_1 = 5$.

11) Determine o termo geral da recorrência $c_n = c_{n-1} + 6c_{n-2} + 12$, com $c_0 = 7$ e $c_1 = -10$.

12) Determinar o termo geral da recorrência $a_n = -3a_{n-1} + 10a_{n-2}$, com $a_1 = 2$ e $a_2 = 1$.

13) Achar o termo geral da sequência dada por $a_n = 6a_{n-1} - 8a_{n-2} + 2$, com $a_1 = a_2 = 1$.

14) Encontre o termo geral da sequência recorrente $a_n = 4a_{n-1} + 3^n$, com $a_1 = 0$.

Exercícios de Olimpíada

15) (Chile-91) Sejam $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, e para cada natural $n > 1$, $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Calcule o valor da soma infinita:

$$x = a_0 + \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{8}a_3 + \ldots + \frac{1}{2^n}a_n + \ldots$$

16) (JIR McKnight-87) Determine o termo geral da sequência dada por $a_1 = 2$, $x_2 = 5$ e $x_k = x_{k-1} + 2x_{k-2}$, para $k > 2$.

17) (South Alabama) Determine a fórmula explícita de a_n, em função de n,

da sequência definida por $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$, para $n \geq 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$.

18) (UIUC Undergrad Math Contest-97) Sejam $x_1 = x_2 = 1$, e $x_{n+1} = 1996x_n + 1997x_{n-1}$ para $n \geq 2$. Determine (com prova) o resto da divisão de x_{1997} por 3.

19) (UIUC Undergrad Math Contest-98) Uma sequência $a_0, a_1, a_2, \ldots$ de números reais é definido recursivamente por $a_0 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1 + na_n}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Determine uma fórmula geral para a_n.

20) (Naboj-11) Uma sequência é definida por: $a_1 = 200$, $a_2 = 11$ e $a_{n+2} = a_n - \dfrac{1}{a_{n+1}}$, enquanto o lado direito está bem definido. Determine o menor valor de t de modo que $a_t = 0$.

21) (Inglaterra-94) A sequência de inteiros $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ satisfaz $u_0 = 1$ e $u_{n+1}u_{n-1} = ku_n$ para cada $n \geq 1$, onde k é algum inteiro positivo fixado. Se $u_{2000} = 2000$, determine todos os valores possíveis de k.

22) (Inglaterra-97) Para os inteiros positivos n, a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ é definida por $a_1 = 1$,

$$a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}),\ n > 1.$$

Determine o valor de a_{1997}.

23) (Vietnã-98) Sejam a e b inteiros. Uma sequência de inteiros a_n é definida por $a_0 = a$, $a_1 = b$, $a_2 = 2b - a + 2$,

$a_{n+3} = 3a_{n+2} - 3a_{n+1} + a_n$, $\forall n \geq 0$.

i) Determine o termo geral de a_n;

ii) Calcule os inteiros a e b para os quais a_n é quadrado perfeito para $n \geq 1998$.

24) (Mathcounts-14) Se $a_1 = 0$, $a_2 = 4$ e $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ para $n > 2$, caracterize todos os n tais que a_n é uma potência de 2.

25) (Estônia-10) A sequência $(a_n$ é definida por $a_1 = 1$ e

$$a_n = n(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$$

para todo $n > 1$. Ache todos os índices n para os quais a_n é divisível por n!.

26) (Rússia-62) Dados os números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{99}, a_{100}$. É sabido que $a_1 > a_0$; $a_2 = 3a_1 - 2a_0$, $a_3 = 3a_2 - 2a_1, \ldots$, $a_{100} = 3a_{99} - 2a_{98}$. Prove que $a_{100} > 2^{99}$.

27) (Cone Sul-96) Considerar uma sucessão de números reais definida por:

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n} \text{ para } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Demonstrar que, qualquer que seja o número real positivo a_0, cumpre-se que a_{1996} é maior que 63.

28) (Illinois Undergrad-16) Dado um número real x tal que $x > 1$, define-se a sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ por $a_1 = x$ e

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Calcule o valor de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

Dica: Prove que $\dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{a_n - 1} - \dfrac{1}{a_{n+1} - 1}$

29) (Austrália-18) A sequência $a_1, a_2, a_3, \ldots$ é definida por $a_1 = 1$ e, para $n \geq 2$,

$$a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1}).n.$$

Prove que a_{2018} é divisível por 2018^2.

PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS

5.1. INTRODUÇÃO

O objetivo fundamental da análise combinatória é determinar de quantas maneiras determinada decisão pode ser tomada ou qual o número de elementos de um conjunto específico. Assim pode-se, através da análise combinatória, por exemplo, determinar de quantas maneiras vinte bombons podem ser distribuídos entre duas pessoas ou quantos números pares de 3 dígitos existem formados a partir de 0, 1, 2, 3, 4 e 5. Na verdade, a motivação para o estudo da análise combinatória veio do interesse em analisar as probabilidades associadas aos jogos de azar: cartas, roleta, etc, onde sempre existiu o desejo de algumas pessoas em tentar descobrir uma forma de aumentar as probabilidades de ganhar jogos em que dinheiro está em jogo. Para tanto, as bases da análise combinatória e do binômio de Newton foram criadas com fim a dar suporte à teoria que cerca o estudo das probabilidades.

Na verdade, o autor desse livro entende que a expressão "Análise ombinatória" é usada de forma errada nos livros escritos em português. Análise ombinatória é uma área muito extensa da matemática, que inclui a contagem, probabilidade, teoria dos jogos, invariantes, grafos e uma série de princípios, como o principio de Dirichlet, Princípio de Ramsey, ... A contagem é apenas uma das áreas na análise combinatória, possivelmente a área mais importante, mas não é a única.

Antes de iniciar a análise quantitativa sobre combinatória, vamos fazer uma análise qualitativa que dará suporte às decisões que devem ser tomadas quando uma questão de contagem for resolvida.

5.1.1. O Que Diferencia Uma Decisão Ou Conjunto De Outro?

Esta é sem dúvida uma das mais importantes perguntas que devem ser respondidas na solução de qualquer problema de análise combinatória. Evidentemente, se esta pergunta tivesse, na maioria dos casos, uma resposta fácil, a análise combinatória não seria encarada como a matéria mais difícil da matemática de ensino médio. Contudo, algumas observações podem facilitar a análise de uma questão de contagem. Basicamente duas decisões ou conjuntos são distintos se você puder olhá-los e claramente chegar à conclusão que são diferentes. Abaixo seguem alguns critérios que devem ser cuidadosamente observados quando uma questão de combinatória for proposta.

i) Quando os elementos são iguais:

Suponha que você tem seis livros iguais de Física e deseja escolher uma certa quantidade para doar para a biblioteca de sua escola. Note que, independentemente dos livros que escolha, todas as coleções de três livros que você pode montar (a partir dos seis livros iniciais) são idênticas. Deste modo, o que diferencia uma escolha de outra, neste caso em que os objetos são iguais, é a quantidade de objetos escolhidos. Assim, você pode doar um livro, dois livros, três livros, quatro livros, cinco livros ou seis livros, ou seja, existem seis possibilidades de doar uma certa quantidade de livros. Alguns casos são curiosos. Por exemplo, suponha que você tenha um saco com 50 bombons, todos iguais, e deseja tirar um. De quantas maneiras pode fazer isto? Uma, é claro. Apesar da quantidade de bombons ser relativamente grande, depois que você retirar um bombom qualquer do saco e olhar para o bombom retirado, independentemente do bombom que saia, sempre o que você vai ver é o mesmo.

ii) Quando a ordem dos elementos interessa:

Sempre deve-se analisar se a ordem com que os elementos são escolhidos interessa. Por exemplo, suponha que você vai a uma papelaria para comprar duas canetas distintas, sendo que a papelaria possui cinco tipos de canetas: c_1, c_2, c_3, c_4 e c_5. Repare que a situação em que você decide comprar inicialmente a caneta c_2 e depois a caneta c_4 é idêntica à situação em que você compra primeiro c_4 e depois c_2. No final das contas, você vai levar para casa as canetas c_2 e c_4. Neste caso, a ordem com que os elementos são escolhidos não interessa. Por outro lado, se você deseja montar números de dois dígitos distintos a partir de 1, 2, 3, 4 e 5, é diferente você escolher o dígito 2 para as dezenas e o dígito 4 para as unidades de escolher 4 para as dezenas e o dígito 2 para as unidades. Neste caso, a ordem com que os elementos são escolhidos interessa. Do exposto acima, podemos concluir que o enunciado da questão não vai explicitar se a ordem das decisões deve ser levada em consideração. Para tomar tal decisão é necessário analisar com cuidado a situação proposta.

iii) Quando não é informado se os elementos são distintos:

Em alguns casos, não é informado se os elementos em análise são distintos ou não, entretanto, na maioria dos casos, um pouco de bom sendo basta para concluir o que se deve considerar. Por exemplo, imagine trinta pessoas dentro de um ônibus que faz cinco paradas antes de chegar ao final da linha. Poder-se-ia imaginar que o que diferencia uma forma das pessoas sairem do ônibus de outra reside na análise das quantidades de pessoas que descem em cada parada. Porém, imagine que você é uma das pessoas que está no ônibus. Certamente para você faz diferença descer na primeira ou na quarta parada. Como pessoas, em análise combinatória, são sempre consideradas elementos distintos, não podemos analisar somente as quantidades selecionadas de pessoas para cada parada (que ocorreria somente se estivéssemos

analisando elementos iguais), devemos na verdade levar em consideração em quais paradas cada uma das pessoas pode descer do ônibus.

Outro tipo comum de questão onde há a confusão sobre considerar ou não os elementos distintos é quando se arremessam várias moedas ou vários dados o resultado do experimento é o que sai na face superior da moeda ou do dado, conforme o caso. É absolutamente irrelevante considerar as moedas iguais ou os dados iguais. Ninguém está permutando moedas ou dados! O resultado de cada moeda ou de cada dado é diferente um do outro. Por um acaso pintar cada moeda ou cada dado de uma cor diferente muda a sequência dos resultados? É evidente que não! Assim, a sequência de resultados nos dados (1, 2, 3) – entenda esse conjunto como 1 sendo o resultado do 1° dado, 2 no 2° dado e 3 no 3° dado – é diferente do resultado (3, 2 1). Do mesmo modo, ao jogar duas moedas, a sequência (cara, coroa) é considerada diferente da sequência (coroa, cara).

5.1.2. Quando Uma Decisão Deve Ser Tomada Antes de Outra?

Suponha que você deseja contar a quantidade de números pares de três algarismos distintos. O fato de o algarismo das unidades ser par obriga-nos a ter mais cuidado nas escolhas. Digamos que você resolva escolher inicialmente o algarismo das centenas, depois o algarismo das dezenas e por último o das unidades. Note que a análise das possibilidades de escolha para o algarismo das unidades depende se algum algarismo par foi ou não escolhido para os algarismos das centenas ou dezenas. Por exemplo, se for escolhido o 6 para algarismo das centenas e 0 para as dezenas, temos três possibilidades para a escolha do algarismo das unidades: 2, 4, ou 8. Por outro lado, se for escolhido 2 como algarismo das centenas e 9 como algarismo das dezenas, temos quatro possibilidades para a escolha do algarismo das unidades: 0, 4, 6, ou 8. Neste caso, para uma análise mais fácil dos critérios de contagem, deve-se começar as escolhas pelo algarismo das unidades.

Portanto, em uma questão de contagem, **deve-se dar prioridade para encadear as decisões de modo que sejam tomadas inicialmente as decisões que possuem mais restrições, para somente depois tomar as decisões que possuam menos restrições.** Procedendo desta forma, diminui-se a quantidade de situações em que é obrigatório dividir o problema em casos, como vai ser analisado no item seguinte.

5.1.3. Quando é Obrigatório Separar em Casos?

Nem sempre é possível resolver um problema de contagem de forma direta. Em determinadas situações é obrigatório dividir a análise de uma das decisões em casos. Isto ocorre quando, no momento exato de determinar o número de maneiras que uma decisão pode ser tomada, aparece a palavra "**DEPENDE**". Como exemplo, considere a situação apresentada no item anterior, quando deseja-se calcular a quantidade de números pares de três dígitos distintos. Por mais que as decisões sejam

tomadas seguindo a ordem das mais restritivas para as menos restritivas (unidades – centenas – dezenas), no momento de escolher o dígito das centenas (2ª decisão), é necessário saber se o algarismo 0 foi usado ou não como algarismo das unidades (1ª decisão). Se o 0 for algarismo das unidades tem-se 9 possibilidades para escolher o algarismo das centenas. Se o 0 não for o algarismo das unidades tem-se 8 possibilidades para o algarismo das centenas. Assim, na situação problema apresentada, é obrigatório dividir a análise em dois casos: i) 0 é algarismo das unidades; ii) 0 não é algarismo das unidades.

Quando for obrigatório dividir a análise em casos, é importante que os casos formem uma **PARTIÇÃO** do que está sendo estudado. Uma partição ocorre quando você divide o espaço amostral (conjunto de tudo que pode acontecer no experimento) em subconjuntos, de modo que a interseção de todo par desses subconjuntos seja vazia e a união desses subconjuntos seja igual ao espaço amostral.

5.2. MÉTODO DIRETO DE CONTAGEM

O método direto de contagem se baseia em fazer a contagem seguindo uma sequência lógica com que são estruturadas as decisões que se quer tomar. Por exemplo, estudando pelo método direto de contagem quantos números distintos de três algarismos existem, inicialmente devemos escolher o algarismo das centenas, depois escolher o algarismo das dezenas e finalmente escolher o algarismo das unidades. Portanto, no método direto de contagem é muito importante traçar uma estratégia de contagem levando em consideração como é construído o encadeamento das decisões.

5.3. MÉTODO INDIRETO DE CONTAGEM

Imagine que você deseja quantificar algo que possui algumas restrições que, pelo método direto de contagem, produzirão uma expressão relativamente grande, devido ao fato de ser obrigatório separar o espaço amostral em vários casos. Uma alternativa interessante é retirar algumas das restrições (de preferência todas), contar o total da situação que sobrou sem as restrições e depois subtrair desta quantidade os casos que não interessam. Este é o fundamento do método indireto de contagem. Por exemplo, digamos que se deseja calcular a quantidade de palavras com quatro letras sendo pelo menos uma vogal. Observe que é muito melhor calcular o total de palavras de quatro letras (sem restrições!) e subtrair deste valor o total de palavras de quatro letras formadas apenas por consoantes, do que calcular o total de palavras de quatro letras com exatamente uma vogal mais o total com exatamente duas vogais mais o total com exatamente três vogais mais o total com exatamente quatro vogais.

Perceba que por trás da ideia do método indireto está o conceito de complementar de um conjunto, onde se $A \subset U$, tem-se $n(A) = n(U) - n(A^C)$.

5.4. PRINCIPAIS ERROS COMETIDOS EM QUESTÕES DE CONTAGEM

Serão enumerados abaixo os principais erros cometidos quando da resolução de uma questão de contagem. Atente para não repetir esses erros.

i) quando todos os casos não foram identificados

Um dos erros mais comuns, em questões que se deve separar a análise em vários casos, é esquecer um ou mais casos, principalmente aqueles extremos, onde uma determinada quantidade deve ser nula. Aqui não há como o autor deste livro dar "dicas" de como não esquecer casos, no máximo deve-se destacar que é importante ficar muito atento quando da divisão em casos.

ii) quando aparece a expressão "pelo menos"

Aqui é um caso clássico de erro ao tentar resolver a contagem em uma expressão só. Por mais que, em pouquíssimos casos, seja possível resolver diretamente uma questão com a restrição "pelo menos", a sugestão sempre é separar em vários casos ou usar o método indireto. Por exemplo, considere a situação problema de encontrar a quantidade de anagramas com 5 letras distintas contando com pelo menos uma vogal. O método mais rápido e correto é calcular o número total de anagramas (sem restrições) e depois subtrair dos anagramas que não possuem nenhuma vogal. Um erro comum é tentar "garantir" uma vogal, escolhendo uma das cinco pra fazer parte do anagrama e depois escolher as demais 4 letras dentre as demais 4 vogais (retirando a que já foi escolhida) e as consoantes. O erro aqui reside em contar várias vezes o mesmo anagrama. Em um caso, "garante-se" a vogal A no anagrama e escolhem-se como demais letras B, C, D e E. Entretanto, em outro caso, "garante-se" a vogal E no anagrama e escolhem-se como demais letras A, B, C e D. Perceba que é mesma escolha de 5 letras, contadas como se fossem combinações diferentes, provocando um erro na contagem.

iii) quando não se sabe o que está sendo contado

Esta é uma situação de interpretação errada do enunciado da questão, muito comum quando se inicia o estudo da combinatória. Por exemplo, suponha que você vai numa sorveteria e deseja escolher o sabor de 5 sorvetes, dentre 20 sabores disponíveis. Uma interpretação errada é achar que a quantidade de maneiras de comprar os sorvetes é igual ao número de maneiras de escolher 5 elementos distintos dentre 20 disponíveis. Mais adiante no livro você verá que isso se chama combinação de 20 elementos tomados 5 a 5. Mas porque esta interpretação está errada? Por um acaso alguém disse que é proibido escolher dois ou mais sorvetes do mesmo sabor? Não né? A forma correta de resolver esta questão é determinar a quantidade de pedidos de cada sabor, num total de 5 pedidos, permitindo que um ou mais sabores sejam pedidos mais de uma vez.

iv) quando é melhor olhar de dentro pra fora e não de fora pra dentro

Muitas vezes mudar o ponto de vista da questão facilita a contagem. Por exemplo, suponha que se deseja calcular quantos pares de subconjuntos disjuntos (X, Y) é possível formar com os elementos do conjunto A = {1, 2, 3, ..., 10}. Se você pensar em olhar para os dois subconjuntos, tentando computar o número de maneiras de compô-los, a contagem fica demasiadamente complexa, até porque a quantidade de elementos de cada subconjunto é variável e nem todos os elementos podem ser escolhidos para fazer parte de um dos subconjuntos. A melhor forma de resolver esta situação problema é mudar o foco da análise, observando, de forma individual, os elementos de A e para onde cada elemento pode ir. Note que cada elemento de A pode ir para três destinos: ou X ou Y ou nenhum dos dois.

v) quando deve ser usado o princípio da adição ou da multiplicação

Para entender melhor a utilização correta de cada princípio, observe o próximo tópico.

5.5. PRINCÍPIOS FUNDAMENTAIS DA CONTAGEM

5.5.1. Princípio da Adição

"Se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras, a decisão B poder ser tomada de y maneiras e as decisões são exclusivas (sem interseção), então o número de maneiras de se tomarem as decisões A ou B é x + y."

Demonstração:

Para entender melhor este princípio observe o seguinte exemplo. Digamos que você vai a uma loja de posse de R$ 1,00 para comprar caneta e borracha. Ao chegar à loja você observa que existem 4 tipos diferentes de canetas e 5 tipos diferentes de borrachas. Entretanto o preço de cada caneta e cada borracha é o mesmo: R$ 1,00. Assim, só dá para comprar uma caneta ou uma borracha. Como existem nove elementos (4 canetas e cinco borrachas) e deve-se escolher apenas um, segue diretamente que existem nove possibilidades de fazer a compra.

Vamos agora generalizar. Suponha que a decisão A pode ser tomada de x maneiras e a decisão B pode ser tomada de y maneiras. Suponha também que as decisões A e B são exclusivas, ou seja, cada decisão não implica em uma restrição na outra. Deve-se tomar a decisão A ou a decisão B, então se deve escolher uma dentre x + y decisões, que obviamente pode ser feito de x + y maneiras.

Na verdade, o princípio da adição por si só resolve apenas uma gama muito pequena de situações. O próximo princípio, sendo utilizado em conjunto com o princípio da adição, pode ser considerado bem mais "poderoso".

5.5.2. Princípio da Multiplicação

"Se uma decisão A pode ser tomada de x maneiras e se, uma vez tomada a decisão A, a decisão B pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem as decisões A e B é x.y."

Outra forma de enunciar o princípio da multiplicação é: "Se para cada uma das x maneiras de fazer a ação A existem b maneiras de fazer a ação B, a quantidade de formas de fazer a ações A e B (com A antes de B) é x.y"

Perceba que as duas formulações são totalmente análogas.

Demonstração:

Suponha que a decisão A pode ser tomada de x maneiras distintas e, uma vez tomada a decisão A, a decisão B pode ser tomada de y maneiras distintas. Suponha também que a decisão A consiste dos seguintes elementos: a_1, a_2, ..., a_x, todos distintos e a decisão B consiste dos seguintes elementos: b_1, b_2, ..., b_y, também todos distintos entre si.

Observe a tabela abaixo:

	b_1	b_2	b_3	b_4	...	b_y
a_1					...	
a_2			x		...	
a_3					...	
a_4					...	
...	...	...	...	...	...	...
a_x					...	

Podemos interpretar que cada casa desta tabela está associada a um par ordenado de decisões (a_i, b_j), quaisquer que sejam i e j naturais tais que $1 \leq i \leq x$ e $1 \leq j \leq y$, de acordo com a linha e a coluna que cada casa da tabela pertence. Por exemplo, a casa assinalada com x na tabela pertence à linha a_2 e à coluna b_3, ou seja, está associada à decisão (a_2, b_3). Logo, cada casa da tabela está associada a uma forma de tomar as decisões A e B e cada forma de tomar as decisões A e B está associada a uma casa da tabela. Logo, concluímos que o número de maneiras distintas de tomar as decisões A e B é igual ao número de casas da tabela.

Como nesta tabela existem x linhas e y colunas, segue diretamente que o número de maneiras de tomar as decisões A e B (com A antes de B) é igual a x.y.

5.5.2.1) Algumas Observações Sobre o Princípio da Multiplicação

i) Repare que no enunciado do princípio da multiplicação está embutida a ordem com as decisões são tomadas, sendo inicialmente tomada a decisão A para somente depois ser tomada a decisão B. Logo, quando aplicamos o princípio da multiplicação, a ordem das decisões é levada em consideração. **Entretanto, existem casos em que a ordem das decisões interessa e outros em que a ordem não interessa.** Por exemplo, se quisermos escolher uma camisa e um short dentre 3 camisas e 4 shorts, podemos escolher inicialmente a camisa (3 possibilidades) e depois o short (4 possibilidades). Pelo princípio da multiplicação existem 3.4 = 12 possibilidades de escolher uma camisa e um short. Note que, neste caso, a ordem embutida nas decisões é relevante. Por outro lado, se você fosse convidado a escolher 2 dentre 5 camisas distintas e, pelo princípio multiplicativo, acreditasse que o total de maneiras seria igual a 5.4 = 20 (5 maneiras de escolher a 1ª camisa e 4 maneiras de escolher a 2ª camisa), teríamos chegado e um valor incorreto, uma vez que dentre estas 20 maneiras de escolher, estão os pares ordenados (camisa 1, camisa 2) e (camisa 2, camisa 1), que na verdade equivalem à mesma escolha. Como a aplicação do princípio da multiplicação neste caso faz com que cada escolha seja contada duas vezes, o número de maneiras de escolher as camisas é igual a 20/2 = 10. Mais uma vez é importante notar que a situação proposta não vai deixar explícito se a ordem das decisões é relevante. É necessário bom senso e uma análise cuidadosa para decidir se a ordem das decisões deve ser levada em consideração.

ii) Outro fator importante quanto à ordem das decisões é ter cuidado para não tomar as decisões em paralelo. O enunciado do princípio é claro quanto à necessidade de se estabelecer uma sequência com que as decisões devem ser tomadas. Por exemplo, na situação de determinar quantos números ímpares de dois dígitos distintos existem, é incorreto afirmar que a quantidade de algarismo das dezenas vale 9 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) e a quantidade de algarismos das unidades vale 5 (1, 3, 5, 7, 9) e logo a quantidade de números possíveis é 9.5 = 45. Repare que é necessário definir qual decisão (escolha do algarismo das dezenas e escolha do algarismo das unidades) vai ser tomada primeiro. Escolhendo inicialmente o algarismo das unidades temos 5 possibilidades e escolhendo posteriormente o algarismo das dezenas temos 8 possibilidades (não pode assumir o valor já escolhido para as unidades e nem 0), implicando em um total de 5.8 = 40 números.

iii) O princípio da multiplicação pode ser generalizado para uma quantidade qualquer de decisões. Assim, se a decisão A_1 pode ser tomada de n_1 maneiras, se depois de tomada a decisão A_1, a decisão A_2 pode ser tomada de n_2 maneiras, se depois de tomadas as decisões A_1 e A_2, a decisão A_3 pode ser tomada de n_3 maneiras, ... e se depois de tomadas as decisões A_1, A_2, ..., A_{x-1}, a decisão A_x pode ser tomada de n_x maneiras, então o número de maneiras de se tomar as decisões A_1 e A_2 e A_3 e ... e A_x (nesta ordem) vale $\mathbf{n_1.n_2.n_3...n_x}$.

iv) Nos próximos tópicos veremos algumas expressões (permutação, combinação, arranjo, etc) que reduzirão as contas necessárias para obtermos as respostas nas questões de contagem. Contudo poderemos observar que as demonstrações destas expressões necessitam somente da aplicação dos princípios adição e a multiplicação, implicando que qualquer situação de contagem pode ser resolvida pela aplicação correta (geralmente em conjunto) dos princípios da adição e multiplicação. Portanto, por mais que geralmente resulte em expressões maiores, o perfeito domínio destes princípios fundamentais da contagem permite que qualquer um resolva todas as questões de contagem, desde as mais simples até as mais complexas.

Exercícios Resolvidos

1) Quantos números de 3 dígitos distintos podem ser formados com 0, 1, 2, 3, 4:
a) sem restrições?
b) ímpares?
Solução:
a) Os números formados podem ser organizados da seguinte maneira:

$\underbrace{\quad}_{1^{o}\text{ dígito}}\ \underbrace{\quad}_{2^{o}\text{ dígito}}\ \underbrace{\quad}_{3^{o}\text{ dígito}}$

Como o número deve possuir três dígitos então o 1° dígito não pode ser 0, sobrando assim 4 possibilidades para a sua escolha. Eliminado este dígito, na escolha do 2° dígito temos 4 possibilidades (o dígito 0 agora é possível). Consequentemente, temos 3 possibilidades para a escolha do 3° dígito. Uma vez que devemos escolher o 1° dígito **e** o 2° dígito **e** o 3° dígito, o total é $4.4.3 = 48$.
b) Tentemos fazer a conta como no item anterior. Entretanto, como existe agora a restrição do número ser ímpar, então vamos começar a análise das escolhas pelo 3° dígito. Desde que existem somente dois dígitos ímpares possíveis (1 e 3), para a escolha do 3° dígito temos 2 possibilidades. Aparentemente, para a escolha do 2° dígito, temos 4 possibilidades (os 5 possíveis menos o que já saiu para o 3° dígito). Na escolha do 1° dígito acontece um dilema. Como o 0 não pode ocupar a posição do 1° dígito, se o 0 tiver ocupado a posição do 2° dígito então temos 3 possibilidades para o 1° dígito, porém se o 0 não for o 2° dígito temos somente 2 possibilidades para o 1° dígito. Deste modo, é necessário separar em dois casos a escolha do 2° dígito:
i) 1° caso (2° dígito igual a 0): sobram 3 possibilidades para o 1° dígito;
ii) 2° caso (2° dígito diferente de 0): temos 3 possibilidades para o 2° dígito e depois temos 2 possibilidades para a escolha do 1° dígito.
Como deve-se escolher o 3° dígito **e** depois os dois primeiros (que devem ser separados em 1° caso **ou** 2° caso), pelos princípios da adição e da multiplicação, então existem $2(3 + 3.2) = 18$ números possíveis.

2) Determine o número de funções ímpares f: A→A, com A = {– 3, – 2, – 1, 0, 1, 2, 3}, que podem ser formadas.

a) 6^4 b) 7^3 c) $\binom{7}{3}$ d) $3!\binom{7}{3}$ e) $3^7\binom{7}{4}$

Solução: Alternativa B

Como f é ímpar: f(0) = 0 ⇒ 1 possibilidade

f(1) = – f(– 1) ⇒ 7 possibilidades

f(2) = – f(– 2) ⇒ 7 possibilidades

f(1) = – f(– 1) ⇒ 7 possibilidades

Total = 1×7×7×7 = 7^3

3) (OBM-05) Num tabuleiro quadrado 5×5, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo. De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

Solução:

Perceba que, para cada hipotenusa, existem duas maneiras de escolher o vértice do ângulo reto. Assim, o número de triângulos retângulos é igual a duas vezes o número de maneiras de escolher a hipotenusa. O primeiro botão pode ficar em 25 lugares, já o segundo pode ficar em 16 (todos que não estão na mesma linha ou coluna do primeiro). Como a hipotenusa AB é igual à hipotenusa BA, deve-se dividir o produto 25.16 por 2: 25.16/2 = 400 triângulos. Logo a resposta é 400 triângulos.

Obs. Para um quadrado n×n a quantidade de triângulos é dada pela fórmula $\frac{n^2\cdot(n-1)^2}{2}\cdot 2=\left[n\cdot(n-1)\right]^2$ se generalizamos esse processo que foi utilizado.

4) (AFA-17) Um baralho é composto por 52 cartas divididas em 4 naipes distintos (copas, paus, ouros e espadas). Cada naipe é constituído por 13 cartas, das quais 9 são numeradas de 2 a 10, e as outras 4 são 1 valete (J), 1 dama (Q), 1 rei (K) e 1 ás (A). Ao serem retiradas desse baralho duas cartas, uma a uma e sem reposição, a quantidade de sequências que se pode obter em que a primeira carta seja de ouros e a segunda não seja um ás é igual a

a) 612 b) 613 c) 614 d) 615

Solução: Alternativa A

Vamos separar a análise em dois casos:

i) a 1ª extração é da carta ás de ouros:

Para a 1ª extração existe apenas 1 possibilidade. Note que sobraram no baralho 51 cartas, sendo 3 deles um ás, ou seja, 48 cartas não são ás. Assim, para este 1° caso existem 1 × 48 = 48 possibilidades.

ii) a 1ª extração não é o ás de ouros:

Das 13 cartas de ouros, só uma é o ás de ouros, ou seja, existem 12 possibilidades para a 1ª extração neste 2º caso. Sobraram 51 cartas no baralho, sendo que 4 são ás, ou seja, existem 47 possibilidades para a 2ª extração. Portanto, para o 2º caso existem $12 \times 47 = 564$ possibilidades.
Como ocorre o 1º caso ou o 2º caso, existem $48 + 564 = 612$ possibilidades no total.

5) (IME-92) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.
Solução:
A forma geral de um número de três dígitos é $\underbrace{\quad}_{1^{\circ}\text{ dígito}}\ \underbrace{\quad}_{2^{\circ}\text{ dígito}}\ \underbrace{\quad}_{3^{\circ}\text{ dígito}}$, onde o 1º dígito (mais a esquerda) não pode ser zero. Além disso, no sistema de numeração em base 7 temos 7 dígitos possíveis: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Para a escolha do 1º dígito temos 6 possibilidades (o dígito 0 não pode ser escolhido). Para a escolha do 2º dígito temos 6 possibilidades (o dígito 0 até que pode ser escolhido, mas o dígito escolhido para o 1º dígito não pode). Para a escolha do 3º dígito temos 5 possibilidades (os dois dígitos já escolhidos não podem mais ser utilizados).
Como devemos escolher o 1º dígito e o 2º dígito e o 3º dígito temos, no total, $6.6.5 = 180$ números naturais de 3 algarismos distintos no sistema de base 7

6) (OBM-10) Dizemos que um número inteiro positivo n é *abestado* se ao lermos da direita para esquerda obtivermos um inteiro maior que n. Por exemplo, 2009 é abestado porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é abestado pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é abestado pois quando lido da direita para esquerda é exatamente igual ao original. Quantos inteiros positivos de quatro algarismos são abestados?
Solução:
Seja m o número obtido a partir de n lendo os dígitos em ordem inversa.
Existem 3 possibilidades: $n > m$, $n < m$ (n abestado) e $n = m$ (n palíndromo).
Inicialmente vamos analisar os casos em que n termina em 0. Nesta situação sempre ocorre $n > m$ pois m possui menos de 4 dígitos.
$_\ _\ _\ 0 \Rightarrow 9 \times 10 \times 10 = 900$ números.
Sabe-se que existem 9000 números de 4 dígitos. Excetuando os que terminam em 0 existem $9000 - 900 = 8100$ números. Nestes 8100 úmeros a quantidade de números em que $n > m$ é igual à quantidade em que $n < m$.
Os palíndromos são da forma $a\ b\ b\ a$, onde $a \neq 0$. Logo, existem $9 \times 10 = 90$ palíndromos de 4 dígitos.
Desta maneira, a quantidade de abestados é $\frac{8100-90}{2} = 4005$.

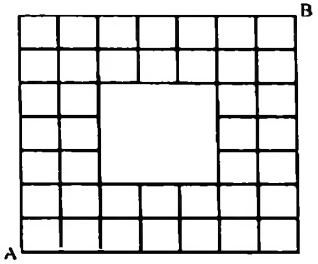
7) (UFRJ-01) A mala do Dr. Z tem um cadeado cujo segredo é uma combinação com cinco algarismos, cada um dos quais podendo variar de 0 a 9. Ele esqueceu a combinação que escolhera como segredo, mas sabe que atende às condições:
a) se o primeiro algarismo é ímpar, então o último algarismo também é ímpar;
b) se o primeiro algarismo é par, então o último algarismo é igual ao primeiro;
c) a soma dos segundo e terceiro algarismos é 5.
Quantas combinações diferentes atendem às condições estabelecidas pelo Dr. Z ?
Solução:
Seja *abcde* o segredo do cadeado. No 1º caso, se *a* é ímpar (5 possibilidades) então *e* também é ímpar (5 possibilidades). Para este 1º caso, temos 5.5 = 25 possibilidades. No 2º caso, se *a* é par (5 possibilidades) então *e* é igual a *a* (1 possibilidade). No total temos 5.1 = 5 possibilidades.
Uma vez que b + c = 5: 0 + 5; 1 + 4; 2 + 3; 3 + 2; 4 + 1; 5 + 0
Assim, existem 6 possibilidades para b + c = 5.
Como para *d* não existe restrição, existem 10 possibilidades para a sua escolha.
Como devemos escolher *a* e *e* (cuja escolha é dividida em 1º e 2º casos) e escolher *b* e *c* e escolher *d*, temos (25 + 5).6.10 = 1800 possibilidades.

8) (OBM-06) Quantos subconjuntos $\{a, b, c\}$ de três elementos distintos de $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ são tais que *b* é a média aritmética de *a* e *c* ($a < b < c$)?
Solução:
A soma de *A* e *C* deve ser par pois a média entre *A* e *C*, $\frac{A+C}{2}$, resulta em um inteiro *B*, para isso *A* e *C* devem ser números pares ao mesmo tempo ou devem ser números ímpares ao mesmo tempo.
No começo podemos escolher 100 *A*'s diferentes; para cada *A* ímpar, restam 49 ímpares, e, se *A* for par, restam 49 pares para escolher no lugar de *C*, e por último só há um número *B* para escolher pois só há uma média aritmética entre *A* e *C*.
Em metade dos casos ocorrerá $A > C$, pois para cada casa em que $A < C$ podemos trocar os valores de *A* e *C*, metade dos casos são inválidos.
No final temos $\frac{100 \cdot 49 \cdot 1}{2} = 2450$ subconjuntos.

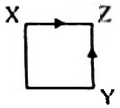
9) De quantas maneiras podemos distribuir 10 objetos distintos entre dois grupos distintos de modo que cada grupo receba pelo menos um objeto?
Solução:
Designemos os grupos de grupo 1 e grupo 2. Nesta questão pode-se raciocinar de duas maneiras distintas: ou você pensa como os grupos podem ser compostos pelos objetos ou como cada objeto pode ser distribuído nos grupos. A segunda maneira produz uma solução mais enxuta. Basta você observar que cada objeto possui duas maneiras de ser distribuído: ou vai para o grupo 1 ou vai para o grupo 2. Como são

ao todo 10 objetos, temos 2^{10} possibilidades de distribuição. Entretanto, esta contagem inclui as possibilidades de algum grupo ficar com nenhum objeto. Como o total destas possibilidades é 2 (o grupo 1 com 0 e o grupo 2 com 10 ou o grupo 1 com 10 e o grupo 2 com 0), o total é $2^{10} - 2 = 1022$.

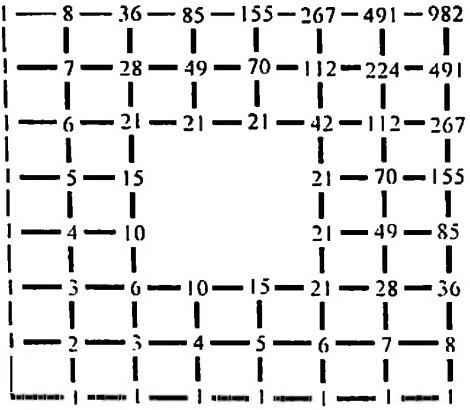
10) A imagem abaixo representa uma parte de um mapa de um bairro, onde as linhas representam ruas e a parte central é ocupada por uma lagoa artificial de formato quadrado. Uma pessoa pretende ir da esquina A à esquina B, andando somente pelas ruas e percorrendo o menor trajeto possível. De quantas maneiras é possível fazer tal caminho?



Solução:



De modo a ir de A para B percorrendo caminhos de comprimento mínimo é necessário sempre se movimentar, ao chegar numa esquina, pra cima ou pra direita. Assim, para chegar no ponto Z da figura ao lado só há duas possibilidades: ou vem de X ou vem de Y. Assim, pelo princípio aditivo, pode-se afirmar que $\mathbf{n(Z) = n(X) + n(Y)}$. Logo, pode-se preencher na figura do mapa as quantidades de maneiras de chegar em cada uma das esquinas:



Assim, há 982 possibilidades de ir de A até B por caminhos mínimos.

11) Em uma banca há 5 exemplares iguais da revista A, 6 exemplares iguais da revista B e 10 exemplares iguais da revista C. Quantas coleções não-vazias de revistas dessa banca é possível formar?

Solução:

Note que os objetos não são todos distintos. As 5 revistas A são todas iguais entre si, assim como as 6 revistas B são iguais entre si e o mesmo valendo para as 10 revistas C. A diferenciação das coleções não está no fato se cada uma das 21 revistas vai ou não estar na coleção, e sim quais as quantidades de revistas A, B e C vão fazer parte da coleção. Se você ainda não se convenceu do que diferencia uma coleção de outra pense no seguinte: monte uma coleção pegando 3 revistas B com 5 revistas C e depois monte outro grupo pegando outras 3 revistas B e outras 5 revistas C. Agora pare e olhe para estas duas coleções. Elas são idênticas, não é? É por isso que a diferenciação das coleções não está no fato se cada revista vai ou não para a coleção e sim nas quantidades de revistas A, B e C escolhidas.

Pense primeiro nas revistas A. Temos 6 formas distintas de escolher a quantidade de revistas A que vai para a coleção: 0, 1, 2, 3, 4 e 5. O mesmo vale para a revista B, onde temos 7 formas de escolher sua quantidade que vai para a coleção: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6. Finalmente, como existem 10 revistas C, temos 11 possibilidades de escolher sua quantidade que vai para a coleção.

Perceba que transformamos a questão em montar ternos ordenados (nº de revistas A, nº de revistas B, nº de revistas C). Como as coleções de revistas devem ser não vazias, deve-se excluir o terno (0, 0, 0).

Portanto, o total é $6.7.11 - 1 = 461$.

12) (Olimpíada do Irã-95) Seja X um conjunto com n elementos. Mostre que o número de pares (A, B) tais que A e B são subconjuntos de A, A é um subconjunto de B e $A \neq B$ é igual a $3^n - 2^n$.

Solução:

Sabemos que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é igual a 2^n. Portanto, o número de pares (A, B) com $A = B$ é igual a 2^n.

Vamos agora calcular o número de pares (A, B) com A subconjunto de B (possivelmente igual a B). Tome um elemento x_i ($1 \leq i \leq n$) qualquer de X.

Para que ocorra $A \subset B$, x_i deve pertencer ou somente a B ou simultaneamente a A e B ou a nenhum deles. Como para cada um dos n elementos de X existem 3 possibilidades, então existem 3^n pares (A, B) com $A \subset B$.

Logo, o número de pares em que $A \subset B$, com $A \neq B$ é igual a $3^n - 2^n$.

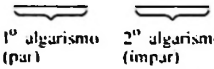
13) (ITA-01) Considere os números de 2 a 6 algarismos distintos formados utilizando-se apenas 1, 2, 4, 5, 7 e 8. Quantos destes números são ímpares e começam com um dígito par?

a) 375 b) 465 c) 545 d) 585 e) 625

Solução: Alternativa D

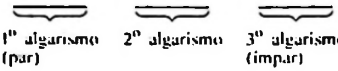
Vamos separar nossa análise em cinco casos.

i) números de dois algarismos:



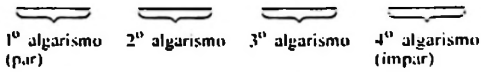
Temos 3 possibilidades para escolher o 1º algarismo e 3 para escolher o 2º, ou seja, 3.3 = 9 possibilidades no total.

ii) números de três algarismos:



Temos 3 possibilidades para escolher o 1º algarismo, 3 possibilidades para escolher o 2º e 4 possibilidades para escolher o 2º, ou seja, 3.3.4 = 36 possibilidades no total.

iii) números de quatro algarismos:

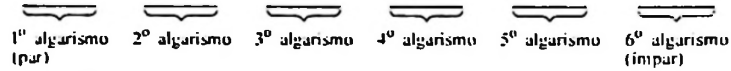


Temos 3 possibilidades para escolher o 1º algarismo, 3 possibilidades para escolher o 4º, 4 possibilidades para escolher o 2º e 3 para escolher o 3º, ou seja, 3.3.4.3 = 108 possibilidades no total.

iv) números de cinco algarismos:

Temos 3 possibilidades para escolher o 1º algarismo, 3 possibilidades para escolher o 5º, 4 possibilidades para escolher o 2º, 3 para escolher o 3º e 2 possibilidades para escolher o 4º, ou seja, 3.3.4.3.2 = 216 possibilidades no total.

iv) números de seis algarismos:

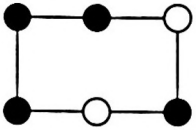


Temos 3 possibilidades para escolher o 1º algarismo, 3 possibilidades para escolher o 6º, 4 possibilidades para escolher o 2º, 3 para escolher o 3º, 2 possibilidades para escolher o 4º e 1 possibilidade para escolher o 5º, ou seja, 3.3.4.3.2.1 = 216 possibilidades no total.

Como temos a ocorrência do 1º caso ou o 2º caso ou o 3º caso ou o 4º caso ou o 5º caso, temos 9 + 36 + 108 + 216 + 216 = 585 números no total.

14) (IME-66) Determinada organização estabeleceu um sistema de códigos em que os símbolos são formados por um ou mais pontos, até o máximo de 6 pontos, dispostos de maneira a ocuparem os vértices e os pontos médios dos lados maiores de um retângulo. Qual o número total de símbolos obtidos.

Solução:



Analisemos da seguinte maneira o problema. Se um ponto estiver presente em um símbolo, então o círculo correspondente a sua localização está escuro. Por outro, se o ponto não estiver presente o círculo estará claro. A figura ao lado representa um símbolo possível. Perceba que temos duas possibilidades para cada círculo: escuro ou claro. Como são ao todo 6 círculos e devemos excluir uma possibilidade (todos claros) então o total é $2^6 - 1 = 63$.

15) (ITA-65) Considere os inteiros de 1 até 10.000.000.000

a) Em quantos deles usamos o algarismo 1 em sua representação?

b) Em quantos deles o algarismo 1 não ocorre na representação?

c) Qual o maior, o número daqueles em que entra o 1 em sua representação, ou o número daqueles em que não entra o algarismo 1?

Nota: log 9 = 0,9542 log 3,49 = 0,542 log 2 = 0,3010

Solução:

Didaticamente, é aconselhável fazer primeiro o item b.

b) Perceba que de 1 até 10^{10} existem exatamente 10^{10} números inteiros.

Com exceção de 10^{10} (que não conta no item b pois 1 ocorre da representação) todos os outros inteiros de 1 até 10^{10} podem ser esquematizados da seguinte forma:

$$__________$$

onde cada um dos __ devem ser ocupados por um dos algarismos: 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, ou seja, existem 9 possibilidades para cada um dos 9 dígitos. Entretanto, uma das possibilidades é escolher o algarismo 0 em todos os __, obtendo 000.000.000, que não pertence ao intervalo de 1 até 10^{10}. Logo, excluindo esse número, existem $9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 - 1 = 9^9 - 1$ números inteiros de 1 até 10^{10} que não possuem 1 em sua representação decimal.

a) Para calcular os números de 1 até 10^{10} que possuem 1 em sua representação basta subtrair o total de números da quantidade dos que não possuem 1 em sua representação. Assim, existem $10^{10} - (9^9 - 1) = 10^{10} - 9^9 + 1$ números que possuem 1 em sua representação.

c) Observe que $9^9 = 9^4.9^5 = 6561.59049 < 4.10^8 < 5.10^8$. Logo, a quantidade de números de 1 até 10^{10} que não possuem 1 na sua representação é menor que a metade de todos os números de 1 até 10^{10}. Como todos os números nesse intervalo pertencem a uma das duas classificações em questão, se conclui que os números que possuem 1 na sua representação estão em maior quantidade.

16) (IME-05) O sistema de segurança de uma casa utiliza um teclado numérico, conforme ilustrado na figura. Um ladrão observa de longe e percebe que:
- a senha utilizada possui 4 dígitos;
- o primeiro e o último dígitos encontram-se numa mesma linha;
- o segundo e o terceiro dígitos encontram-se na linha imediatamente superior.

Calcule o número de senhas que deverão ser experimentadas pelo ladrão para que com certeza ele consiga entrar na casa.

1	2	3
4	5	6
7	8	9
	0	

Teclado numérico

Solução:
Se o 1º e 4º dígitos forem iguais a zero (1 possibilidade de escolha) então o 2º e 3º dígitos estarão na 3ª linha (9 possibilidades de escolha).
Se o 1º e 4º dígitos estiverem na 3ª linha (9 possibilidades de escolha) então o 2º e 3º dígitos estarão na 2ª linha (9 possibilidades de escolha).
Se o 1º e 4º dígitos estiverem na 2ª linha (9 possibilidades de escolha) então o 2º e 3º dígitos estarão na 1ª linha (9 possibilidades de escolha).
Deste modo, o total de possibilidades é: $1.9 + 9.9 + 9.9 = 171$

17) (Olimpíada da Estônia-01) Quantos números inteiros positivos menores que 20002001 não contém outros algarismos distintos de 0 e 2?
Solução:
Inicialmente contemos os números formados somente de 0 e 2 (menores que 20002001) e que iniciam com 2.
O maior destes é certamente 20002000. Os outros são da forma 20000_ _ _, onde os 3 espaços vazios podem ser ocupados por 0 ou 2, implicando que existem $2^3 = 8$ possibilidades.
Os números restantes são da forma 0 _ _ _ _ _ _ _, onde os 7 espaços vazios podem ser ocupados novamente por 0 ou 2. Temos, portanto, $2^7 = 128$ números possíveis. Notemos, entretanto, que o número 00000000 não é válido, pois deve-se apenas contar os inteiros positivos e que, nesta contagem, não incluímos o 20002000.
Deste modo, o total é $8 + 128 - 1 + 1 = 136$ inteiros positivos formados por 0 ou 2 e menores que 20002001.

18) (OBM-98) De quantos modos se pode colocar na tabela abaixo duas letras *A*, duas letras *B* e duas letras *C*, uma em cada casa, de modo que não haja duas letras iguais na mesma coluna?

a) 12 b) 24 c) 36 d) 48 e) 64

Solução: Alternativa D

Inicialmente, podemos notar que existem seis maneiras de as letras serem colocadas em cada coluna:

A B A C B C
B A C A C B

Assim, para a escolha da 1ª coluna temos 6 possibilidades.

Digamos que na 1ª coluna seja escrita a sequência $\begin{matrix} A \\ B \end{matrix}$.

Repare que não podemos escrever na 2ª coluna a sequência $\begin{matrix} B \\ A \end{matrix}$, pois assim sobraria para a última coluna a sequência $\begin{matrix} C \\ C \end{matrix}$, que não é permitida.

Sobram, para as escolhas na 2ª coluna as sequências: $\begin{matrix} A & C & B & C \\ C & A & C & B \end{matrix}$

Portanto, existem 4 possibilidades de preencher a 2ª coluna.

Suponhamos que escolhemos a sequência $\begin{matrix} B \\ C \end{matrix}$. Assim, sobram para o preenchimento da 3ª coluna as possibilidades $\begin{matrix} A \\ C \end{matrix}$ ou $\begin{matrix} C \\ A \end{matrix}$, ou seja, 2 possibilidades.

Como devemos preencher a 1ª coluna e a 2ª coluna e a 3ª coluna, temos 6.4.2 = 48 maneiras de preencher toda a tabela.

19) (Olimpíada da Argentina-01) Carlos escreve a lista de todos os números naturais menores que 10000 que tem exatamente dois dígitos 1 consecutivos. (Por exemplo, 113, 5112, 1181 estão na lista de Carlos, porém 1312, 2111 não estão na lista de Carlos.) Achar quantos números tem a lista de Carlos.

Solução:

Os números menores que 10000 são os que possuem quatro ou menos dígitos. Podemos representá-los da forma $\underbrace{\quad}_{1^{o}\text{ dígito}}\ \underbrace{\quad}_{2^{o}\text{ dígito}}\ \underbrace{\quad}_{3^{o}\text{ dígito}}\ \underbrace{\quad}_{4^{o}\text{ dígito}}$, onde os dígitos podem variar desde 0 até 9. Assim, de quisermos analisar os números de 3 dígitos, basta fazer o 1º dígito igual a 0. Analogamente, para analisar os números de dois dígitos, basta fazer o 1º e 2º dígitos iguais a 0.

Vamos separar a análise em três casos:

i) Os dois primeiros dígitos iguais a 1: 1 1 $\underbrace{\quad}_{3^{o}\text{ dígito}}$ $\underbrace{\quad}_{4^{o}\text{ dígito}}$

Note que temos 9 possibilidades para o 3º dígito (o dígito 1 não pode ser escolhido) e 10 possibilidades para o 4º dígito, implicando em um total de 9.10 = 90 possibilidades.

ii) Os dois dígitos centrais são iguais a 1: $\underbrace{\quad}_{1^{o}\text{ dígito}}$ 1 1 $\underbrace{\quad}_{4^{o}\text{ dígito}}$

Note que temos 9 possibilidades para o 1º dígito (o dígito 1 não pode ser escolhido, mas o dígito 0 pode) e 9 possibilidades para o 4º dígito (o dígito 1 não pode ser escolhido), implicando em um total de 9.9 = 81 possibilidades.

iii) Os dois últimos dígitos iguais a 1: $\underbrace{\quad}_{1^{o}\text{ dígito}}$ $\underbrace{\quad}_{2^{o}\text{ dígito}}$ 1 1

Note que temos 10 possibilidades para o 1º dígito (os dígitos 1 e 0 podem ser escolhidos) e 9 possibilidades para o 2º dígito (o dígito 1 não pode ser escolhido), implicando em um total de 9.10 = 90 possibilidades.

Portanto, como temos o 1º caso ou o 2º caso ou o 3º caso, existem 90 + 81 + 90 = 261 números naturais menores que 10000 que tem exatamente dois dígitos 1 consecutivos.

20) (Olimpíada Paraense-02) Determine de quantas maneiras é possível percorrer as letras no diagrama abaixo (iniciando do B central) de modo que as letras escolhidas formem (na ordem que foram escolhidas) a palavra BELÉM. É permitido somente mover-se na horizontal (esquerda ou direita) e na vertical (para cima ou para baixo).

```
        M
      M É M
    M É L É M
  M É L E L É M
M É L E B E L É M
  M É L E L É M
    M É L É M
      M É M
        M
```

Solução:

Partindo de B, temos 4 possibilidades para escolher E. De cada E temos 3 possibilidades para escolher L.

Separemos agora em dois casos para L:

i) L na linha ou coluna centrais: existem 3 possibilidades para escolher É;

ii) caso contrário: existem 2 possibilidades para escolher É.

Separemos também em dois casos para É:

i) É na linha ou coluna centrais: existem 3 possibilidades para escolher M;

ii) caso contrário: existem 2 possibilidades para escolher M.
O total de maneiras é: $4.[2.4 + 2.2 + 3] = 4.15 = 60$

21) (Olimpíada Nórdica-00) De quantas maneiras pode o número 2000 ser escrito como a soma de três inteiros positivos, não necessariamente diferentes? (Somas como 1 + 2 + 3 e 3 + 1 + 2, etc. são consideradas iguais)
Solução:
Suponha que $x + y + z = 2000$, com $x \leq y \leq z$.
Assim, $2000 = x + y + z \geq x + x + x = 3x \Rightarrow x \leq 666{,}66... \Rightarrow 1 \leq x \leq 666$
Analisando cada valor de x:
$x = 1 \Rightarrow y + z = 1999 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(1, 1998), (2, 1997), (3, 1996), ..., (999, 1000)\} \Rightarrow$ 999 soluções
$x = 2 \Rightarrow y + z = 1998 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(2, 1996), (3, 1995), (4, 1994), ..., (999, 999)\} \Rightarrow$ 998 soluções
$x = 3 \Rightarrow y + z = 1997 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(3, 1994), (4, 1993), (5, 1992), ..., (998, 999)\} \Rightarrow$ 996 soluções
$x = 4 \Rightarrow y + z = 1996 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(4, 1992), (5, 1991), (6, 1990), ..., (998, 998)\} \Rightarrow$ 995 soluções
$x = 5 \Rightarrow y + z = 1995 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(5, 1990), (6, 1989), (6, 1988), ..., (997, 998)\} \Rightarrow$ 993 soluções
$x = 6 \Rightarrow y + z = 1994 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(6, 1988), (7, 1987), (8, 1986), ..., (997, 997)\} \Rightarrow$ 992 soluções
$x = 7 \Rightarrow y + z = 1993 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(7, 1986), (8, 1985), (9, 1984), ..., (996, 997)\} \Rightarrow$ 990 soluções
$x = 8 \Rightarrow y + z = 1992 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(8, 1984), (9, 1983), (10, 1982), ..., (996, 996)\} \Rightarrow$ 899 soluções
...
$x = 665 \Rightarrow y + z = 1335 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(665, 670), (666, 669), (667, 668\}\} \Rightarrow$ 3 soluções
$x = 666 \Rightarrow y + z = 1334 \Rightarrow$
$(y, z) = \{(666, 668), (667, 667)\} \Rightarrow$ 2 soluções
Total:
$N = 2 + 3 + 5 + 6 + 8 + 9 + 11 + 12 + ... + 995 + 996 + 998 + 999 \Rightarrow$
$N = (2 + 5 + 8 + 11 + ... + 998) + (3 + 6 + 9 + 12 + ... + 999) =$
$= \frac{(2+998)333}{2} + \frac{(3+999)333}{2} = 333333.$

5.6. FATORIAL

Fatorial de um número natural é uma função matemática definida no conjunto dos números naturais da seguinte maneira:

$$0! = 1;$$
$$1! = 1;$$
$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times n.$$

Lê-se a expressão n! como "n fatorial" ou "fatorial de n".
Por exemplo: $2! = 1 \times 2 = 2$ e $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$.
Também é possível definir fatorial de maneira recursiva:

$$0! = 1;$$
$$n! = n \times (n-1)!, \text{ para } n \geq 1$$

Deste modo, pode-se afirmar que $10! = 10 \times 9!$ e $2018! = 2018 \times 2017!$.

Devido à extensa utilização, é interessante conhecer os fatoriais dos primeiros números naturais:

$0! = 1$	$1! = 1$	$2! = 2$	$3! = 6$
$4! = 24$	$5! = 120$	$6! = 720$	$7! = 5040$

Nas questões de contagem, caso a resposta seja um número relativamente muito grande, é normal deixar a resposta indicada em forma dos fatoriais das quantidades envolvidas na situação problema. Por exemplo, suponha que a resposta de uma questão de contagem seja o produto $15! \times 12!$. Ninguém vai exigir que você calcule os valores de 15! e de 12! e depois ainda faça o produto destes dois números. Para se ter uma ideia, esse produto é um número natural de 21 dígitos! Nestes casos de a resposta ser um número grande, pode-se deixar a conta, em função de fatoriais, que leva à resposta correta.

Logicamente que o conceito de número grande pode variar de pessoa pra pessoa, mas existe certo consenso que números de mais de 5 dígitos podem ficar indicados em forma de fatoriais.

5.7. PERMUTAÇÕES SIMPLES

5.7.1. Introdução:

Considere que você possui n objetos distintos e deseja colocá-los em uma ordem qualquer. A qualquer uma destas possibilidades de colocar os n objetos distintos em ordem dá-se o nome de **permutação simples**.

Por exemplo, tome os elementos distintos A, B e C. Uma das possíveis permutações simples (ou seja, uma das possíveis maneiras de colocá-los em ordem) destes elementos é B C A.

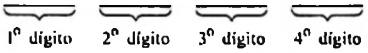
5.7.2. Número de permutações simples de elementos distintos

Inicialmente vamos analisar a seguinte situação: suponhamos que se deseja calcular a quantidade de números de quatro dígitos distintos formados a partir dos dígitos 1, 2, 3 e 4. Enumerando-os, de forma organizada, chegamos aos seguintes números:

1234	2134	3124	4123
1243	2143	3142	4132
1324	2314	3214	4213
1342	2341	3241	4231
1423	2413	3412	4312
1432	2431	3421	4321

Assim, concluímos que existem 24 números de quatro dígitos distintos formados a partir de 1, 2, 3 e 4. Na verdade, como 1, 2, 3 e 4 são algarismos distintos, eles podem representar quaisquer quatro objetos distintos que desejamos colocar em ordem. Deste modo, podemos chegar à conclusão que sempre que tivermos 4 elementos distintos, existem 24 permutações simples destes elementos, ou seja, 24 maneiras distintas de colocá-los em ordem em uma linha. O símbolo P_n significa a quantidade de permutações simples de n elementos distintos. No caso anterior, concluímos, por enumeração, que $P_4 = 24$.

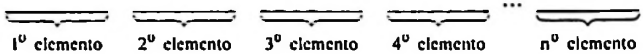
Entretanto, quando a quantidade de elementos a serem permutados for relativamente grande, enumerar vai se tornar um trabalho muito árduo e demorado. Para a situação anterior, podemos escolher cada permutação simples raciocinando da seguinte maneira:



Uma vez que para a escolha do 1º dígito temos 4 possibilidades **e** para a escolha do 2º dígito, após a escolha do 1º digitos, temos 3 possibilidades **e** para a escolha do

3º dígito, após as escolhas do 1° e 2° dígitos, temos 2 possibilidades e para a escolha do 4º dígito, após as escolhas dos 3 primeiros dígitos, temos 1 possibilidade, pelo princípio da multiplicação, existem $P_4 = 4.3.2.1 = 24$ permutações simples no total.

Evidentemente, pode-se generalizar o raciocínio anterior para o cálculo de P_n. Suponhamos que existam n elementos distintos que desejamos determinar a sua quantidade de permutações. O esquema de colocá-los em ordem pode ser representado da seguinte forma:



Como para a escolha do 1° elemento temos n possibilidades e para a escolha do 2° elemento temos $n - 1$ possibilidades e para a escolha do 3° elemento temos $n - 2$ possibilidades, assim sucessivamente, até a escolha do nº dígito, onde temos 1 possibilidade, pelo princípio da multiplicação, podemos afirmar que existem $\mathbf{P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times 1 = n!}$ permutações simples para n elementos distintos.
Assim: $\mathbf{P_n = n!}$

Exercícios Resolvidos

1) Calcule o número de anagramas da palavra REPÚBLICA nos quais as vogais se mantêm nas respectivas posições.
Solução:
Fixando as vogais, temos o seguinte esquema: __ E __ Ú __ __ I __ A
Assim, nos espaços vazios devemos permutar as letras (distintas) R, P, B, B e C, que nos fornece 5! = 120 anagramas.

2) Quantas palavras de seis letras, começando a terminando por consoante, podem ser formadas com as letras da palavra FECHAR, cada letra figurando uma só vez?
Solução:
Podemos analisar a montagem das palavras de acordo com o esquema abaixo:

Como existem 4 consoantes, temos 4 possibilidades para escolher a 1ª letra e, para cada uma destas 4 possibilidades, temos 3 possibilidades para a escolha da 6ª letra. Da 2ª letra para a 5ª letra, basta permutar livremente as demais 4 letras ainda não usadas. Assim, pelo teorema de multiplicação, a quantidade de palavras é 4.3.4! = 288.

3) (FGV-03) De quantas formas podemos permutar as letras da palavra ELOGIAR, de modo que as letras A e R fiquem juntas em qualquer ordem?
a) 360 b) 720 c) 1080 d) 1440 e) 1800
Solução: Alternativa D
Como as letras A e R devem ficar juntas, vamos analisar esta questão como se AR fosse um único elemento. Assim, temos que permutar os elementos distintos

AR E L O G I.

Como temos 6 elementos distintos, o número de permutações é igual a $6! = 720$.
Entretanto, como as letras A e R podem ficar em qualquer ordem, temos que contar também as ocasiões em que temos a sequência RA, que fornecem mais 720 permutações.
Assim, no total temos $720 + 720 = 1440$ permutações.

4) Seis pessoas A, B, C, D, E, F ficam em pé uma ao lado da outra, para uma fotografia. Se A e B se recusam a ficar lado a lado e C e D insistem em aparecer uma ao lado da outra, calcule o número de possibilidades distintas para as 6 pessoas se disporem.
1ª Solução:
Vamos resolver esta questão utilizando o método indireto de contagem. Vamos contar a quantidade de permutações sem restrições em relação a A e B e subtrair da quantidade de permutações em que as pessoas A e B aparecem uma ao lado da outra. Como as pessoas C e D insistem em aparecer uma ao lado da outra, vamos considerar CD (e DC) como apenas um elemento na configuração.
Assim, temos que permutar os elementos CD A B E F.
Sem restrições para A e B temos $N_1 = 2!.5! = 240$ permutações.
A análise das pessoas A e B lado a lado equivale a permutar os elementos CD AB E F, lembrando também das permutações internas de AB e CD, uma vez que as sequências BA e DC também devem ser consideradas.
Portanto, temos $N_2 = 2!.2!.4! = 96$.
Pelo método indireto de contagem, há $N_1 - N_2 = 240 - 96 = 144$ permutações.
2ª Solução:
Vamos resolver agora utilizando o método direto de contagem. Como as pessoas C e D devem aparecer uma ao lado da outra da fotografia, vamos considerar os cinco elementos distintos CD A B E F. As posições relativas das pessoas A e B na fotografia podem ser analisadas abaixo.
i) se a pessoa A é a primeira ou a última da fila (2 possibilidades), então a pessoa B possui 3 possibilidades de ocupar a fila sem que A e B fiquem lado a lado. Assim, neste primeiro caso temos $2.3 = 6$ posições relativas entre A e B.
ii) se a pessoa A está entre a 2ª e a 4ª posições na fila (3 possibilidades), então a pessoa B possui 2 possibilidades de ocupar a fila sem que A e B fiquem lado a lado. Portanto, neste segundo caso temos $3.2 = 6$ posições relativas entre A e B.
Desta forma, no geral há $6 + 6 = 12$ posições relativas possíveis entre A e B.

Observe que para cada uma destas 12 posições relativas de A e B, devemos permutar os demais 3 elementos (CD E F) na fotografia. Lembrando a permutação interna de CD, temos então no total 12.3!.2 = 144 permutações.

5) (UFOP-02) Um trem de passageiros é constituído por uma locomotiva e cinco vagões distintos, sendo um deles, utilizado como restaurante. Sabe-se que a locomotiva deve ir à frente e o vagão restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva. O número de modos diferentes de montar-se o trem é:

A) 5 B) 24 C) 96 D) 120

1ª Solução: Alternativa C

O esquema proposto pode ser representado da seguinte maneira:

Nesta 1ª solução vamos usar o método indireto de contagem. Inicialmente vamos contar o total (sem a restrição do restaurante ser colocado imediatamente após a locomotiva) e subtrair do número de permutações em que o restaurante está imediatamente após o locomotiva.

Sem restrições temos $N_1 = 5! = 120$ permutações.

Com a locomotiva imediatamente após o restaurante temos $N_2 = 4! = 24$ permutações.

Assim, o valor procurado é $N_1 - N_2 = 120 - 24 = 96$ permutações.

ª Solução: Alternativa C

Vamos agora resolver utilizando o método direto de contagem. Note que o restaurante pode ocupar as posições dos vagões 2, 3, 4 e 5, ou seja, 4 possibilidades. Para cada uma destas 4 posições do restaurante temos depois que permutar os demais 4 vagões, que pode ser feito de 4! = 24 maneiras.

Assim, o total de permutações é 4.24 = 96.

6) (UPE-15) A vendedora de roupas está arrumando os cabides da vitrine de uma loja. Ela deve pendurar 5 camisas, 3 bermudas e 2 casacos na vitrine, de modo que cada peça fique uma do lado da outra sem sobreposição. Quantas são as disposições possíveis nessa arrumação, de modo que as peças de um mesmo tipo fiquem sempre juntas, lado a lado na vitrine?

a) 30 b) 120 c) 1.440 d) 4.320 e) 8.640

Solução: Alternativa E

Se A_1, A_2, A_3, A_4 e A_5 são as camisas, B_1, B_2 e B_3 são as bermudas e C_1 e C_2 são os casacos, pode-se organizar a permutação agrupando as roupas de mesmo tipo:

$$\boxed{A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5}\quad\boxed{B_1\ B_2\ B_3}\quad\boxed{C_1\ C_2}$$

Assim, para determinar a quantidade total de disposições, basta permutar os três grupamentos e depois fazer a permutação interna de cada grupamento:

$$\underset{\text{permutação dos grupos}}{3!} \times \underset{\text{permutação interna das camisas}}{5!} \times \underset{\text{permutação internas das bermudas}}{3!} \times \underset{\text{permutação interna dos casacos}}{2!} = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640.$$

7) Dez pessoas estão em fila, dentre elas João, Paulo e André. Quantas são as possíveis maneiras de arrumar esta fila de modo que João esteja sempre atrás de Paulo e Paulo esteja sempre à frente de André, embora não necessariamente em lugares adjacentes?

a) 7!.3! b) 2.7! c) $2.\frac{10!}{3!}$ d) $\frac{10!}{3!}$ e) 2.8!

Solução: Alternativa C

O número total de permutações, eliminado a restrição imposta, é 10!.

Sabe-se que existem 3! posições relativas entre as três pessoas destacadas e duas delas satisfazem o enunciado: J-A-P e A-J-P. Como cada uma destas posições relativas ocorrem um igual número de vezes e duas destas posições são possíveis, a quantidade de maneiras é $2.\frac{10!}{3!}$.

8) Quantas são as permutações dos números (1, 2, ..., 9) nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

Solução:

Nesta questão abordaremos um fato pertinente à análise das permutações ainda não explorado, que é a simetria. Tome uma das permutações possíveis, por exemplo

$$\underline{2}\,4\,\underline{5}\,9\,6\,1\,\underline{3}\,7\,8.$$

Observe que se permutarmos os números 2, 5 e 3, mantendo fixas as posições dos demais números, obteremos todas as posições relativas possíveis para 2, 5 e 3:

$$\underline{2}\,4\,\underline{5}\,9\,6\,1\,\underline{3}\,7\,8,\quad \underline{2}\,4\,\underline{3}\,9\,6\,1\,\underline{5}\,7\,8,\quad \underline{5}\,4\,\underline{3}\,9\,6\,1\,\underline{2}\,7\,8,$$
$$\underline{5}\,4\,\underline{2}\,9\,6\,1\,\underline{3}\,7\,8,\quad \underline{3}\,4\,\underline{5}\,9\,6\,1\,\underline{2}\,7\,8,\quad \underline{3}\,4\,\underline{2}\,9\,6\,1\,\underline{5}\,7\,8$$

Observe também que em apenas uma destas seis posições relativas temos o 5 situado à direita do 2 e à esquerda do 3. Por outro lado, se mantivermos fixos os números 2, 5 e 3 e permutarmos os demais seis números, para cada posição relativa de 2, 5 e 3 temos sempre 6! permutações possíveis. Desta forma, podemos concluir que, devido à simetria existente, cada uma das seis posições relativas dos números 2, 5 e 3 ocorre um igual número de vezes. Assim, o número de vezes em que o 5 situado à direita do 2 e à esquerda do 3 é igual a $\frac{9!}{3!} = 60480$.

9) (AFA-01) Colocam-se em ordem crescente todos os números com 5 algarismos distintos, sem repetição, formados com 2, 4, 5, 7 e 8. A posição do número 72584 é

a) 76ª b) 78ª c) 80ª d) 82ª

Solução: Alternativa A

Iniciando com 2 (números da forma 2 _ _ _ _) temos 4! = 24 números.
Analogamente, iniciando com 4 e iniciando com 5 temos, para cada situação, 4! = 24 números.
Iniciando com 72 temos os seguintes números (em ordem crescente):

72458, 72485, 72548 e 72584

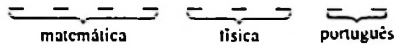
Assim, o número 72584 está posição 24 + 24 + 24 + 4 = 76.

10) (Escola Naval-00) Um Aspirante ganhou, em uma competição na Escola Naval, quatro livros diferentes de Matemática, três livros diferentes de Física e dois livros diferentes de Português. Querendo manter juntos aqueles da mesma disciplina, concluiu que poderia enfileirá-los numa prateleira de sua estante, de diversos modos. A quantidade de modos com que poderá fazê-lo é

a) 48 b) 72 c) 192 d) 864 e) 1728

Solução: Alternativa E

Façamos o esquema de uma das possíveis permutações:



Para contar todas as permutações possíveis podemos lançar mão da seguinte estratégia:

i) Permutar as três coleções, mantendo os livros de mesma disciplina juntos;

i) Permutar internamente os livros de uma mesma disciplina.

Portanto, temos no total 3!.4!.3!.2! = 1728.

11) De quantas maneiras 7 homens e 2 mulheres podem ser colocados em fila de modo que entre as duas mulheres existam exatamente 3 homens?

Solução:

Sejam M_1 e M_2 as duas mulheres. Vamos iniciar a análise a partir de uma situação em que a mulher M_1 ocupa a 1ª posição da fila: M_1 _ _ _ M_2 _ _ _ _

Evidentemente os espaços vazios _ serão ocupados pelos 7 homens.

Perceba que mantendo exatamente 3 homens entre as duas mulheres e M_1 à esquerda de M_2 existem, além da situação inicial, mais 4 situações possíveis:

_ M_1 _ _ _ M_2 _ _ _ ou _ _ M_1 _ _ _ M_2 _ _ ou

_ _ _ M_1 _ _ _ M_2 _ ou _ _ _ _ M_1 _ _ _ M_2

Como podemos, em cada uma das 5 situações acima, trocar de posição as mulheres (de modo que a mulher M_2 fique à esquerda da mulher M_1) então existem 2.5 = 10 posições relativas de M_1 e M_2. Para cada uma destas 10 posições relativas devemos permutar livremente os 7 homens. Desta forma, o número total de permutações é igual a 10.7! = 50400.

12) (ITA) Quantos anagramas da palavra CADERNO apresentam as vogais em ordem alfabética?

Solução:

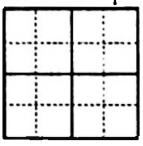
Vamos analisar a simetria existente nas permutações da palavra CADERNO.
Existem 3 vogais (A, E e O) e, consequentemente, 3! posições relativas entre estas vogais. Uma destas posições relativas é exatamente a ordem alfabética. Observe que, na permutação sem restrições da palavra CADERNO, cada uma destas posições relativas das vogais aparece um igual número de vezes. A demonstração deste fato não é complicada. Basta observar que uma maneira de calcular o número de anagramas, sem restrições, da palavra CADERNO se baseia em escolher a posição que cada vogal vai ocupar no anagrama e depois permutar as 5 consoantes nos espaços restantes. Portanto, para cada posição relativa das vogais temos uma mesma quantidade de permutações das demais letras.
Deste modo, como cada uma das 3! posições relativas ocorrem um mesmo número de vezes, existem $\frac{7!}{3!} = 840$ anagramas em que as letras A, E e O aparecem em ordem alfabética.

13) (ITA-98) O número de anagramas da palavra VESTIBULANDO, que não apresentam as cinco vogais juntas, é:
a) 12! b) (8!)(5!) c) 12! – (8!)(5!) d) 12! – 8! e) 12! – (7!)(5!)
Solução: Alternativa B
Utilizaremos mais uma vez o método indireto de contagem. Como a palavra VESTIBULANDO possui 12 letras distintas, o número de anagramas, sem restrições, é $N_1 = 12!$.
Colocando as vogais todas juntas, devemos permutar os seguintes elementos:

A E I O U	V	S	T	B	L	N	D

Desde que existem 8 elementos distintos, para a sequência A-E-I-O-U, temos 8! permutações.
Para cada uma destas permutações devemos permutar as 5 vogais, que são todas distintas.
Desta forma, existem $N_2 = 8!.5!$ permutações com as vogais juntas.
O número de permutação em que as cinco vogais juntas é $N_1 - N_2 = 12! - 8!.5!$.

14) (IME-09) A figura abaixo é composta de 16 quadrados menores. De quantas formas é possível preencher estes quadrados com os números 1,2,3 e 4 de modo que um número não pode aparecer 2 vezes em:
* uma mesma linha.
* uma mesma coluna.
* cada um dos quatro quadrados demarcados pelas linhas contínuas



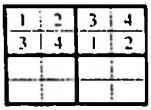
Solução:

Para facilitar o entendimento desta solução, será utilizado o padrão da distribuição dos elementos em uma matriz.

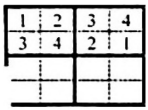
Inicialmente pode-se observar que existem 4! = 24 maneiras de preencher o quadrado que contém os elementos a_{11}, a_{12}, a_{21} e a_{22}. Para simplificar, será escolhida uma destas 24 maneiras para preencher este quadrado e será calculada, para esta quantidade de preencher este quadrado, o número de possibilidades de preencher o resto da figura.

Assim, será dotado $a_{11} = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{21} = 3$ e $a_{22} = 4$.

Para esta distribuição é possível preencher as duas primeiras linhas de 4 maneiras:

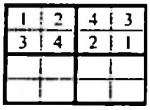


Perceba que se a 1ª coluna é preenchida com $a_{31} = 2$ e $a_{41} = 4$ então a 3ª coluna deve ser preenchida com $a_{33} = 4$ e $a_{43} = 2$. Por outro lado, se $a_{31} = 4$ e $a_{41} = 2$, então $a_{33} = 2$ e $a_{43} = 4$. Analogamente, se $a_{32} = 1$ e $a_{41} = 3$, então $a_{34} = 3$ e $a_{44} = 1$ e $a_{32} = 3$ e $a_{41} = 1$, então $a_{34} = 1$ e $a_{44} = 3$. Assim, neste 1° caso há 2.2 = 4 possibilidades de preencher o resto da figura.



Note que, neste caso, o preenchimento do resto da 1ª coluna já determina o preenchimento de toda a figura. Por exemplo, se $a_{31} = 4$ e $a_{41} = 2$ então necessariamente tem-se que $a_{33} = 1$, $a_{43} = 4$, $a_{32} = 1$, $a_{42} = 3$, $a_{34} = 3$ e $a_{44} = 2$. Como há duas maneiras de acabar de preencher a 1ª coluna, então existem duas maneiras de acabar de preencher o resto da figura.

Este caso é análogo ao anterior, onde o preenchimento do resto da 1ª coluna já determina como toda a figura deve ser preenchida. Assim, há duas maneiras de acabar de preencher a figura.



Este último caso é análogo ao primeiro. Para cada uma das duas maneiras de acabar de preencher a 1ª coluna há uma maneira de acabar de preencher a 3ª coluna e para cada uma das duas maneiras de acabar de preencher a 2ª coluna há uma maneira de acabar de preencher a 4ª coluna. Assim, há 4 maneiras de acabar de preencher a figura.

Desta forma, o número de maneiras de preencher a figura vale: 24(4 + 2 + 2 + 4) = 288.

15) (ITA-95) Considere todos os números de cinco algarismos formados pela justaposição de 1, 3, 5, 7 e 9 em qualquer ordem, sem repetição. A soma de todos esses números está entre:

a) 5.10^6 e 6.10^6. b) 6.10^6 e 7.10^6. c) 7.10^6 e 8.10^6.

d) 9.10^6 e 10.10^6. e) 10.10^6 e 11.10^6.

Solução: Alternativa B

Fixando um dos algarismos em alguma posição (por exemplo, o dígito 3 no algarismo das dezenas) e permutando os demais temos o seguinte esquema:

_ _ _ 3 _ .

Assim, podemos concluir que existem 4! = 24 números em que o 3 é o algarismo das dezenas. Na verdade, perceba que qualquer algarismo aparece em 24 números em uma posição específica. Assim, o algarismo 1 aparece em 24 números como algarismo das unidades, o algarismo 9 aparece em 24 números como algarismo das centenas, etc. Escrevendo os números em ordem crescente no algoritmo da adição:

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ & 1 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ & 1 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ & 1 & 3 & 7 & 9 & 5 \\ & & & & & \cdots \\ + & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ \hline & - & - & - & - & - \end{array}$$

Uma vez que cada um dos algarismos 1, 3, 5, 7 e 9 aparece em 24 números como algarismo das unidades, a soma dos algarismos das unidades de todos os números é $24(1+3+5+7+9) = 600$. Na verdade, como cada algarismo aparece em 24 números em uma das 5 posições específicas, temos que a soma dos algarismos de cada posição sempre resulta em 600. Substituindo no algoritmo da adição:

$$\begin{array}{rccccc} & & & & {\scriptstyle 60} & \\ & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ & 1 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ & 1 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ & 1 & 3 & 7 & 9 & 5 \\ & & & & & \cdots \\ + & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ \hline & - & - & - & - & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{rccccc} & & & {\scriptstyle 66} & {\scriptstyle 60} & \\ & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ & 1 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ & 1 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ & 1 & 3 & 7 & 9 & 5 \\ & & & & & \cdots \\ + & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ \hline & & - & - & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \ldots \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rccccc} & {\scriptstyle 66} & {\scriptstyle 66} & {\scriptstyle 66} & {\scriptstyle 60} & \\ & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ & 1 & 3 & 5 & 9 & 7 \\ & 1 & 3 & 7 & 5 & 9 \\ & 1 & 3 & 7 & 9 & 5 \\ & & & & & \cdots \\ + & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \\ \hline 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 0 \quad 0 \end{array}$$

Deste modo, a soma dos 5! = 120 números é igual a 6.666.600, valor que está entre 6.10^6 e 7.10^6.

16) (Olimpíada de Wisconsin-97) Deve-se preencher as 16 casas de um tabuleiro 4×4 com as letras a, b, c, d de tal modo que cada letra apareça precisamente uma vez em cada linha e precisamente uma vez em cada coluna. De quantas formas distintas isto pode ser feito?

Solução:

Designemos cada elemento como uma matriz, sendo cada elemento da forma x_{ij}.
Inicialmente vamos preencher aleatoriamente a primeira linha e a primeira coluna.

a	b	c	d
b			
c			
d			

Para escolher os 4 elementos da primeira coluna temos 4! = 24 formas diferentes.
Para escolher os outros 3 elementos da primeira linha temos 3! = 6 formas distintas.
Desta forma, já montamos a primeira linha e a primeira coluna, sendo necessários para isto 6.24 = 144 formas diferentes. Montemos agora os outros elementos.
Digamos que a distribuição da 1ª linha e da 1ª coluna seja a do desenho acima.
Sabemos que $x_{22} \neq b$. Suponhamos que $x_{22} = a$. Assim, temos que:
i) $x_{32} = d \quad x_{42} = c \quad x_{23} = d \quad x_{24} = c \quad x_{33} = a \quad x_{34} = b \quad x_{43} = b \quad x_{44} = a$
i) $x_{32} = d \quad x_{42} = c \quad x_{23} = d \quad x_{24} = c \quad x_{33} = b \quad x_{34} = a \quad x_{43} = a \quad x_{44} = b$
Ou seja, para $x_{22} = a$ temos 2 possibilidades.
Suponhamos que $x_{22} = c$. Assim:
$x_{32} = d \quad x_{42} = a \quad x_{23} = d \quad x_{24} = a \quad x_{33} = a \quad x_{34} = a \quad x_{43} = b \quad x_{44} = c$
Ou seja, para $x_{22} = c$ temos apenas uma possibilidade.
Suponhamos que $x_{22} = d$. Assim:
$x_{32} = a \quad x_{42} = c \quad x_{23} = a \quad x_{24} = c \quad x_{33} = d \quad x_{34} = b \quad x_{43} = b \quad x_{44} = a$
Ou seja, para $x_{22} = d$ temos apenas uma possibilidade.
Como para cada conjunto de 1ª coluna e 1ª linha existem 4 outras possibilidades de preencher o quadro, existem (6.24).4 = 576 possibilidades de preencher o quadro.

17) (OBM-06) Seja *n* inteiro positivo. De quantas maneiras podemos distribuir $n + 1$ brinquedos distintos para *n* crianças de modo que toda criança receba pelo menos um brinquedo?

Solução:

Perceba que uma das crianças vai receber exatamente dois brinquedos enquanto que as demais $n - 1$ crianças vão receber exatamente um brinquedo. Inicie escolhendo um dos $n + 1$ brinquedos e o separe: $n + 1$ possibilidades. Depois permute os n brinquedos restantes entre os n alunos: n! fatorial. Agora escolha o aluno que vai ficar com dois brinquedos: n possibilidades. Note, porém, que está se considerando a ordem da distribuição dos brinquedos da criança que vai receber dois brinquedos. Para retirar essa ordem basta dividir tudo por 2!.

Deste modo, a quantidade total de maneiras é: $\frac{(n+1).n!.n}{2!} = \frac{n.(n+1)!}{2}$.

18) (OBM-16) Uma permutação (a_1, a_2, a_3 ,.... ,a_{n-1}, a_n) dos números do conjunto 1, 2, 3, ..., n é legal se não existem dois termos consecutivos cuja soma é um múltiplo de 3 e se os dois vizinhos de um termo qualquer não diferem por um múltiplo de 3. Por exemplo, (4, 6, 2, 5, 3, 1) é uma permutação legal dos números do conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6. Entretanto, (1, 2, 5, 3, 4, 6) não é uma permutação legal do mesmo conjunto, pois os números 1 e 2 são vizinhos e sua soma é um múltiplo de 3. Além disso, outra razão para ela não ser legal, é que os vizinhos do número 4, que são o 3 e o 6, diferem por um múltiplo de 3.

a) Determine o número de permutações legais do conjunto 1, 2, 3, 4, 5, 6.

b) Determine o número de permutações legais do conjunto 1, 2, 3, ..., 2016.

Solução:

Para facilitar o entendimento da questão, todos os números serão trocados pelos seus restos na divisão por 3.

a) Os restos por 3 são 0, 1, 2, 0 1, 2. Suponha que o 1° número da permutação é 0. O próximo número pode ser 1 ou 2. Se for o 1, o próximo número não pode ser 2, já que a soma será múltiplo de 3, mas também não pode ser 0, uma vez que a diferença de dois vizinhos de um termo também não pode ser divisível por 3, logo só pode ser novamente 1 e o processo se repete. Ocorre de forma análoga se escolhermos o 2 depois do 0. Generalizando, se os dois primeiros números são a e b, o próximo não pode ser 3 − b nem a. Assim, escolhidos os dois primeiros dígitos, só existe uma forma de termos uma permutação legal, como só estamos analisando os restos na divisão por 3, então existem seis formas de escolhermos os dois primeiros dígitos. Temos as seguintes possibilidades de sequências de 6 restos consecutivos: (veja que há a mesma quantidade de restos de cada tipo)

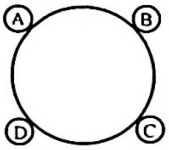
011022,110220,102201,022011,220110,201102

Para determinar as permutações legais com base nos números do conjunto 0, 1, 2, 0, 1, 2, basta analisarmos a permutação dos números com mesmo resto na divisão por 3. Como existem 3.2 = 6 maneiras de escolher os dois primeiros números e $(2!)^3$ formas de permutar os números de mesmo resto na divisão por 3, segue que a quantidade de permutações legais de 1, 2, 3, 4, 5, 6 é igual a $6.(2!)^3 = 48$.

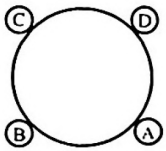
b) Pode-se adaptar a ideia do item anterior para qualquer quantidade de números que seja múltiplo de 6, que é o caso de 2016. Depois da decisão dos dois primeiros números, a sequência dos restos por 3 está definida, bastando permutar os números que apresentam os mesmos restos por 3, nas respectivas posições. Como existem 3 conjuntos de 2016/3 = 672 números cada com mesmo resto por 3, segue que existem $6\times(672!)^3$ permutações legais.

5.8. PERMUTAÇÕES CIRCULARES

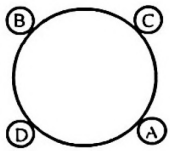
A permutação simples, estudada no item anterior, permite calcular o número de maneiras de organizar sequências com elementos distintos ao longo de uma linha. Entretanto, há situações em que os elementos não estão dispostos em uma linha. Em determinadas situações, estamos interessados em colocar elementos distintos ao longo de uma circunferência. Observe as situações abaixo, onde temos quatro pessoas sentadas ao longo de uma mesa, de forma igualmente espaçada.



SITUAÇÃO 1



SITUAÇÃO 2



SITUAÇÃO 3

Note que na situação 1, a pessoa A tem a impressão de que a pessoa B está a sua esquerda, a pessoa D está a sua direita e a pessoa C está a sua frente. Para obter a situação 2, troque de lugar as pessoas A e C e troque de lugar as pessoas B e D. Repare que a pessoa A tem a impressão de que a pessoa B está a sua esquerda, a pessoa D está a sua direita e a pessoa C está a sua frente, ou seja, a situação 2 é idêntica à situação 1. Perceba que as pessoas B, C e D também possuem a mesma impressão de localização das demais pessoas na mesa nas situações 1 e 2. Deste modo, por mais que tenhamos mudado de lugar algumas das pessoas na mesa, não podemos considerar como permutações distintas as situações 1 e 2. Na verdade, note que as situações 1 e 2 são iguais porque uma pode ser obtida a partir da outra por rotação das cadeiras em 180°.

Na situação 3, a pessoa A tem a impressão de que a pessoa D está a sua esquerda, a pessoa C está a sua direita e a pessoa B está a sua frente. Assim, claramente, a situação 3 é distinta das situações 1 e 2. Agora, você deve estar se perguntando: como é que se faz para determinar o número de permutações circulares de n elementos distintos? Observe que na permutação circular o que interessa é a ordem cíclica dos elementos. Assim, se uma permutação pode ser obtida a partir de outra por rotação dos elementos, então estas duas permutações são consideradas iguais. Portanto, cada uma das n! permutações simples distintas dos n elementos, analisando como se eles estivessem em linha, é contada n vezes, pois existe exatamente n possibilidades de rotacionar os elementos em torno do círculo até voltar a situação inicial. Desta forma, concluímos que o número de permutações circulares $(PC)_n$ de n elementos distintos é igual a:

$$(PC)_n = \frac{n!}{n} \Rightarrow (PC)_n = \frac{n.(n-1)!}{n} \Rightarrow \mathbf{(PC)_n = (n-1)!}$$

Obs: Outra maneira de demonstrar esta expressão, de certo modo mais simples, é analisar a impressão de localização de um elemento específico no círculo em relação aos demais. Para fazer isto basta fixar um elemento e permutar os demais $n - 1$ em todos os lugares possíveis. Assim, existem $(n - 1)!$ formas de este elemento específico ter impressões diferentes de localização em relação aos demais elementos. Como na permutação circular o que interessa é exatamente esta impressão de localização, então podemos afirmar que existem $(n - 1)!$ permutações de n elementos distintos em torno de um círculo.

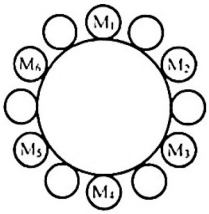
Simples a fórmula do número de permutações circulares, não é? O problema é que praticamente nenhuma questão atual cobrada em vestibulares pede a aplicação pura e simples dessa fórmula. Sempre há uma ou mais restrições (como dois elementos específicos não poderem ficar juntos ou duas determinadas categorias de elementos fiquem alternadas). Observe os exemplos resolvidos a seguir para verificar como proceder nos casos em que algumas restrições forem impostas à situação problema.

Exercícios Resolvidos

1) De quantos modos seis casais podem sentar-se em torno de uma mesa circular:
a) não sentando juntos dois homens?;
b) não sentando juntos dois homens, mas cada homem sentando ao lado de sua esposa?

Solução:

a) Como o número de homens é igual ao número de mulheres, se não sentam dois homens juntos, então os homens e as mulheres estão sentados alternadamente na mesa circular. Para analisar as possibilidades de as pessoas sentarem-se à mesa, inicialmente vamos colocar, em cadeiras alternadas, as 6 mulheres.



A figura ao lado mostra uma das maneiras de colocar as seis mulheres na mesa. Como elas estão igualmente espaçadas, claramente notamos que este é um caso de permutação circular. Assim, existem $(6 - 1)! = 5!$ maneiras de colocar as 6 mulheres na mesa em cadeiras alternadas.

Vamos agora colocar os 6 homens na mesa. Perceba que o fato de já estarem na mesa 6 mulheres faz com que não tenhamos mais um caso de permutação circular para os homens, pois se rotacionarmos uma forma qualquer de sentar dos homens (mantendo as mulheres fixas) obteremos uma situação diferente da inicial, uma vez que a localização das mulheres já distingue a situação. Assim, para cada uma das 5! permutações circulares das mulheres temos 6! permutações simples dos homens, implicando que no total temos 5!.6! permutações.

b) Para fazer com que os homens não sentem juntos, mas cada homem sentando ao lado de sua esposa, vamos organizar os casais aos pares, com as mulheres à esquerda e os homens à direita:

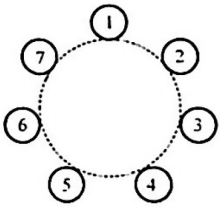
$\boxed{M_1|H_1}$ $\boxed{M_2|H_2}$ $\boxed{M_3|H_3}$ $\boxed{M_4|H_4}$ $\boxed{M_5|H_5}$ $\boxed{M_6|H_6}$

Assim, devemos permutar circularmente estes seis pares de pessoas ao longo do círculo, onde obtemos $(6-1)! = 5!$ permutações. Por outro lado, além da sequência mulher-homem no par, devemos considerar também a sequência homem-mulher. Assim, o total de permutações é $2.5!$.

2) (AFA-02) Numa demonstração de paraquedismo, durante a queda livre, participam 10 paraquedistas. Em um certo momento, 7 deles devem dar as mãos e formar um círculo. De quantas formas distintas eles poderão ser escolhidos e dispostos nesse círculo?

a) 120 b) 720 c) 86400 d) 151200

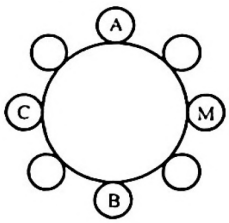
Solução: Alternativa C



A figura ao lado é uma representação do esquema proposto. Para escolher a pessoa que vai ocupar a posição 1 temos 10 possibilidades. Na escolha da pessoa que vai ocupar a posição 2 temos 9 possibilidades. Assim, sucessivamente, até a escolha da posição 7, onde temos 4 possibilidades. Como podemos rotacionar cada disposição 7 vezes, obtendo permutações iguais, o total de permutações é: $\frac{10.9.8.7.6.5.4}{7} = 86400$.

3) (UFRJ-96) Um grupo constituído por 4 mulheres e 4 homens deve ocupar as 8 cadeiras dispostas ao redor de uma mesa circular. O grupo deve ser acomodado de modo que cada homem sente entre duas mulheres. João e Maria estão nesse grupo de pessoas; entretanto, por motivos de ordem estritamente pessoal, não podem sentar-se lado a lado. Duas acomodações das pessoas ao redor da mesa são consideradas diferentes quando pelo menos uma das pessoas não tem o mesmo vizinho à direita, nas duas acomodações. Determine o número de diferentes acomodações possíveis dessas 8 pessoas ao redor da mesa circular.

Solução:



Suponhamos que as quatro mulheres sejam Maria, Ana, Beatriz e Cláudia, cada uma representada por sua inicial. Vamos resolver esta questão lançando mão do método indireto de contagem. O número de maneiras de permutar circularmente as 4 mulheres na mesa é $(4-1)! = 3!$. Depois disto temos que colocar os homens na mesa. Eliminando a restrição de João não poder sentar ao lado de Maria, para cada uma das $3!$ permutações das mulheres temos $4!$ permutações dos homens, pois para uma dada

permutação fixa das mulheres, não conseguimos duas situações idênticas de sentar por simples rotação das posições dos homens. Assim, $N_1 = 3!.4! = 144$.

Vamos agora contar os casos em que João está ao lado de Maria. Inicialmente permutemos circularmente as mulheres. Para cada uma das 3! permutações das mulheres, João pode ficar à direita ou à esquerda de Maria (2 possibilidades). Depois disto temos que permutar os demais 3 homens, que pode ser feito de 3! maneiras. Assim, $N_2 = 3!.2.3! = 72$.

Portanto, a resposta do problema é $N_1 - N_2 = 144 - 72 = 72$.

4) (EPCAr-04) De quantos modos 3 casais podem sentar-se ao redor de uma mesa circular de tal forma que marido e mulher não fiquem juntos?

a) 12 b) 120 c) 72 d) 32

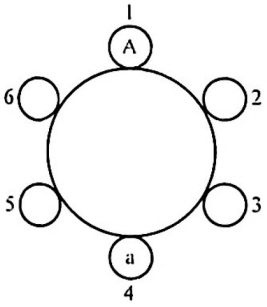
Solução: Alternativa D

Inicialmente numeremos as cadeiras. Após isto, considere os elementos definidos abaixo:

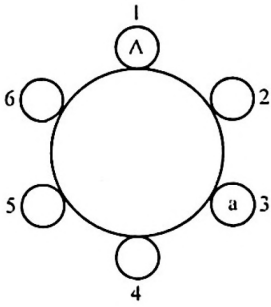
A = homem do casal 1; a = mulher do casal 1; B = homem do casal 2; b = mulher do casal 2;

C = homem do casal 3; c = mulher do casal 3.

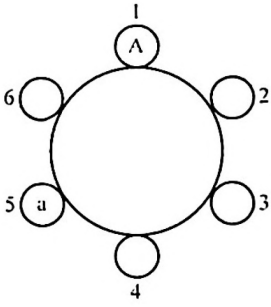
Para a posição relativa de A e a temos 3 situações distintas:



situação 1



situação 2



situação 3

Na situação 1, repare que para cada uma das quatro cadeiras (2, 3, 5 ou 6) que B pode sentar, b possui duas possibilidades de sentar na mesa. Por exemplo, se B sentar na cadeira 2, b pode sentar nas cadeiras 5 ou 6. Para cada possibilidade acima, note que existem duas maneiras de colocar C e c na mesa. Por exemplo, se B sentar na cadeira 2 e b na cadeira 5, podemos colocar C na cadeira 3 e c na cadeira 6 ou vice-versa. Assim, na situação 1 temos (4) x (2) x (2) = 16 permutações possíveis.

Na situação 2, se B sentar na cadeira 2, necessariamente b terá que sentar na cadeira 5, de modo a evitar que C e c fiquem juntos. Para esta possibilidade, temos duas maneiras de colocar C e c na mesa: C em 6 e c em 4 ou o contrário. Se B sentar em 4 temos que b deve sentar em 6 e se B sentar em 6, b deve sentar em 4. Para cada uma destas duas possibilidades, temos duas maneiras de C e c sentar na mesa. Se B

sentar em 5, b deve sentar em 2 e temos, novamente, duas possibilidades para colocar C e c na mesa.

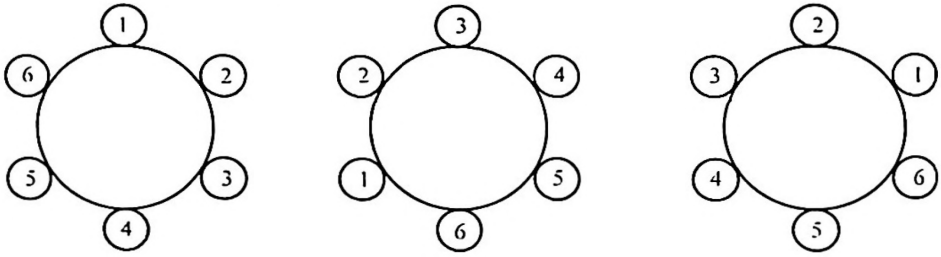
Portanto, nesta situação 2, temos (1) × (2) + (2) × (2) + (1) × (2) = 8 permutações possíveis.

A análise da situação 3 é idêntica à análise da situação 2, onde encontraremos novamente 8 permutações possíveis. Deste modo, no total temos 16 + 8 + 8 = 32 permutações.

5) Sobre um plano existem n pontos distintos, sendo que não existem três pontos colineares. Quantos polígonos, não necessariamente convexos, podemos construir tendo para vértices esses n pontos?

Solução:

Como os polígonos não precisam ser convexos, cada polígono ficará determinado pela sequência com que os vértices são percorridos. Isto equivale a contar a quantidade de sequências cíclicas dos vértices, ou seja, contar o número de permutações circulares dos n vértices, levando-se em consideração que tanto faz ler a sequência no sentido horário quanto no anti-horário. Por exemplo, para o caso de 6 vértices (1, 2, 3, 4, 5 e 6), as sequências abaixo são idênticas:



Para o caso de n vértices, temos (n – 1)! permutações circulares. Como o polígono pode ser lido no sentido horário ou anti-horário, cada uma (n – 1)! sequências cíclicas dos vértices é contada duas vezes. Assim, o número de polígonos é $\frac{(n-1)!}{2}$.

6) (Olimpíada da Bélgica-94) Cada lado de um cubo é pintado de uma cor (existem 6 disponíveis). De quantas maneiras é possível fazer isto? Sabe-se que duas colorações são idênticas se podem ser obtidas por rotação do cubo.

a) 30 b) 60 c) 120 d) 360 e) 720

Solução: Alternativa A

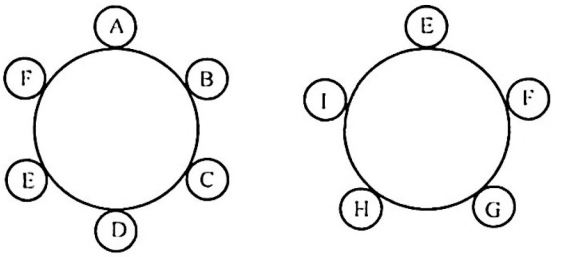
Suponha que as 6 cores sejam representadas pelas letras A, B, C, D, E e F. Começando com o cubo sem nenhuma face pintada, vamos escolher uma face para ser pintada pela cor A. Repare que escolha da face é irrelevante, pois a situação do cubo com apenas uma face pintada pela cor A pode ser obtida por rotação do cubo, independentemente da face escolhida para ser pintada. Vamos agora escolher a cor

para pintar a face oposta à face pintada pela cor A. Para tanto temos 5 possibilidades. Agora temos 4 cores para pintar as 4 faces restantes. Coloquemos as faces já pintadas como bases do cubo. Devido à simetria das faces laterais (que ainda não foram pintadas) e o fato de duas colorações serem idênticas se podem ser obtidas por rotação do cubo, então o que falta fazer é permutar circularmente as 4 cores restantes nas faces laterais do cubo, o que nos fornece $(4-1)! = 3!$ permutações. Como temos que pintar as bases e as faces laterais, no total temos $5.3! = 30$ colorações distintas.

7) Onze pessoas devem se sentar em duas mesas circulares, uma com 6 lugares e outra com 5 lugares. Em cada mesa os lugares são igualmente espaçados. Determine o número de maneiras das 11 pessoas se sentarem nas mesas.

Solução:

O esquema abaixo representa as disposições das duas mesas e as 11 cadeiras.



Há várias formas de atacar essa situação problema. O autor do livro vai apresentar uma forma de resolver que utiliza apenas o que já foi apresentado de contagem até a presente página deste livro.

Escolha a pessoa que vai sentar na cadeira A: 11 possibilidades
Escolha a pessoa que vai sentar na cadeira B: 10 possibilidades
Escolha a pessoa que vai sentar na cadeira C: 9 possibilidades
Escolha a pessoa que vai sentar na cadeira D: 8 possibilidades
Escolha a pessoa que vai sentar na cadeira E: 7 possibilidades
Escolha a pessoa que vai sentar na cadeira F: 6 possibilidades

Como a 1ª mesa possui 6 cadeiras, é possível girá-la 6 vezes de modo a conseguir permutações circulares idênticas.

Logo, há $\frac{11.10.9.8.7.6}{6} = \frac{11!}{6!}$ maneiras distintas de ocupar a 1ª mesa.

Sobraram 5 pessoas para ocupar a 2ª mesa, sem nenhuma restrição, ou seja, basta permutar circularmente essas 5 pessoas na 2ª mesa, obtendo $(5-1)! = 4!$ formas.

Portanto, há $\frac{11!.4!}{6!}$ maneiras de as 11 pessoas ocuparem duas mesas, sendo uma com 6 lugares e outra com 5 lugares.

5.9. PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Já aprendemos a calcular o número de permutações simples de n elementos distintos e o número de permutações circulares de n elementos distintos. Certamente você já deve ter se perguntado o que ocorre se alguns elementos forem iguais? Analise o caso dos anagramas da palavra CASA. Enumerando encontramos as seguintes permutações:

CASA,	CAAS,	CSAA,	SCAA,	SACA,	SAAC,
AACS,	AASC,	ASCA,	ASAC,	ACSA,	ACAS

Assim, existe um total de 12 permutações da palavra CASA. Sabemos que o número de anagramas de uma palavra de 4 letras distintas é 4! = 24. Será coincidência o fato de as duas letras A provocarem que o número de anagramas seja metade do valor se todas as letras fossem distintas? Não, definitivamente não é coincidência! Para analisar melhor, adicionemos índices às letras A, de modo a ficar mais claro qual letra está sendo mudada de local quando passamos de um anagrama para outro. Assim, temos que permutar as letras da palavra CA_1SA_2. Apesar de termos colocado índices nas letras A, estas ainda são consideradas elementos iguais.

Considere o anagrama SCA_1A_2. Se trocarmos de lugar as duas letras A, teremos o anagrama SCA_2A_1, que é idêntico à SCA_1A_2. Se os elementos A_1 e A_2 fossem distintos, qualquer troca de lugar entre eles resultaria em um anagrama diferente. Desta maneira, cada anagrama da palavra CASA é contado duas vezes se considerássemos que as duas letras fossem distintas. Por isso, o número de anagramas correto (considerando que as letras A são idênticas) da palavra CASA vale $\frac{4!}{2} = 12$.

A pergunta agora é o que ocorre se tivermos vários elementos iguais que devem ser permutados? A ideia é a mesma utilizada na permutação da palavra CASA. Suponha que você deseja calcular o número anagramas que podem ser formados com as 10 letras A A A A B B B C C D. Sabemos que existem 10! permutações simples de 10 elementos distintos. Em cada anagrama das letras A A A A B B B C C D se trocarmos de lugar as 4 letras A obteremos o mesmo anagrama. Assim, analisando somente a repetição das letras A, cada uma das 10! permutações obtidas considerando que as letras A são distintas são contadas 4! vezes. Portanto, temos $\frac{10!}{4!}$ anagramas considerando que as 4 letras A são iguais, porém as 3 letras B e as 2 letras C são ainda consideradas distintas entre si. O mesmo feito em relação às letras A pode ser feito em relação às letras B. Trocando de lugar as 3 letras B obtemos o mesmo anagrama. Deste modo, dos $\frac{10!}{4!}$ anagramas considerando que as 3 letras B e as 2 letras C são distintas entre si, 3! delas são iguais pela troca de lugar das 3 letras

B. Assim, existem $\frac{\frac{10!}{4!}}{3!} = \frac{10!}{4!.3!}$ anagramas considerando as 4 letras A iguais, as 3 letras B iguais e as 2 letras C distintas. Analogamente, considerando as 2 letras C iguais, temos $\frac{\frac{10!}{4!.3!}}{2!} \frac{10!}{4!.3!.2!}$ anagramas distintos.

Generalizando, se desejarmos permutar n elementos, nem todos distintos, em que x_1 deles são iguais, x_2 deles são iguais, ..., x_k deles são iguais, o número de permutações é:

$$P_n^{x_1, x_2, \ldots, x_k} = \frac{n!}{(x_1!)(x_2!)\ldots(x_k!)}$$

Exercícios Resolvidos

1) (AFA-98) O número de anagramas da palavra **ALAMEDA** que não apresenta as 4 vogais juntas é

a) 96 b) 744 c) 816 d) 840

Solução: Alternativa B

Vamos usar o método indireto de contagem.

O número de anagramas da palavra ALAMEDA sem restrições é $N_1 = \frac{7!}{3!} = 840$.

Para analisar os anagramas em que as 4 vogais aparecem juntas, observe o esquema:

AAAE	L	M	D

Desta forma, temos que permutar os 4 elementos acima e depois permutar internamente as vogais (que possuem repetição). Portanto, temos $N_2 = 4!.\frac{4!}{3!} = 96$.

Assim, o valor pedido é $N_2 - N_1 = 840 - 96 = 744$.

2) (AFA-04) Se você vai comprar algo que custa cinquenta e cinco centavos, em uma máquina automática, e dispõe de oito moedas de cinco centavos do mesmo modelo e cinco de dez centavos também do mesmo modelo, então, existem n sequências possíveis de introduzir as moedas, totalizando cinquenta e cinco centavos. O valor de **n** é

a) 133 b) 127 c) 24 d) 4

Solução: Alternativa A

Vamos enumerar as quantidades de moedas de cinco (C) e de dez (D) centavos que devem ser usadas e suas respectivas quantidades de introduzir as moedas.

i) 7 moedas de cinco e 2 moedas de dez (CCCCCCCDD): $\frac{9!}{7!2!} = 36$.

ii) 5 moedas de cinco e 3 moedas de dez (CCCCCDDD): $\frac{8!}{5!3!} = 56$.

iii) 3 moedas de cinco e 4 moedas de dez (CCCDDDD): $\frac{7!}{3!4!} = 35$.

iv) 1 moeda de cinco e 5 moedas de dez (CDDDDD): $\frac{6!}{5!} = 6$.

Desta maneira, n = 36 + 56 + 35 + 6 = 133.

3) Seja x a quantidade de números naturais de 12 algarismos que têm todos os algarismos maiores do 4. Seja y a quantidade de números naturais de 11 algarismos que têm exatamente 5 algarismos menores do que 5, em qualquer posição. Determine o valor de $\frac{y}{x}$.

a) $\frac{462}{5}$ b) $\frac{24}{25}$ c) 5 d) $\frac{2058}{25}$ e) 84

Solução: Alternativa E

i) Cálculo de x: para cada uma das 12 posições existem 5 possibilidades $\rightarrow x = 5^{12}$

ii) Cálculo de y: existem 5 algarismos menores que 5 (designados por A) e 6 algarismos maiores que 5 (designados por B). Assim, as posições destes algarismos são as permutações de AAAAABBBBBB, onde existem $\frac{11!}{5!.6!} = 462$ possibilidades.

Em princípio, existem 5 possibilidades para cada um dos 11 algarismos, porém deve-se eliminar os números que iniciam por 0 (que é menor que 5).

Fixando 0 como 1° algarismo deve-se permutar apenas os demais 10 algarismos, na forma $\underline{0}$AAAABBBBB, onde existem $\frac{10!}{4!.6!} = 210$ posições e 5 possibilidades para cada um dos algarismos não nulos.

Logo:

$$y = \frac{11!}{5!.6!}5^{11} - \frac{10!}{4!.6!}5^{10} = 462.5^{11} - 210.5^{10} = 5^{10}(2310 - 210) = 5^{10}.2100 = 5^{12}.84$$

Desta forma: $\frac{y}{x} = \frac{84.5^{12}}{5^{12}} = 84$

4) Uma escada tem 10 degraus. Para subi-la em cada passo, pode-se subir de um ou dois degraus de cada vez. De quantos modos diferentes se poderia subi-la com um número par de passos?

a) 44 b) 8 c) 32 d) 56 e) 80

Solução: Alternativa A

Seja U um movimento de subir um degrau e D um movimento de subir dois degraus de uma vez.
Deve-se separar em casos:
i) UUUUUUUUUU: 1 possibilidade
ii) UUUUUUDD: 8!/6!2! = 28 possibilidades
iii) UUDDDD: 6!/2!.4! = 15 possibilidades
Total: 1 + 28 + 15 = 44 possibilidades

5) (UNB-02) Em uma videolocadora, considere que, em uma determinada ocasião, foram devolvidas 17 fitas VHS que estavam alugadas. Destas, 8 foram produzidas nos EUA, 4 são de origem europeia e 5 são filmes nacionais. Essas fitas foram colocadas em uma prateleira que possuía 17 lugares vagos. Nessa situação, julgue os itens a seguir.
1) Se todas as 17 fitas forem distintas, então o número de maneiras diferentes de organizá-las nessa prateleira será divisível por todos os números primos menores que 18.
2) Se todas as fitas forem distintas, mantendo-se sempre os filmes europeus juntos, independentemente de sua ordenação, pode-se organizar as fitas na prateleira de 4! × 13! maneiras distintas.
3) O número de maneiras distintas de se organizar essas fitas, fazendo que as de mesma origem fiquem sempre juntas, é divisível por 3^5.
4) Considere que: das 8 fitas dos EUA, 6 sejam cópias do mesmo filme; das 5 brasileiras, 4 sejam cópias do mesmo filme; das 4 europeias, 2 sejam cópias do mesmo filme; todas as demais são distintas. Nesse caso, o número de maneiras diferentes em que pode ser organizada a prateleira é divisível por $2^7 \times 3^3 \times 5^2 \times 7^2$.
Solução: CECC
1) **CERTO.** Como todos os 17 elementos são distintos, temos 17! possibilidades.
Uma vez que 17! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16.17 e que os números primos menores que 18 (2, 3, 5, 7, 11, 13 e 17) pertencem ao produto de 17!, então todos os primos menores que 18 dividem 17!.
2) **ERRADO.** De modo a manter os filmes europeus juntos, podemos montar o seguinte esquema (E_i = filme europeu i, U_i = filme americano i e N_i = filme nacional i):

$E_1E_2E_3E_4$	U_1	U_2	U_3	U_4	U_5	U_6	U_7	U_8	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5

Desta forma, devemos permutar estes 14 elementos e depois permutar internamente os 4 filmes europeus, implicando que temos 14!.4! possibilidades.
3) **CERTO.** Mantendo as fitas de mesma origem juntas, podemos montar o esquema:

$E_1E_2E_3E_4$	$U_1U_2U_3U_4U_5U_6U_7U_8$	$N_1N_2N_3N_4N_5$

Deste modo, devemos permutar os 3 elementos acima e depois permutar internamente as fitas de mesma origem. Temos, assim, 3!.4!.8!.5! possibilidades. Como 3! é divisível por 3, 4! é divisível por 3, 8! é divisível por 3^2 e 5! é divisível por 3, então 3!.4!.8!.5! é divisível por 3^5.

4) **CERTO.** Considerando os elementos iguais, temos $\frac{17!}{6!.4!.2!}$ permutações.

Fatorando os produtos, temos que $\frac{17!}{6!.4!.2!} = 2^7.3^3.5^3.7^2.11.13.17$, que é divisível por $2^7.3^3.5^2.7^2$.

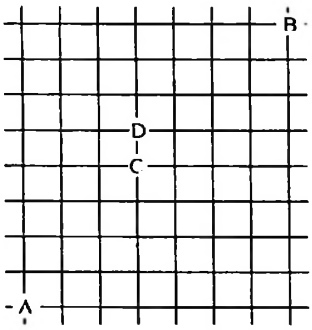
6) A figura abaixo representa 17 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo oito verticais. Quantos caminhos mínimos uma pessoa pode percorrer para ir do ponto A ao ponto B:

a) sem restrições?

b) sem passar por C?

c) sem passar por C e D?

d) sem passar por C ou D?



Solução:

Como devemos percorrer caminhos mínimos, a pessoa sempre deve andar para cima (C) ou para a direita (D) ao longo dos quarteirões. Cada caminho possível é uma sequência de letras C e D, onde cada uma indica que caminho (para cima ou para a direita) a pessoa deve tomar em cada esquina.

a) Indo direto desde A até B, temos que, independentemente da ordem, ir para cima (C) oito vezes e para a direita (D) sete vezes.

Assim, cada caminho mínimo possível é uma permutação de CCCCCCCCDDDDDDD. Temos, então $\frac{15!}{8!.7!} = 6435$ caminhos.

b) Inicialmente, vamos calcular o número de caminhos mínimos de ir desde A até B passando por C.

Os caminhos desde A até C são equivalentes às permutações das letras CCCCDDD.

Deste modo há $\frac{7!}{4!.3!}$ caminhos mínimos possíveis para ir de A até C.

Os caminhos desde C até B são equivalentes às permutações das letras CCCCDDDD. Temos então $\frac{8!}{4!.4!}$ caminhos mínimos possíveis.

Pelo método indireto de contagem, o número de caminhos de ir desde A até B sem passar por C é igual ao número de maneiras de ir desde A até B, sem restrições, menos o número de maneiras de ir desde A até B passando por C. Portanto, existem $\frac{15!}{8!.7!} - \frac{7!}{4!.3!}.\frac{8!}{4!.4!} = 3985$ caminhos.

c) Pelo item anterior, para ir de A até C temos $\frac{7!}{4!.3!}$ caminhos mínimos. Para ir de C até D temos somente 1 caminho possível. Para ir de D até B, temos que permutar as letras CCCDDDD, ou seja, existem $\frac{7!}{3!.4!}$ caminhos. Consequentemente, pelo método indireto de contagem, temos $\frac{15!}{8!.7!} - \frac{7!}{4!.3!}.1.\frac{7!}{3!.4!} = 5210$ caminhos.

d) Vamos iniciar calculando o número de caminhos mínimos para ir de A até B passando por D. Os caminhos de A até D são equivalentes às permutações das letras CCCCCDDD. Assim, temos $\frac{8!}{5!.3!}$ caminhos. Os caminhos de D até B são equivalentes às permutações das letras CCCDDDD. Assim, temos $\frac{7!}{3!.4!}$ caminhos. Desta forma, para ir de A até B passando por D temos $\frac{8!}{5!.3!}.\frac{7!}{3!.4!}$ caminhos.

Para contar o número de maneiras de ir de A até B passando por C ou D devemos somar o número de maneiras de ir de A até B passando por C e de ir de A até B passando por D e subtrair desta soma o número de caminhos de ir de A até B passando por C e D. Em linguagem de conjuntos:

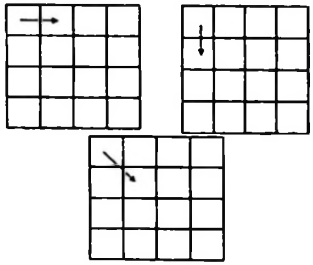
$$n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D) = \frac{7!}{4!.3!}.\frac{8!}{4!.4!} + \frac{8!}{5!.3!}.\frac{7!}{3!.4!} - \frac{7!}{4!.3!}.1.\frac{7!}{3!.4!} = 3185.$$

Finalmente, para calcularmos o número de maneiras de ir de A até B sem passar por C ou D devemos calcular o número de maneiras de ir de A até B, sem restrições, e subtrair deste valor o número de maneiras de ir de A até B passando por C ou D:

$$\frac{15!}{7!.8!} - 3185 = 3250.$$

Observação: A expressão $n(C \cup D) = n(C) + n(D) - n(C \cap D)$, apesar de ser bastante intuitiva e ser conhecida da teoria dos conjuntos, no tópico sobre princípio da inclusão-exclusão será feita uma abordagem mais aprofundada sobre ela.

7) (IME-96) É dado um tabuleiro quadrado 4×4. Deseja-se atingir o quadrado inferior direito a partir do quadrado superior esquerdo. Os movimentos permitidos são os representados pelas setas:



De quantas maneiras isto é possível?

Solução:

Esta questão é semelhante à anterior, com a única diferença de que agora é permitido fazer movimentos em diagonal. Cada caminho pode ser representado por uma permutação das letras H (movimento na horizontal para a direita), V (movimento na vertical para baixo) e D (movimento na diagonal principal para baixo). Vamos separar a análise desta questão em casos, de acordo com o número de movimentos em diagonal que podemos realizar:

i) Nenhuma diagonal: os caminhos são representados pela permutação das letras HHHVVV

Assim, temos $\frac{6!}{3!.3!} = 20$ caminhos.

ii) Uma diagonal: os caminhos são representados pela permutação das letras DHHVV

Assim, temos $\frac{5!}{2!.2!} = 30$ caminhos.

iv) Duas diagonais: os caminhos são representados pela permutação das letras DDHV

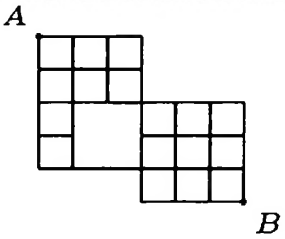
Assim, temos $\frac{4!}{2!} = 12$ caminhos.

v) Três diagonais: os caminhos são representados pela permutação das letras DDD

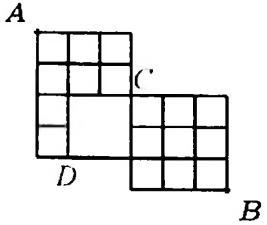
Assim, temos evidentemente, somente 1 caminho.

Somando todos os casos concluímos que existem 63 caminhos possíveis.

8) A figura mostra o mapa de uma cidade. As linhas indicam as ruas da cidade. Determine de quantas maneiras é possível ir do ponto A ao ponto B andando somente pelas ruas da cidade e usando apenas movimentos para baixo (Sul) e para a direita (Leste).



Solução:



A→C: permutação de SSLLL $\Rightarrow$ 5!/3!.2! = 10
C→B: permutação de SSSLLL $\Rightarrow$ 6!/3!.3! = 20
A→D: permutação de SSSSL $\Rightarrow$ 5!/4! = 5
D→B: permutação de SLLL $\Rightarrow$ 4!/3! = 4
Total: 10×20 + 5×4 = 220

9) (Olimpíada da Argentina-01) Carlos escreve a lista de todos os números naturais menores que 10000 que têm exatamente dois dígitos 1 consecutivos. (Por exemplo, 113, 5112, 1181 estão na lista de Carlos, porém 1312, 2111 no estão na lista de Carlos.) Achar quantos números tem a lista de Carlos.

Solução:

Os números devem ser de uma das formas: 11yz, y11z ou yz11.

Analisemos cada uma:

i) 11yz: 9 maneiras de escolher y (não pode ser igual a 1) e 10 maneiras de escolher z (sem restrições) → 9 × 10 = 90 possibilidades

ii) y11z: 9 maneiras de escolher y (não pode valer 1) e 9 maneiras de escolher z (não pode ser igual a 1) → 9 × 9 = 81 possibilidades

iii) yz11: 10 maneiras de escolher y (sem restrições, pode até valer 0) e 9 maneiras de escolher z (não pode ser igual a 1) → 10 × 9 = 90 possibilidades

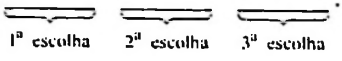
Total: 90 + 81 + 90 = 261.

5.10. COMBINAÇÕES SIMPLES

No capítulo anterior, calculamos o número de maneiras de trocar de ordem elementos distintos ou iguais, colocando-os em linha ou ao longo de um círculo. Entretanto, você já deve ter se perguntado como fazer se, dada uma quantidade de objetos, quiséssemos somente escolher alguns deles, independentemente da ordem da escolha? Por exemplo, suponha que você vai comprar duas canetas distintas em uma loja que possui oito tipos diferentes de canetas. No final das contas, depois de comprar as canetas e você olhar as duas compradas, tanto faz a sequência com que você escolheu cada caneta. Note que temos agora uma situação em que não se enquadrada em nenhuma das permutações já estudadas, uma vez que para obter as permutações os elementos são trocados de lugar. O mesmo acontece se você tem que dizer quais cinco jogadores de basquete, dentre doze possíveis, devem entrar jogando pelo seu time. Não importa a sequência com que estes cinco foram escolhidos, e sim quais foram escolhidos para o jogo.

Agora é necessário ressaltar que o enunciado de uma questão não vai dizer, explicitamente, se a ordem dos elementos em uma seleção é ou não relevante. Exercícios de contagem são bastante interpretativos. Vale o com senso do leitor para entender se a ordem dos elementos escolhidos deve ser levada em consideração. Por exemplo, quando se deseja comprar produtos em uma loja, a ordem com que os elementos são comprados não altera a escolha. Por outro lado, ao se escolher em que assento do carro vão sentar três pessoas, a ordem dos elementos é importante, uma vez que, para dada pessoa, é diferente, por exemplo, sentar no banco do motorista ou no carona. Há, entretanto, um padrão no uso da palavra "escolher" nas questões de contagem, que significa apenas selecionar os elementos, sem qualquer ordem.

Por exemplo, suponha que você quer escolher três objetos de oito possíveis distintos. Enumeremos os objetos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Organizemos as escolhas:



Na 1ª escolha temos 8 possibilidades, na 2ª escolha temos 7 possibilidades e na 3ª escolha temos 6 possibilidades. Pelo princípio da multiplicação, o número de sequências possíveis de três objetos distintos, com ordem, é 8.7.6 = 336. Contudo, nestas 336 sequências estão contadas escolhas idênticas, uma vez que, da forma que organizamos nossas escolhas, a ordem dos elementos escolhidos importa, que não bate com realidade. Assim, temos a sequência de objetos 2 4 6 e também a sequência 6 4 2, que são idênticas se você estiver interessado somente em escolher os objetos. Como então fazer para calcular o número de maneiras de somente escolher os objetos (sem ordem)? Vamos inicialmente contar quantas vezes cada seleção de objetos (sem interessar a sequência em que são escolhidos) é contada nas 336 sequências. Como

estamos escolhendo 3 objetos, podemos permutar os elementos de cada combinação de 3! = 6 maneiras. Assim, a escolha 5 7 8 é contada 6 vezes nas 336 sequências possíveis de 3 objetos dos 8 dados. Portanto, o número de maneiras de escolher 3 objetos distintos dentre 8 objetos distintos é igual a $\frac{336}{6} = 56$.

O nome que se dá para cada uma destas escolhas de objetos distintos é **combinação**. Simbolicamente, representamos por $\binom{n}{k}$ ou $C_{n,k}$ ou C_n^k e lê-se combinação de n elementos tomados k a k. No exemplo apresentado, provamos que o número de combinações de 8 elementos tomados 3 a 3 é 56, ou seja, $\binom{8}{3} = 56$.

Vamos agora generalizar. Digamos que você deseja calcular de quantas maneiras pode-se escolher k elementos dentre n distintos fornecidos, $0 \leq k \leq n$. Vamos organizar as escolhas da seguinte forma:

$$\underbrace{\quad}_{1^a \text{ escolha}}\ \underbrace{\quad}_{2^a \text{ escolha}}\ \underbrace{\quad}_{3^a \text{ escolha}}\ \cdots\ \underbrace{\quad}_{k^a \text{ escolha}}$$

Observe que, levando em consideração a ordem dos elementos, para a 1ª escolha temos n possibilidades; para a 2ª escolha temos n – 1 possibilidades; para a 3ª escolha temos n – 2 possibilidades, assim sucessivamente, até a kª escolha, em que temos n – k + 1 possibilidades. Desta maneira, o número de sequências ordenadas que podemos formar com k elementos dos n é igual a $n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)$. Porém não estamos interessados nas sequências ordenadas dos elementos, uma vez que a ordem destes não interessa, estamos querendo apenas determinar quais vão ser escolhidos. Deste modo, cada uma das $n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)$ sequências ordenadas é contada k! vezes, pois podemos permutar k elementos distintos de k! maneiras. Assim:

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)}{k!}$$

Multiplicando numerador e o denominador desta última expressão por (n – k)!:

$$\binom{n}{k} = \frac{n.(n-1).(n-2)...(n-k+1).(n-k)!}{k!(n-k)!} \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Observações:

(1) O bom senso nos leva a crer que é impossível escolher 5 elementos distintos se temos à disposição apenas 3 elementos distintos. Desta forma, toda vez que $n < k$, convenciona-se que $\binom{n}{k} = 0$.

(2) Suponha que você vai numa loja comprar 3 camisas dentre 10 possibilidades. Dizer ao vendedor quais são as 3 camisas escolhidas é totalmente análogo a falar quais são as 7 que não serão compradas. Portanto, pode-se afirmar que $\binom{10}{3} = \binom{10}{7}$.

Generalizando, indicar quais k elementos serão escolhidos dentre n possíveis é equivalente a apontar os $n - k$ elementos que não serão escolhidos: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. O nome dessa propriedade é *complementariedade dos números binomiais* e será abordada com mais detalhes no capítulo sobre Binômio de Newton.

(3) A fórmula da combinação é válida mesmo se nenhum elemento deva ser escolhido, ou seja, $k = 0$: $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$. O leitor deve se convencer que só há uma possibilidade quando nenhum elemento deve ser escolhido, que é não escolher elemento algum. Do ponto de vista da análise combinatória não escolher elementos conta como uma possibilidade.

(4) Quando se deve escolher apenas um elemento, a fórmula da combinação deve ser dispensada e o bom senso é o mais adequado. Se entre n elementos distintos se deve escolher exatamente um, é evidente que existem n possibilidades, que nada mais é do que uma aplicação do princípio da adição. Ocorre que $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!.(n-1)!} = n$, confirmando o resultado intuitivo, contudo, a conclusão é tão evidente que a aplicação da fórmula é totalmente dispensável.

(5) Analogamente à observação anterior, também se deve dispensar a aplicação da fórmula da combinação quando forem escolhidos $n - 1$ elementos distintos dentre n possibilidades. Da complementariedade (observação 2) segue que informar quais são os $n - 1$ elementos a serem escolhidos dentre n é equivalente a indicar qual o único elemento que não vai ser escolhido. Logo, há exatamente n maneiras diferentes de serem escolhidos $n - 1$ elementos dentre n possíveis: $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

Exercícios Resolvidos

1) (ITA-07) Dentre 4 moças e 5 rapazes deve-se formar uma comissão de 5 pessoas com, pelo menos, 1 moça e 1 rapaz. De quantas formas distintas tal comissão poderá ser formada?

Solução:

Como existem 4 moças e 5 rapazes, a única situação em que uma comissão de 5 pessoas não possua pelo menos 1 moça e 1 rapaz é a comissão ser formada por 5 rapazes. Logo, pelo método indireto de contagem, há $\binom{9}{5}-\binom{5}{5}=125$ possibilidades.

2) (PUC/SP-01) Buscando melhorar o desempenho de seu time, o técnico de uma seleção de futebol decidiu inovar: convocou apenas 15 jogadores, 2 dos quais só jogam no gol e os demais atuam em quaisquer posições, inclusive no gol. De quantos modos ele pode selecionar os 11 jogadores que irão compor o time titular?

a) 450 b) 480 c) 550 d) 580 e) 650

Solução: Alternativa E

Vamos separar a análise desta questão em dois casos:

i) se o goleiro é um dos 2 jogadores que só jogam como goleiro:

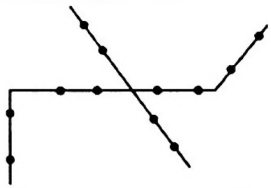
Há 2 maneiras de escolher o goleiro e $\binom{13}{10}=286$ maneiras de escolher os 10 jogadores de linha.

ii) se o goleiro é um dos 13 jogadores jogam em qualquer posição:

$\binom{13}{11}=78$ possibilidades para escolher os 11 jogadores que entrarão jogando.

Assim, temos no total $2 \times 286 + 78 = 650$ possibilidades.

3) (Fuvest-18) Doze pontos são assinalados sobre quatro segmentos de reta de forma que três pontos sobre três segmentos distintos nunca são colineares, como na figura.



O número de triângulos distintos que podem ser desenhados com os vértices nos pontos assinalados é

a) 200. b) 204. c) 208. d) 212. e) 220.

Solução: Alternativa D

O número total de ternos de pontos vale $\binom{12}{3} = \frac{12!}{3!.9!} = \frac{12.11.10.\cancel{9!}}{6.\cancel{9!}} = 220$.

Agora deve-se retirar os ternos de pontos alinhados. Perceba que em uma reta há 4 pontos alinhados e em outra também há 4 pontos alinhados:

$220 - \binom{4}{3} - \binom{4}{3} = 220 - 4 - 4 = 212$.

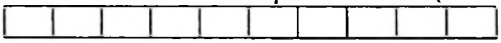
4) (UFMG-03) O jogo de dominó possui 28 peças distintas. Quatro jogadores repartem entre si essas 28 peças, ficando cada um com 7 peças. De quantas maneiras distintas se pode fazer tal distribuição?

a) 28!/7!4! b) 28!/4!24! c) 28!/(7!)^4 d) 28!/7!21!

Solução: Alternativa C

Suponhamos que a ordem com que as peças são divididas interessa. Assim, temos $\binom{28}{7}$ possibilidades de distribuir 7 peças para o 1º jogador, $\binom{21}{7}$ possibilidades de distribuir 7 peças para o 2º jogador, $\binom{14}{7}$ possibilidades de distribuir 7 peças para o 3º jogador e $\binom{7}{7}$ possibilidades de distribuir 7 peças para o 4º jogador. Desta forma, o número de maneiras de distribuir ordenadamente as cartas pelos jogadores é $\binom{28}{7}.\binom{21}{7}.\binom{14}{7}.\binom{7}{7} = \frac{28!}{7!.21!}.\frac{21!}{7!.14!}.\frac{14!}{7!.7!}.1 = \frac{28!}{(7!)^4}$.

5) Considere a sequência constituída de 10 quadradinhos (todos congruentes).



Cada quadradinho deve ser colorido usando-se uma das seguintes cores: azul ou vermelho. Quantas são as sequências de 10 quadradinhos, nas quais não há 2 quadrinhos adjacentes vermelhos?

Solução:

Note que a quantidade de quadradinhos azuis vai de 5 a 10. Como estratégia de conta, serão colocados espaços vazios entre duas casas azuis, espaços estes que podem ser ocupados por casas vermelhas.

Todos os 10 quadrados azuis: _A_A_A_A_A_A_A_A_A_A_ → $C_{11,0} = 1$

9 azuis e 1 vermelho: _A_A_A_A_A_A_A_A_A_ → $C_{10,1} = 10$

8 azuis e 2 vermelhos: _A_A_A_A_A_A_A_A_ → $C_{9,2} = 36$

7 azuis e 3 vermelhos: _A_A_A_A_A_A_A_ → $C_{8,3} = 56$

6 azuis e 4 vermelhos: _A_A_A_A_A_A_ → $C_{7,4} = 35$

5 azuis e 5 vermelhos: _A_A_A_A_A_ → $C_{6,5} = 6$

Total: 1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6 = 144

6) (OBM-08) Determine a quantidade de funções f: {1, 2, 3, 4, 5}→{1, 2, 3, 4, 5} tais que f(f(x)) = f(x) para todo x ∈ {1, 2, 3, 4, 5}.

Solução:

Para que f(f(x)) = f(x) então a imagem de f deverá só conter pontos fixos. Utilizando esse fato temos:

Com 5 pontos fixos na imagem teremos 1 função possível.

Com 4 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{1}4 = 20$ funções

Com 3 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{2}\cdot 3^2 = 90$ funções

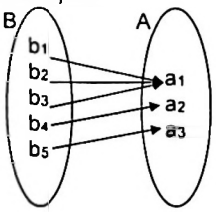
Com 2 pontos fixos na imagem teremos $\binom{5}{3}\cdot 2^3 = 80$ funções

Com 1 ponto fixo na imagem teremos $\binom{5}{4}\cdot 1^4 = 5$ funções

logo o total de funções *f* satisfazendo f(f(x)) = f(x) igual a 196.

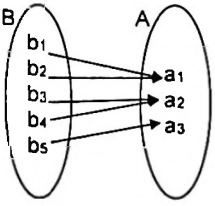
7) (ITA-17) Sejam A e B dois conjuntos com 3 e 5 elementos, respectivamente. Quantas funções sobrejetivas f: B→A existem?

Solução:



1° caso: um elemento de A é imagem de três elementos de B e os outros dois elementos de A são imagens de distintos elementos de B.

$n_1 = C_{5,3} \times 3 \times 2 \times 1 = 60$



2° caso: 2 elementos distintos de A são imagens de exatamente dois elementos de B, cada, com o terceiro elemento de A sendo imagem de um único elemento de B.

$$n_2 = \frac{\binom{5}{2}\times 3\binom{3}{2}\times 2}{2!}\times 1 = 90$$

Total = $n_1 + n_2 = 60 + 90 = 150$

8) (ITA-07) Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

a) $2^8 - 9$ b) $2^8 - 1$ c) $2^8 - 2^6$ d) $2^{14} - 2^8$ e) 2^8

Solução: Alternativa A

Como existem 8 elementos de A que não pertencem a B:

$$N = \binom{8}{6} + \binom{8}{5} + \binom{8}{4} + \binom{8}{3} + \binom{8}{2} + \binom{8}{1} + \binom{8}{0} = 247 = 2^8 - 9$$

9) (Fuvest-03) Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo **4** itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Esses **4** itens devem ser escolhidos entre **8** tipos de produtos de limpeza e **5** tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola, deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitos?

a) 360 b) 420 c) 540 d) 600 e) 640

Solução: Alternativa E

Separemos em casos:

i) sacola com 1 alimento não perecível e 3 produtos de limpeza:

$\binom{8}{1} \cdot \binom{5}{3} = 80$ possibilidades.

ii) sacola com 2 alimentos não perecíveis e 2 produtos de limpeza:

$\binom{8}{2} \cdot \binom{5}{2} = 280$ possibilidades.

iii) sacola com 3 alimentos não perecíveis e 1 produto de limpeza:

$\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{1} = 280$ possibilidades.

Desta forma, temos 640 sacolas distintas.

10) (IME-07) Um grupo de nove pessoas, sendo duas delas irmãos, deverá formar três equipes, com respectivamente dois, três e quatro integrantes. Sabendo que os dois irmãos não podem ficar na mesma equipe, o número de equipes que podem ser organizadas é:

a) 288 b) 455 c) 480 d) 910 e) 960

Solução: Alternativa D

Um irmão em B e outro em C: $2!. C_{7,2}. C_{5,2}. C_{3,3} = 420$

Um irmão em A e outro em C: $2!. C_{7,1}. C_{6,3}. C_{3,3} = 280$

Um irmão em A e outro em B: $2!. C_{7,1}. C_{6,2}. C_{4,4} = 210$

Total = 910

11) (AFA-98) A quantidade de números naturais de 4 algarismos distintos, formados por **1, 2, 3, 4, 5** e **6**, que contém o algarismo **3** ou o algarismo **4** é

a) 196 b) 286 c) 336 d) 446

Solução: Alternativa C

Temos três casos a considerar:

i) o algarismo 3 pertence ao número e o algarismo 4 não pertence:

Temos que escolher os 3 algarismos restantes, dentre os 4 possíveis (1, 2, 5 e 6) e depois permutar os 4 algarismos do número. Assim, $N_1 = C_{4,3}.4! = 96$.

ii) o algarismo 3 não pertence ao número e o algarismo 4 pertence:

Mais uma vez, temos que escolher os 3 algarismos restantes, dentre os 4 possíveis (1, 2, 5 e 6) e depois permutar os 4 algarismos do número.

Assim, $N_2 = C_{4,3}.4! = 96$.

iii) o algarismo 3 pertence ao número e o algarismo 4 também pertence:

Temos que escolher os 2 algarismos restantes, dentre os 4 possíveis (1, 2, 5 e 6) e depois permutar os 4 algarismos do número. Assim, $N_3 = C_{4,2}.4! = 144$.

Desta maneira, temos no total $N_1 + N_2 + N_3 = 336$ números.

12) (Escola Naval-04) O maior número de planos que podemos formar com 10 pontos distintos do espaço, dos quais 6 são coplanares é

a) 30 b) 31 c) 100 d) 101 e) 208

1ª Solução (Método Direto de Contagem): Alternativa D

Sabemos que cada seleção de três pontos não-colineares determina um plano. Fora o plano definido pelos seis pontos, tem-se três casos a considerar:

i) Escolher 3 pontos somente dos 4 não coplanares: $C_{4,3} = 4$ planos.

ii) Escolher 1 ponto dos 4 não coplanares e 2 pontos dos 6 coplanares:

$(C_{4,1})(C_{6,2}) = 60$ planos.

iii) Escolher 2 pontos dos 4 coplanares e 1 ponto dos 6 coplanares:

$(C_{4,2})(C_{6,1}) = 36$ planos.

Então, no total, temos $1 + 4 + 60 + 36 = 101$ planos.

2ª Solução (Método Indireto de Contagem): Alternativa D

Vamos contar a quantidade de maneiras de escolher 3 pontos dentre os 10 totais e subtrair deste valor a quantidade de maneiras de escolher 3 pontos coplanares. Esta subtração resulta na quantidade de maneiras de escolher 3 pontos não coplanares, cada maneira associada a um plano distinto. Lembrando do plano definido pelos 3 pontos, a quantidade de plano é igual a $C_{10,3} - C_{6,3} + 1 = 120 - 20 = 101$.

13) (Olimpíada da Argentina-97) Sejam s e t duas retas paralelas. São marcados k pontos na reta s e n pontos na reta t ($k \geq n$). Sabendo que a quantidade total de triângulos que tem seus três vértices em pontos marcados é 220, achar todos os possíveis valores de k e n.

Solução:

Para formar um triângulo basta escolher dois pontos numa reta um ponto em outra:

$$\binom{k}{2}n + \binom{n}{2}k = \frac{k(k-1)n}{2} + \frac{n(n-1)k}{2} = \frac{kn(k-1+n-1)}{2} = \frac{kn(n+k-2)}{2} = 220 \Rightarrow$$

$kn(n + k - 2) = 440 \Rightarrow kn(n + k - 2) = 2^3.5.11 \Rightarrow nk^2 + n(n - 2)k - 440 = 0$

Analisando todas as possibilidades conclui-se que:

$n = 1$: $k^2 - k - 440 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$

$n = 2$: $2k^2 - 440 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$

$n = 4$: $4k^2 + 8k - 440 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$

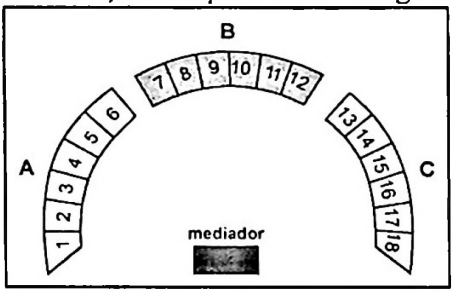
$n = 5$: $5k^2 + 15k - 440 = 0 \Rightarrow k = 8$ ou $k = -11$ (não convém)

$n = 8$: $8k^2 + 48k - 440 = 0 \Rightarrow k = 5$ ou $k = -11$ (não convém)

$n = 10$: $10k^2 + 80k - 440 = 0 \Rightarrow k \notin \mathbb{N}$

Nos demais casos $k < n$. Assim, a única possibilidade é $k = 8$ e $n = 5$.

14) (UNB-00) Um debate com 18 candidatos, dos quais 6 são mulheres, será transmitido por uma emissora de televisão. Os candidatos serão posicionados em 3 mesas — A, B e C —, cada uma com 6 cadeiras devidamente numeradas, ficando o mediador posicionado ao centro, como apresentado na figura abaixo.



Com base nos dados apresentados no texto, considerando-se que a composição das mesas inicia-se pela mesa A, seguida da B e depois da C, e que a posição que cada candidato possa ocupar em uma mesa seja irrelevante, julgue os itens abaixo.

(1) Existem exatamente $(18!)/(12!)$ composições diferentes para a mesa A.

(2) Existem precisamente $(12!)(6!)/(3!)^2$ composições distintas para a mesa A, de maneira que exatamente 3 dos 6 candidatos que compõem a mesa sejam mulheres.

(3) Existem precisamente $(18!)/(12!)(6!)^2$ maneiras distintas de serem formados 3 grupos de 6 candidatos cada um para ocuparem as 3 mesas.

(4) Se, em cada uma das mesas, dois lugares deverão ser ocupados por mulheres, haverá exatamente $(12!)(6!)/(8!)(4!)$ composições distintas para a mesa A.

Solução:

(1) **CERTO.** Para formar a mesa A devemos escolher 6 das 18 pessoas. Claramente, isto pode ser feito de $\binom{18}{6} = \frac{18!}{6!.12!} = \frac{18!}{12!.6!} = \binom{18}{12}$ possibilidades.

(2) **ERRADO.** Devemos escolher 3 das 6 mulheres e 3 dos 12 homens: $\binom{6}{3}.\binom{12}{3} = \frac{6!}{3!.3!}.\frac{12!}{3!.9!} = \frac{(12!)(6!)}{(3!)^3(9!)}$ possibilidades.

(3) **ERRADO.** Para escolher as 6 pessoas que vão ocupar a mesa A temos $\binom{18}{6}$ possibilidades, para a mesa B temos $\binom{12}{6}$ possibilidades e para a mesa C temos 1 possibilidade (os 6 que sobraram). Desta forma, para distribuir as 18 pessoas temos $\binom{18}{6}.\binom{12}{6}.1 = \frac{18!}{6!.12!}.\frac{12!}{6!.6!} = \frac{(18!)}{(6!)^3}$ possibilidades.

(4) **ERRADO.** Devemos escolher 2 das 6 mulheres e 4 dos 12 homens: $\binom{6}{2}.\binom{12}{4} = \frac{6!}{2!.4!}.\frac{12!}{4!.8!}$ possibilidades.

15) (ITA-94) Quantas anagramas com 6 caracteres distintos podemos formar usando as letras da palavra QUEIMADO, anagramas estes que contenham duas consoantes e que, entre as consoantes, haja pelo menos uma vogal?

a) 7200 b) 7000 c) 4800 d) 3600 e) 2400

Solução: Alternativa A

Como o anagrama deve possuir 6 letras, sendo 2 consoantes e 4 vogais, e a palavra QUEIMADO possui 3 consoantes e 5 vogais, inicialmente temos que escolher as consoantes e as vogais que vão formar o anagrama. Para simplesmente escolher (depois iremos permutar) as consoantes temos $C_{3,2}$ possibilidades e as vogais temos $C_{5,4}$ possibilidades.

Vamos agora calcular as permutações destas letras escolhidas, lembrando que entre as duas consoantes deve existir pelo menos uma vogal. Vamos utilizar o método indireto de contagem. O número total de anagramas, sem restrições, é 6!. Agora vamos calcular o número de anagramas com as duas consoantes juntas. Podemos organizar o seguinte esquema:

C_1C_2	V_1	V_2	V_3	V_4

Portanto, devemos permutar os 5 elementos e depois internamente as 2 vogais. Temos, assim, 5!.2! possibilidades.

Pelo método indireto de contagem temos $(C_{3,2})(C_{5,4})(6! - 5!.2!) = 7200$ anagramas.

16) (ITA-02) Quantos anagramas com 4 letras distintas podemos formar com as 10 primeiras letras do alfabeto e que contenham 2 das letras a, b e c?

a) 1692 b) 1572 c) 1520 d) 1512 e) 1392

Solução: Alternativa D

Existe uma imprecisão no enunciado, pois não é citado de cada anagrama deve possuir *exatamente* 2 das letras a, b e c ou *pelo menos* 2 das letras a, b e c. Vamos entender que o que é pedido é o número de anagramas com *exatamente* 2 das letras a, b e c. Neste caso, devemos escolher 2 dentre 3 elementos distintos (vogais), depois

escolher 2 dentre 7 elementos distintos (consoantes) e finalmente permutar os elementos escolhidos. Assim, temos $(C_{3,2})(C_{7,2})(4!) = 1512$ anagramas.

17) (IME-91) Dado o conjunto A = {1, 2, 3, ..., 102}, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

Solução:

Vamos dividir os elementos do conjunto A em três outros conjuntos de acordo com o seu resto na divisão por 3:

$A_0 = \{3, 6, 9, ..., 102\}$; $A_1 = \{1, 4, 7, ..., 100\}$; $A_2 = \{2, 5, 8, ..., 101\}$

A_0 é o conjunto formado pelos elementos de A que deixam resto 0 na divisão por 3, A_1 é formado pelos que deixam resto 1 e A_2 é formado pelos que deixam resto 2.

Observemos as quantidades de elementos de cada conjunto: $n(A_0) = 34$; $n(A_1) = 34$; $n(A_2) = 34$.

Para que a soma de 3 números inteiros seja múltiplo de 3 temos duas situações:

i) os 3 números deixam o mesmo resto na divisão por 3:

Assim, devemos escolher 3 números que deixam resto 0 na divisão por 3 ou 3 números que deixam resto 1 na divisão por 3 ou 3 números que deixam resto 2 na divisão por 3.

Temos, portanto, $C_{34,3} + C_{34,3} + C_{34,3} = 3.C_{34,3}$.

i) cada um dos 3 números deixam um resto diferente na divisão por 3:

Neste caso, devemos escolher um dos 34 elementos de A_0, um dos 34 elementos de A_1 e um dos 34 elementos de A_2. Consequentemente, existem $34.34.34 = 34^3$ possibilidades.

Desde que separamos a análise em dois casos, no total temos $3.C_{34,3} + 34^3$ possibilidades.

18) (IME-93) Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro comum. Todos os alunos participam.

a) Quantos alunos tem a escola?

b) Quantos alunos participam de cada comissão?

Solução:

a) Como cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro comum, então toda vez que selecionarmos duas comissões teremos um aluno distinto associado a este par de comissões, que é exatamente o único aluno que participa simultaneamente destas duas comissões. Por exemplo, se selecionarmos as comissões 4 e 12, teremos um aluno, digamos João, associado a este par de comissões, que é o único membro de pertence tanto à comissão 4 quanto à comissão 12. Assim, se enumerarmos todos os pares de comissões e ao lado de cada par escrevermos o nome do aluno que pertence às duas comissões, ao final da enumeração teremos escritos, apenas uma vez, o nome de cada aluno. Portanto,

concluímos que o número de alunos é igual ao número de pares de comissões que podem ser formados. Como temos 15 comissões, podemos formar $C_{15,2} = 105$ pares de comissões e, consequentemente, temos 105 alunos.

b) Suponha que o número de alunos por comissão seja igual a k.

Montemos uma tabela de distribuição dos alunos pelas comissões:

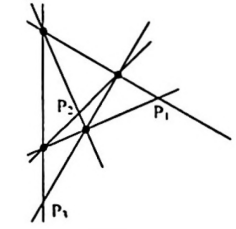
	comissão 1	comissão 2	...	comissão 15
membro 1				
membro 2				
...				
membro k				

Evidentemente, o número de vezes que preenchemos esta tabela com os nomes dos alunos é igual a 15.k. Por outro lado, como o nome de cada aluno vai escrito duas vezes (pois cada alunos pertence a duas comissões) na tabela acima, então também podemos afirmar que o número de vezes que preenchemos a tabela acima é igual a $2.105 = 210$. Assim: $15.k = 210 \Rightarrow k = 14$.

19) (IME-94) Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

Solução:

Tome quatro vértices deste octógono. Observe a figura abaixo, onde traçamos todos os segmentos de reta possíveis com os quatro vértices.



Note que para toda seleção de quatro vértices do octógono existem três pontos de interseção de diagonais, na figura representados por P_1, P_2 e P_3. Deste modo, podemos afirmar que o número de pontos de interseção de diagonais é igual a três vezes o número de maneiras de escolhermos quatro entre os oito vértices do octógono. Assim, existem $3\binom{8}{4} = 210$ pontos de interseção de diagonais.

20) (IME-88) Considere um torneio de xadrez com 10 participantes. Na primeira rodada cada participante joga somente uma vez, de modo que há 5 jogos realizados simultaneamente. De quantas formas distintas esta primeira rodada pode ser realizada? Justifique sua resposta.

1ª Solução:

Sejam os dez participantes representados por: P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8, P_9 e P_{10}. Inicialmente imagine a tabela da 1ª rodada sem nenhum jogo escolhido. O participante P_1, na 1ª rodada, certamente vai jogar contra outro participante. A escolha deste participante pode ser feita de 9 maneiras. Suponhamos que P_1 jogue contra P_5. Já temos um jogo marcado: $P_1 \times P_5$.

O jogador P_2 vai ter que jogar contra alguém da 1ª rodada. Sobram 7 possibilidades para escolher seu adversário. Digamos que P_2 jogue contra P_9. Temos o segundo jogo marcado: $P_2 \times P_9$.

O jogador P_3 também vai ter que jogar. Temos 5 possibilidades de escolha de seu adversário. Suponhamos que P_3 jogue contra P_4, fazendo o terceiro jogo: $P_3 \times P_4$.

P_6 também vai ter que jogar na 1ª rodada. Sobram ainda 3 maneiras de escolher seu adversário. Digamos que P_6 jogue contra P_{10}, implicando que o 4º jogo seja $P_6 \times P_{10}$.

Para o último jogo temos apenas 1 possibilidade, que é pegar os times que ainda não foram escolhidos.

Desta forma, existem 9.7.5.3.1 = 945 possibilidades de realizar os 5 jogos da 1ª rodada.

2ª Solução:

Escolha um par de times para realizar o 1º jogo. Isto pode ser feito de $\binom{10}{2}$ possibilidades. Depois do 1º jogo ser marcado, na escolha de mais um par de times para fazer o 2º jogo temos $\binom{8}{2}$ possibilidades. Analogamente, para a escolha dos times do 3º jogo temos $\binom{6}{2}$ possibilidades, para a escolha do 4º jogo temos $\binom{4}{2}$ possibilidades e na escolha do 5º jogo temos $\binom{2}{2}$ possibilidades.

Como a ordem de escolha dos jogos é irrelevante, devemos dividir a multiplicação das quantidades acima por 5!. Assim, o total de maneiras de marcar a 1ª rodada é

$$\frac{\binom{10}{2}\cdot\binom{8}{2}\cdot\binom{6}{2}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{2}}{5!} = 945.$$

21) (IME-00) Seja o conjunto:

$D = \{(k_1, k_2) \mid 1 \le k_1 \le 13;\ 1 \le k_2 \le 4;\ k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$.

Determine quantos subconjuntos $L = \{(x_1,x_2), (y_1,y_2), (z_1,z_2), (t_1,t_2), (r_1,r_2)\}$, $L \subset D$, existem com 5 (cinco) elementos distintos, que satisfazem simultaneamente as seguintes condições:

a) $x_1 = y_1 = z_1$;

b) $x_1 \neq t_1$, $x_1 \neq r_1$, $t_1 \neq r_1$.

Solução:

Antes de começar a contar devemos analisar o que estamos contando. Como estamos querendo calcular a quantidade de conjuntos L (que obedecem às condições a e b) então a ordem dos elementos de L não interessa, uma vez que em um conjunto somente estamos interessados nos elementos que o compõe e não na ordem em que

estão listados. Assim, podemos afirmar que os conjuntos A = {1, 2, 3} e B = {3, 1, 2} são iguais. Conscientes disto, vamos começar a contagem.

Iniciamos escolhendo o valor dos elementos $x_1 = y_1 = z_1$. Para tanto temos 13 valores possíveis. Como os elementos (x_1, x_2), (y_1, y_2) e (z_1, z_2) são distintos dois a dois, então $x_2 \neq y_2$, $x_2 \neq z_2$ e $y_2 \neq z_2$. Assim, devemos escolher 3 valores dentre 4 distintos, ou seja, temos $C_{4,3} = 4$ possibilidades.

Note que já determinamos o número de maneiras de formar os elementos (x_1, x_2), (y_1, y_2) e (z_1, z_2).

Como $t_1 \neq r_1$ então os elementos (t_1, t_2), (r_1, r_2) são distintos para quaisquer valores de t_2 e r_2, que podem até ser iguais. Desta forma, temos $C_{12,2} = 66$ possibilidades para escolher os valores de t_1 e r_1 e $4.4 = 16$ possibilidades de escolha para os valores de t_2 e r_2.

Concluímos, então, que existem $13.4.66.16 = 54912$ subconjuntos L.

22) (IME-04) Ao final de um campeonato de futebol, somaram-se as pontuações das equipes, obtendo-se um total de **35 pontos**. Cada equipe jogou com todos os outros adversários apenas uma vez. Determine quantos empates houve no campeonato, sabendo que cada vitória valia **3 pontos**, cada empate valia **1 ponto** e que derrotas não pontuavam.

Solução:

Seja n o número de times do campeonato. Como cada equipe jogou contra cada outra exatamente uma vez, então o número de jogos disputados é igual a $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

O valor máximo de pontos totais distribuídos entre os times corresponde quando todos os jogos terminam com vitória de um dos times (cada jogo distribuindo 3 pontos na tabela de pontuação dos times) e o valor mínimo de pontos corresponde quando todos os jogos terminaram empatados (cada jogo distribuindo 2 pontos na tabela de pontuação dos times). Assim:

$$2.\frac{n(n-1)}{2} \leq 35 \leq 3.\frac{n(n-1)}{2} \Rightarrow 2n(n-1) \leq 70 \leq 3n(n-1) \quad (1)$$

Como n é inteiro positivo, resolvendo a inequação $2n(n-1) \leq 70$, encontramos que $1 \leq n \leq 6$. Analogamente, resolvendo $3n(n-1) \geq 70$ (n inteiro positivo) encontramos que $n \geq 6$. Portanto, concluímos que a única solução inteira positiva para a equação (1) é $n = 6$, implicando que foram disputados $\binom{6}{2} = 15$ jogos no torneio. Como a diferença de pontos distribuídos entre um jogo que não terminou empatado e outro que terminou empatado é 1, então o número N de jogos que terminaram empatados é igual à diferença entre o número máximo teórico de pontos totais dos times e a quantidade real de pontos totais dos times ao final do torneio.

Assim: $N = 3\binom{6}{2} - 35 = 45 - 35 = 10$ jogos empatados.

23) (IME-81) O professor Sah Bido quer oferecer jantares para 3 alunos de cada vez. O professor tem 7 alunos e quer oferecer 7 jantares, com a restrição de que um mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar, isto é, se os alunos A, B e C comparecerem a um jantar, então a presença do aluno A, por exemplo, em outro jantar, impedirá a presença de C ou de B, neste jantar. Chamando-se de programa a um conjunto de 7 jantares nas condições especificadas, pergunta-se: quantos programas diferentes poderão ser formados?

Solução:

Observe que nesta questão um programa é uma seleção de 7 ternos de alunos. Como no enunciado é usada a palavra *conjunto*, entenderemos que a ordem com que os ternos de alunos são organizados no programa não interessa, bastando apenas escolher (sem permutar) os 7 ternos.

Montemos uma tabela para organizar os 7 jantares:

	jantar 1	jantar 2	jantar 3	jantar 4	jantar 5	jantar 6	jantar 7
aluno 1							
aluno 2							
aluno 3							

Representemos os 7 alunos pelas 7 letras do alfabeto: A, B, C, D, E, F e G.

Se escrevermos debaixo de cada jantar os três pares de alunos possíveis de serem formados por dia, ao final do preenchimento da tabela acima teremos escrito 21 pares de alunos, todos distintos, uma vez que o mesmo par de alunos não pode ser convidado para mais de um jantar. Por outro lado, como o número máximo de pares que podemos formar com os 7 alunos é $C_{7,2} = 21$ então concluímos que exatamente todos os 21 pares possíveis de alunos são escritos. Assim, podemos afirmar que cada pessoa participa exatamente de 3 jantares e, ao final destes 3 jantares, cada pessoa participou de exatamente um jantar com cada um dos outros seis alunos.

Como o aluno A deve participar de exatamente 3 jantares, vamos analisar inicialmente como que o aluno A pode participar de um programa. Analisemos todos os ternos de alunos em que o aluno A figura:

A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	B	B	B	B	C	C	C	C	D	D	D	E	E	F
C	D	E	F	G	D	E	F	G	E	F	G	F	G	G

Assim, temos 15 possibilidades de escolha de como o aluno A vai participar pela 1ª vez do programa. Suponha que o terno escolhido seja A-B-C. Para a escolha dos outros dois ternos em que o aluno A figura temos as seguintes possibilidades:

A	A	A	A	A	A
D	D	D	E	E	F
E	F	G	F	G	G

Repare que a escolha do 2º terno com o aluno A já determina a escolha do último. Por exemplo, se escolhermos o termo A-D-E, o último terno deverá ser A-F-G. Porém, se escolhermos o terno A-D-G, o último será A-E-F. Desta maneira, para cada escolha do 2º terno com o aluno A (6 possibilidades), temos apenas uma possibilidade de escolha do último terno com o aluno A. Entretanto, observe que a ordem com que os ternos são escolhidos não interessa, uma vez que estamos apenas interessados em escolher os ternos e não permutá-los. Deste modo, temos $\frac{15.6.1}{3!} = 15$ possibilidades de escolher (sem permutar) os 3 ternos em o aluno A vai estar presente no jantar.

Suponhamos, somente para efeito de análise das escolhas posteriores, que estes ternos escolhidos sejam A-B-C, A-D-E e A-G-H. Para a escolha dos 4 ternos que faltam temos as seguintes possibilidades:

B	B	B	B	C	C	C	C
D	D	E	E	D	D	E	E
G	H	G	H	G	H	G	H

Os alunos B e C já foram escolhidos para um jantar (A-B-C) e cada um deve ainda ser escolhido para mais dois jantares. Note que a escolha do 2º terno com o aluno B já determina a escolha do último terno com o aluno B. Por exemplo, se escolhermos como o 2º jantar de B o terno B-D-G, o último jantar será obrigatoriamente B-E-H. Assim, para cada uma das 4 possibilidades de escolha do 2º jantar do aluno B, temos uma possibilidade para o último jantar. Como a ordem com que os ternos são escolhidos não interessa, temos $\frac{4.1}{2!} = 2$ possibilidades de escolher os outros dois jantares do aluno B.

Agora, para fechar um programa, falta somente escolher os outros dois jantares do aluno C. Na verdade, as escolhas dos 3 jantares do aluno A e os dois outros dois jantares (um deles é com o aluno A) do aluno B já determinam os outros dois jantares do aluno C. Por exemplo, suponha que os outros dois jantares de B sejam B-D-H e B-E-G. A única possibilidade para C é completar o programa com os ternos C-D-G e C-E-H, pois todos os pares que podemos formar com os outros alunos (à exceção dos pares D-G e E-H) já foram formados nos 5 jantares já escolhidos para um programa. Desta maneira, temos apenas uma possibilidade para a escolha dos últimos dois jantares.

Portanto, o número total de programas (conjuntos de 7 jantares) é 15.2.1 = 30.

24) Nove cientistas trabalham num projeto sigiloso. Por questões de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por muitos cadeados de modo que só é possível abri-los todos se houver pelo menos 5 cientistas presentes.

a) Qual é o número mínimo possível de cadeados?

b) Na situação do item a, quantas chaves cada cientista deve ter?

Solução:

a) Se só é possível abrir o cofre se houver pelo menos 5 cientistas presentes, então se tomarmos todos os grupos de 4 cientistas teremos pelo menos um cadeado que estes 4 cientistas não possuem a sua chave. Logo, se enumerarmos todos os grupos de 4 cientistas e ao lado de cada grupo escrevermos o cadeado que estes não possuem a chave, ao final desta enumeração teremos escritos, pelo menos uma vez, todos os cadeados. Desta forma, podemos concluir que o número de cadeados é no mínimo igual ao número de maneiras de escolher 4 dos 9 cientistas, ou seja, o número de cadeados é no mínimo $C_{9,4} = 256$.

b) Imagine que você é um dos cientistas. Sabemos que toda vez que selecionarmos 4 dos cientistas existe pelo menos um cadeado que estes 4 cientistas não possuem a chave. Suponha que você está em um grupo de 5 cientistas que vai abrir o cofre. Os outros 4 cientistas possuem, com exceção de uma, todas as chaves para abrir o cadeado. Com quem está a chave que está faltando? Com você, claro. Isto ocorre com todo grupo de 5 cientistas em que você faz parte. No pior dos casos, todas estas chaves são distintas para cada grupo de 4 cientistas que podemos formar com os outros 8. Desta forma, o número de chaves que cada cientista deve possuir é igual a $C_{8,4} = 70$.

25) (OBM-04) Os doze alunos de uma turma de olimpíada saíam para jogar futebol todos os dias após a aula de matemática, formando dois times de 6 jogadores cada e jogando entre si. A cada dia eles formavam dois times diferentes dos times formados em dias anteriores. Ao final do ano, eles verificaram que cada 5 alunos haviam jogado juntos num mesmo time exatamente uma vez. Quantos pares de times diferentes foram formados ao longo do ano?

Solução:

Se não houvesse a restrição de cada 5 alunos jogar juntos apenas uma vez o número de maneiras de distribuir os 12 jogadores em 2 times de 6 alunos cada seria $C_{12,6}$.

Selecione aleatoriamente 5 dos 12 alunos. Pela restrição do enunciado, estes jogam no mesmo time apenas uma vez. Sem a restrição, estes 5 alunos jogariam juntos 7 vezes, pois podemos pegar qualquer um dos outros 7 alunos ainda sem time e colocar no time formado pelos 5 alunos selecionados inicialmente. Desta maneira, podemos afirmar que o número de maneiras de dividirmos os times com a restrição de cada 5 alunos jogar juntos apenas uma vez é igual a um sétimo do número de maneiras de dividirmos os times sem restrição nenhuma, ou seja, temos $\frac{C_{12,6}}{7} = 132$ possibilidades.

26) (Olimpíada de Goiás) Propõe-se colorir cada uma das casas de um tabuleiro 4×4 com apenas uma das duas cores: ou preto ou branco, de modo que existam exatamente duas casas brancas em cada fila e em cada coluna. Determine o número de maneiras diferentes que se pode efetuar a coloração proposta.

Solução:

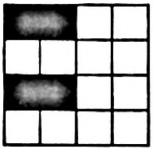
Vamos pintar coluna por coluna. Na primeira coluna devemos escolher 2 das 4 colunas para serem pintadas de preto. Assim, temos $C_{4,2} = 6$ formas de escolher estas duas casas. Digamos que escolhemos a 1ª e a 3ª casas.

Para a segunda coluna temos os seguintes 3 casos:

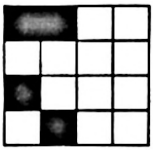
1) Pintar as casas adjacentes às casas pintadas na 1ª coluna;

2) Pintar somente uma casa adjacente a uma casa da 1ª coluna;

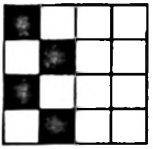
3) Não pintar nenhuma casa adjacente a uma casa da 1ª coluna.



Caso 1



Caso 2



Caso 3

Para o caso 1, não existe mais escolha, pois somente existe uma possibilidade para pintar as casas da 2ª coluna, e também para a 3ª e 4ª colunas temos somente uma possibilidade que é pintar as casas das linhas ainda não pintadas.

Assim, para o caso 1 temos $C_{4,2} = 6$ possibilidades.

Para o caso 2, temos 2 possibilidades para escolher qual a casa adjacente a ser pintada e mais duas possibilidades para escolher qual a casa não adjacente a ser pintada. Notemos depois de pintar estas casas sobra uma linha sem casa pintada, implicando que na 3ª e 4ª colunas as duas casas desta linha devem ser pintadas. Depois de pintar estas duas casas, temos duas linhas com somente uma casa pintada. Para pintar estas casas temos duas possibilidades. Assim, para o segundo caso temos $C_{4,2}.2.2.2 = 48$ possibilidades.

Para o terceiro caso, existe somente uma possibilidade de pintar a 2ª coluna. Como já temos cada linha com uma casa pintada, basta escolher agora as duas casas da 3ª linha para pintar e completar duas linhas com duas casas pintadas. Isto pode ser feito de $C_{4,2} = 6$ possibilidades. Para a última coluna temos somente uma possibilidade, uma vez que sobram duas linhas com uma casa pintada. Deste modo, para o 3º caso temos $C_{4,2}.C_{4,2} = 36$ possibilidades.

Portanto, o número total de possibilidades é $6 + 48 + 36 = 90$.

5.11. ARRANJOS

Suponha que você quer montar todas as sequências ordenadas com k elementos distintos a partir de n elementos distintos dados. Como temos n possibilidades para a 1ª escolha, n − 1 possibilidades para a 2ª escolha, assim sucessivamente, até n − k + 1 possibilidades para a kª escolha, pelo princípio da multiplicação existem n.(n − 1).(n − 2)...(n − k + 1) sequências ordenadas possíveis de k elementos distintos. O nome que se dá para cada uma destas sequências é arranjo. Simbolizamos o total de arranjos de n elementos distintos tomados k a k por $A_{n,k}$ ou A_n^k. Portanto:

$$A_{n,k} = n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)$$

Uma outra interpretação para arranjo é através da combinação de n elementos tomados k a k. Para construir as sequências de k elementos a partir dos n distintos você pode inicialmente escolher os k elementos que vão entrar na sequência (note isto pode ser feito de $C_{n,k}$ maneiras) e posteriormente permutar estes mesmos k elementos distintos (que pode ser feito de k! maneiras). Pelo princípio da multiplicação, o número de arranjos de n elementos tomados k a k é igual a:

$$A_{n,k} = (C_{n,k})k!$$

Perceba que as duas fórmulas apresentadas acima para o cálculo de $A_{n,k}$ são, evidentemente, equivalentes, uma vez que:

$$(C_{n,k})k! = \frac{n!}{(n-k)!k!}.k! = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)$$

Neste livro não vamos utilizar a fórmula do arranjo para resolver exercícios de contagem e o autor deste livro também não estimulado os leitores a utilizar tal fórmula, por vários motivos, entre os quais se destacam:

- Repare que apesar de ter duas interpretações (uma através do teorema da multiplicação e outro através da combinação), nenhuma das interpretações acrescenta nada de novo em relação ao que já foi visto anteriormente neste livro. Assim, nunca poderemos dizer que determinada questão somente pode ser feita através de arranjos. Inclusive, é sempre aconselhável, por amor à simplicidade, utilizar a interpretação pelo teorema da multiplicação, que simplifica tanto a notação quanto à quantidade de contas para chegar na resposta final;
- É interessante descomplicar a análise de uma questão de contagem. Combinatória já é complicada por natureza, complicar ainda mais é totalmente

desnecessário. Até então, neste livro, uma pessoa ao ler um enunciado tem que decidir se é o caso utilizar a teoria das permutações, das combinações e os teoremas fundamentais. Já é demais e também já é suficiente. O excesso de fórmulas faz com que a pessoa que ainda está aprendendo combinatória fique mais preocupada em decorar as fórmulas do que propriamente entender o fundamento que está por trás de cada fórmula. O mais importante em uma questão de contagem é entender e saber aplicar o raciocinio combinatório apropriado. Note que todas as fórmulas até agora apresentadas foram demonstradas usando somente o princípio da multiplicação e da adição. **Estes dois princípios são suficientes e necessários para resolver qualquer questão de contagem**. Evidentemente, a utilização das fórmulas já demonstradas (todas as permutações e a combinação), faz com que os cálculos fiquem mais curtos que a aplicação direta dos princípios da adição e multiplicação;

- A utilidade da fórmula do arranjo é muito restrita. É necessário escolher uma certa quantidade de objetos e depois permutar a mesma quantidade. Isto ocorre somente nas questões mais simples. Nas mais complexas, que é o caso das questões de concursos militares (foco deste livro), escolhe-se uma certa quantidade de objetos e permuta-se outra. Nestes casos, a fórmula do arranjo é absolutamente inútil.

Você deve agora estar se perguntando porque então foi exposta a teoria sobre os arranjos? Por um único motivo: alguns vestibulares continuam a usar a notação do arranjo de n elementos tomados k a k em suas questões. Assim, é normal em questões objetivas de vestibulares aparecem alternativas da seguinte forma:

a) $A_{8,3}$; b) A_{10}^2; c) $(A_{n,5})5!$; d) $(A_{9,k})^3$; e) $(A_8^6)(C_{10}^2)7!$.

Em resumo, pra resolver uma questão contagem o único conceito que você precisa saber sobre arranjo é o significado de sua fórmula. Pra resolver uma questão de contagem utilize permutação, combinação ou mesmo os princípios da multiplicação ou adição e seja feliz!

5.12. SOLUÇÕES INTEIRAS POSITIVAS DA EQUAÇÃO $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$

Vamos agora calcular o número de soluções inteiras positivas $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de uma equação linear da forma $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$. Por exemplo, vamos enumerar as soluções inteiras positivas de $x + y = 5$:

$$(x, y) = \{(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)\}.$$

Chegamos à conclusão que existem 4 soluções inteiras positivas para a equação $x + y = 5$. Entretanto quando aumentamos a quantidade de varáveis ou o valor da soma teremos muito trabalho na enumeração das soluções. Vamos montar um raciocínio para o cálculo do número de soluções. Suponha que você quer calcular o número de soluções inteiras positivas da equação linear $x + y + z + w = 9$. Podemos perceber algumas soluções, tais como (1, 2, 3, 3) ou (2, 5, 1, 1), contudo a enumeração não parece ser um caminho aconselhável. Observe o seguinte esquema:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w \\ 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \end{array}$$

Se selecionarmos 3 dos sinais + na soma acima e no lugar deles colocarmos uma barra, obteremos uma solução inteira positiva para a equação. Por exemplo:

$$\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & + & w \\ 1 + 1 & | & 1 + 1 + 1 & | & 1 + 1 + 1 & | & 1 \\ 1 + 1 + 1 + 1 & | & 1 + 1 & | & 1 & | & 1 + 1 \end{array}$$

Se interpretarmos que a soma até a primeira barra é igual a x, a soma entre a primeira e a segunda barra é igual a y, a soma entre a segunda e terceira barra é igual a z e a soma depois da terceira barra é igual a w, a 1ª situação acima equivale à solução $x = 2, y = 3, z = 3$ e $w = 1$ e a 2ª situação equivale à solução $x = 4, y = 2, z = 1$ e $w = 2$. Deste modo, cada vez que escolhermos 3 dos 8 sinais de adição (+) e colocarmos nos seus lugares uma barra (|), obteremos uma solução inteira positiva distinta da equação linear $x + y + z + w = 9$. Portanto, podemos afirmar que o número de soluções inteiras positivas da equação $x + y + z + w = 9$ é igual ao número de maneiras de escolher 3 dentre 8 sinais de adição. Assim, temos $\binom{8}{3}$ soluções inteiras positivas para o sistema $x + y + z + w = 9$.

Para generalizar podemos analisar um esquema semelhante ao anterior. Considere que agora estamos interessados em calcular o número de soluções inteiras positivas $(x_1, x_2, ..., x_p)$ da equação linear $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq p$. Separemos o número n como sendo a soma de n 1's:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & \ldots & + & x_p \\ 1 & + & 1 & + & 1 & + & \ldots & + & 1 & + & 1 & + & 1 \end{array}$$

Se escolhermos $p - 1$ dos $n - 1$ sinais de adição (+) e colocarmos nos seus lugares barras (|), podemos separar os números 1's em p somas intermediárias, cada uma associada (de acordo com a sua ordem) a uma das variáveis. Portanto, podemos afirmar que o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$ é igual ao número de maneiras de escolher $p - 1$ dentre $n - 1$ sinais de adição. Assim, há $\binom{n-1}{p-1}$ soluções inteiras positivas para a equação linear $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$.

5.13. SOLUÇÕES NATURAIS DA EQUAÇÃO $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$

Suponha que se deseja determinar a quantidade de soluções naturais da equação linear $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$. Agora, diferentemente do item anterior, as variáveis podem assumir valor nulo. Por exemplo, enumerando as soluções naturais da equação $x + y + z = 2$ obtém-se:

$$(x, y, z) = \{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$$

Logo, o número de soluções naturais da equação $x + y + z = 2$ é 6. Porém, enumerar as soluções não é uma boa estratégia quando o n é grande. Vamos agora elaborar uma estratégia para determinar uma expressão geral para a fórmula da quantidade de soluções naturais de uma equação do tipo $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$. Considere uma sequência de n bolinhas e de $p - 1$ barras:

$$\underbrace{\bullet\ \bullet\ \bullet \ldots \bullet\ \bullet}_{n}\ \underbrace{|\ |\ |\ldots|\ |}_{p-1}$$

Pode-se interpretar o valor de x_1 como sendo a quantidade de bolinhas antes da 1ª barra, o valor de x_2 como a quantidade de bolinhas entre a 1ª e a 2ª barra, o valor de x_3 como a quantidade de bolinhas entre a 2ª e a 3ª barra, ..., o valor de x_{p-1} como a quantidade de bolinhas entre a $(p - 2)^a$ e a $(p - 1)^a$ barra e o valor de x_p como a quantidade de bolinhas depois da $(p - 1)^a$ barra. No exemplo anterior da equação linear $x + y + z = 2$, uma das soluções naturais é a sequência $| \bullet | \bullet$, que equivale à solução (0, 1, 1).

Para cada solução natural da equação só existe uma forma de permutar as n bolinhas e as $p - 1$ barras e para cada permutação das bolinhas e barras só existe uma solução natural associada. Isso implica que o número de soluções naturais da equação linear $x_1 + x_2 + \ldots + x_p = n$ é igual ao número de maneiras de permutar n bolinhas e

$p - 1$ barras. Como se trata de uma situação clássica de permutação com repetição, esse número vale $\frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}$. Note que este número equivale à combinação de $n + p - 1$ elementos tomados $p - 1$ a $p - 1$: $\binom{n+p-1}{p-1}$.

Também é possível chegar a este resultado do número de soluções naturais por outro caminho, usando a quantidade de soluções inteiras positivas. Nada que uma troca de variáveis não resolva! Se $x_1, x_2, ..., x_p$ são números naturais, então $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0, ..., x_p \geq 0$. Definimos as variáveis $y_1, y_2, ..., y_p$ da seguinte forma:

$$y_1 = x_1 + 1 \geq 1, \quad y_2 = x_2 + 1 \geq 1, \quad ..., \quad y_p = x_p + 1 \geq 1$$

Substituindo de volta da equação:

$$x_1 + x_2 + ... + x_p = n \Rightarrow y_1 - 1 + y_2 - 1 + ... + y_p - 1 = n \Rightarrow$$
$$y_1 + y_2 + ... + y_p = n + p$$

Note agora que para cada solução natural da equação $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$ temos exatamente uma solução inteira positiva da equação $y_1 + y_2 + ... + y_p = n + p$ e vice-versa. Assim, podemos afirmar que o número de soluções naturais da equação $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$ é igual ao número de soluções inteiras positivas da equação $y_1 + y_2 + ... + y_p = n + p$. Desta maneira, pela teoria desenvolvida anteriormente para a quantidade de soluções inteiras positivas, conclui-se que o número de soluções naturais da equação $x_1 + x_2 + ... + x_p = n$ é igual a $\binom{n+p-1}{p-1}$.

Observações:

(1) Apesar dos exercícios resolvidos deste livro já utilizarem diretamente as fórmulas demonstradas para soluções inteiras positivas ou naturais, o autor deste livro não aconselha que o leitor "decore" essas fórmulas. É preferível aplicar, conforme o caso, os procedimentos usados na demonstração de cada fórmula.

(2) Atualmente poucas questões fornecem diretamente a equação a ser resolvida. A maioria das questões vem contextualizada, onde se deve interpretar que a melhor forma de resolver é montar uma equação linear, fundamentalmente nos exercícios em que vários elementos iguais podem ser escolhidos.

Exercícios Resolvidos

1) (FGV-05) Um fundo de investimentos disponibiliza números inteiros de cotas aos interessados nessa aplicação financeira. No primeiro dia de negociação desse fundo, verifica-se que 5 investidores compraram cotas, e que foi vendido um total de 9 cotas. Em tais condições, o número de maneiras diferentes de alocação das 9 cotas entre os 5 investidores é igual a:

a) 56 b) 70 c) 86 d) 120 e) 126

Solução: Alternativa B

Perceba que nesta questão uma forma de distribuir as cotas se diferencia de outra apenas pela quantidade de cotas que cada investidor acaba adquirindo. Sendo assim, se x_i, $1 \leq i \leq 5$, é a quantidade de cotas compradas pelo investidor i, então temos que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 9$. Como cada variável é maior ou igual a 1, estamos interessados no número de soluções inteiras positivas desta equação. Portanto, o número de maneiras de dividir as 9 ações nos 5 compradores é igual a $\binom{9-1}{5-1} = \binom{8}{4} = 70$.

2) (IME-11) Um trem conduzindo 4 homens e 6 mulheres passa por seis estações. Sabe-se que cada um destes passageiros irá desembarcar em qualquer uma das seis estações e que não existe distinção dentre os passageiros de mesmo sexo. O número de possibilidades distintas de desembarque destes passageiros é:

a) 1.287 b) 14.112 c) 44.200 d) 58.212 e) 62.822

Solução: Alternativa D

O número de maneiras de homens descerem nas estações é igual ao número de soluções inteiras e não negativas de: $a + b + c + d + e + f = 4$, sendo, portanto, igual a $\frac{9!}{4!.5!} = 126$. Analogamente, para o desembarque considerando, apenas, as mulheres, há $\frac{11!}{5!.6!}$ possibilidades.

Pelo princípio multiplicativo, portanto, existem 126.462 = 58212 modos de ocorrer o desembarque.

3) (Escola Naval-97) Um grupo de trabalho na Marinha do Brasil deve ser composto por 20 oficiais distribuídos entre o Corpo da Armada, Corpo de Intendentes e Corpo de Fuzileiros Navais. O número de diferentes composições onde figure pelo menos dois oficiais de cada corpo é igual a:

a) 120 b) 100 c) 60 d) 29 e) 20

Solução: Alternativa A

Repare que um grupo de trabalho se distingue de outro somente pelas quantidades de oficiais de cada classe. Sejam: a = nº de oficiais da Armada; i = nº de oficiais

Intendentes; f = nº de oficiais Fuzileiros. Desta forma, temos que calcular o número de soluções do sistema linear $a + i + f = 20$, sujeito às restrições $a \geq 2$, $i \geq 2$ e $f \geq 2$. Vamos fazer uma troca simples de variáveis, de modo que as restrições passem a ser ≥ 1. Sejam: $A = a - 1 \geq 1$; $I = i - 1 \geq 1$; $F = f - 1 \geq 1$.

Substituindo de volta na equação:

$$a + i + f = 20 \Rightarrow A + 1 + I + 1 + F + 1 = 20 \Rightarrow A + I + F = 17.$$

Portanto, dividir os oficiais no grupo de trabalho é equivalente a calcular o número de soluções inteiras positivas do sistema $A + I + F = 17$, onde temos $\binom{17-1}{3-1} = \binom{16}{2} = 120$ possibilidades.

4) Calcule o número de soluções inteiras maiores que -4 da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1.$$

Solução:

Desde que cada x_i, $1 \leq i \leq 4$, é um inteiro maior que -4, então podemos afirmar que $x_i \geq -3$. Vamos fazer uma troca de variáveis de modo que a única restrição de todas as variáveis seja ≥ 1. Sejam:

$$y_1 = x_1 + 4 \geq 1, \quad y_2 = x_2 + 4 \geq 1, \quad y_3 = x_3 + 4 \geq 1, \quad y_4 = x_4 + 4 \geq 1$$

Substituindo de volta na equação: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \Rightarrow$

$y_1 - 4 + y_2 - 4 + y_3 - 4 + y_4 - 4 = 1 \Rightarrow y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 17$

Como o número de soluções inteiras maiores que -4 da equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$ é igual ao número de soluções inteiras positivas da equação $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 17$, então temos $\binom{17-1}{4-1} = \binom{16}{3} = 560$.

5) Calcular o número de soluções inteiras naturais da inequação $x + y + z < 5$.

1ª Solução:

Se $x + y + z < 5$, então temos as seguintes possibilidades:

i) $x + y + z = 0 \Rightarrow$ 1 solução natural $(x = y = z = 0)$

ii) $x + y + z = 1 \Rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$ soluções naturais

iii) $x + y + z = 2 \Rightarrow \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ soluções naturais

iv) $x + y + z = 3 \Rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$ soluções naturais

v) $x + y + z = 4 \Rightarrow \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$ soluções naturais

Assim, no total temos $1 + 3 + 6 + 10 + 15 = 35$ soluções naturais.

2ª Solução:
Inicialmente podemos notar que, como estamos trabalhando somente com variáveis naturais, o sistema linear $x + y + z < 5$ é equivalente ao sistema $x + y + z \leq 4$.
Vamos agora definir uma nova variável f, chamada de *folga*, que é exatamente o que falta para $x + y + z$ ficar igual a 4, ou seja, $f = 4 - (x + y + z)$. Como o valor de $x + y + z$ vai desde 0 até 4, temos que o valor de f também vai desde 0 até 4, ou seja, f possui a mesma generalidade de x, y e z. Perceba também que, uma vez definidos os valores de x, y e z, com $x + y + z \leq 4$, temos diretamente o valor de f. Assim, podemos concluir que o número de soluções naturais de $x + y + z \leq 4$ é igual ao número de soluções naturais de $x + y + z + f = 4$. Portanto, $x + y + z < 5$ possui $\binom{4+4-1}{4-1} = 35$ soluções naturais.

6) De quantas maneiras podemos colocar r bolas vermelhas idênticas e w brancas idênticas em n caixas de modo que cada caixa contenha ao menos uma bola de cada cor?
Solução:
Vamos primeiro distribuir as r bolas vermelhas. Como as bolas vermelhas são idênticas, o que diferencia uma forma de distribuir de outra é a quantidade de bolas vermelhas em cada caixa. Por isso, definimos:
v_i = número de bolas vermelhas colocadas na caixa i, $1 \leq i \leq n$
Como cada caixa deve possuir pelo menos uma bola vermelha, temos que o número de maneiras de distribuir as r bolas vermelhas nas n caixas é igual ao número de soluções inteiras positivas do sistema linear $v_1 + v_2 + ... + v_n = r$, ou seja, existem $\binom{r-1}{n-1}$ maneiras de distribuir as bolas vermelhas.
Analogamente, calcular o número de maneiras de distribuir as w bolas brancas nas n caixas é equivalente a determinar a quantidade de soluções inteiras positivas do sistema $b_1 + b_2 + ... + b_n = w$, onde b_i, $1 \leq i \leq n$, é o número de bolas brancas na caixa i. Portanto, temos $\binom{w-1}{n-1}$ maneiras de distribuir as bolas brancas.
Como devemos distribuir as bolas vermelhas e as bolas brancas então, no total, temos $\binom{r-1}{n-1}.\binom{w-1}{n-1}$ maneiras de distribuir.

7) Quantos inteiros entre 1 e 1.000.000 inclusive possuem a soma de seus dígitos igual a 13?
Solução:

Como 1.000.000 é o único número da sequência que possui 7 dígitos e a soma dos seus dígitos não é igual a 13, podemos trabalhar com números de até 6 dígitos. Assim, podemos escrever que estamos procurando números da forma $(x_1x_2x_3x_4x_5x_6)_{10}$ de modo que $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 13$, onde $0 \leq x_i \leq 9$, $x_i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq 6$. Sabemos que a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 13$ possui $\binom{13+6-1}{6-1} = \binom{18}{5} = 8568$ soluções naturais. Entretanto, nem todas estas soluções satisfazem $0 \leq x_i \leq 9$, uma vez que $(12, 0, 0, 0, 0, 1)$ é uma solução natural de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 13$ e $x_1 = 12$ não é um dígito em base 10.

Vamos então descontar estas soluções em que algum x_i é maior que 9. Perceba que apenas um x_i será maior que 9, pois se tivéssemos dois termos x_i maiores que 9 a soma $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$ seria maior que 18. Inicialmente vamos escolher o termo x_i que será maior que 9, onde temos 6 possibilidades. Suponhamos, para efeito de análise, que $x_6 > 9$. Vamos separara a análise em casos:

i) $x_6 = 10$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3 \Rightarrow \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = 35$ soluções naturais.

ii) $x_6 = 11$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \Rightarrow \binom{2+5-1}{5-1} = \binom{6}{4} = 15$ soluções naturais.

iii) $x_6 = 12$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \Rightarrow \binom{1+5-1}{5-1} = \binom{5}{4} = 5$ soluções naturais.

iv) $x_6 = 13$: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \Rightarrow$ 1 solução natural.

Portanto, existem $8568 - 6 \times (35 + 15 + 5 + 1) = 8232$ números inteiros entre 1 e 1.000.000 inclusive que possuem a soma de seus dígitos igual a 13

8) (IME-03) Sejam A e B dois subconjuntos de IN. Por definição, uma função f: A $\rightarrow$ B é crescente se $a_1 > a_2 \Rightarrow f(a_1) \geq f(a_2)$, para quaisquer a_1 e $a_2 \in A$.

a) Para $A = \{1, 2\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, quantas funções de A para B são crescentes.

b) Para $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, ..., n\}$, quantas funções de A para B são crescentes, onde n é um número inteiro maior que zero?

Solução:

a) Sejam $a = f(1) - 1$, $b = f(2) - f(1)$ e $c = 4 - f(2)$.

Somando estas equações temos que $a + b + c = 3$, com $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$. Perceba agora que depois de escolhidos os valores de a, b e c os valores de f(1) e f(2) estão unicamente determinados. Em outras palavras, o número de funções f crescentes é igual ao número de solução naturais de $a + b + c = 3$. Fazendo $x = a + 1$, $y = b + 1$ e $z = c + 1$ temos que $x - 1 + y - 1 + z - 1 = 3 \Rightarrow$

$x + y + z = 6$, com $x \geq 1$, $y \geq 1$ e $z \geq 1$.

Escreva o último sistema da seguinte maneira: $x + y + z = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

Note que a quantidade de tais soluções é igual ao número de maneiras de colocar duas barras nos cinco espaços entre os 1's. Assim, existem $\binom{5}{2} = 10$ solução inteiras positivas para $x + y + z = 6$, fazendo com que existam 10 funções f crescentes.

b) Utilizando o mesmo raciocínio anterior, sejam:

$a = f(1) - 1$, $b = f(2) - f(1)$, $c = f(3) - f(2)$ e $d = n - f(3)$.

Somando, temos que $a + b + c + d = n - 1$, com $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ e $d \geq 0$. Fazendo $x = a + 1$, $y = b + 1$, $z = c + 1$ e $w = d + 1$ temos

$$x - 1 + y - 1 + z - 1 + w - 1 = n - 1 \Rightarrow x + y + z + w = n + 3,$$

onde x, y, z, $w \geq 1$. Para este sistema temos $\binom{n+2}{3}$ soluções inteiras positivas, ou seja, existem $\frac{(n+2)(n+1)n}{6}$ funções f crescentes.

Obs: Esta solução apresentada permite generalizar o problema proposto. Assim, se $A = \{1, 2, ..., m\}$ e $B = \{1, 2, ..., n\}$, pode-se provar que existem $\binom{n+m-1}{m}$ funções f crescentes de A para B.

9) (Índia-95) Mostre que o número de subconjuntos de 3 elementos $\{a, b, c\}$ de $\{1, 2, 3, ..., 63\}$ com $a + b + c < 95$ é menor do que o número com $a + b + c > 95$.

Solução:

Como $a \in X$, $b \in X$ e $c \in X$, com $X = \{1, 2, ..., 63\}$, segue que $1 \leq a \leq 63$, $1 \leq b \leq 63$ e $1 \leq c \leq 63$, ou seja, $1 \leq 64 - a \leq 63$, $1 \leq 64 - b \leq 63$ e $1 \leq 64 - c \leq 63$.

Fazendo $x = 64 - a$, $y = 64 - b$ e $z = 64 - c$, segue que:

$$95 < a + b + c = 64 - x + 64 - y + 64 - z \Rightarrow x + y + z < 97$$

Assim, o número de ternos ordenados (a, b, c), com $1 \leq a, b$ e $c \leq 63$, satisfazendo a inequação $a + b + c > 95$ é igual ao número de ternos ordenados (x, y, z), com $1 \leq x$, y e $z \leq 63$, tais que $x + y + z < 97$.

Perceba que cada solução de $a + b + c < 95$ geral várias soluções de $x + y + z < 97$. Se o terno (a, b, c) satisfaz $a + b + c < 95$, com $a, b, c < 62$, tem-se que os ternos $(a + 1, b + 1, c)$, $(a + 1, b, c + 1)$, $(a, b + 1, c + 1)$, $(a + 2, b, c)$, $(a, b + 2, c)$, $(a, b, c + 2)$ satisfazem $x + y + z < 97$. Mesmo que um dos valores de a, b ou c for igual a 63, é possível gerar mais de uma solução de $x + y + z < 97$ a partir de uma solução de $a + b + c < 95$: $(63, a + 1, b + 1)$, $(63, b + 2, c)$ e $(63, b, c + 2)$. Se um dos valores de a, b ou c for igual a 62, também é possível gerar mais de uma solução de $x + y + z < 97$ a partir de uma solução de $a + b + c < 95$: $(62, b + 1, c + 1)$, $(62, b + 2, c)$, $(62, b, c + 2)$, $(63, b + 1, c)$ e $(63, b, c + 1)$.

Assim, fica demonstrado que o número de soluções de $a + b + c < 95$ é menor do que o número com $a + b + c > 95$.

5.14. PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO

No capítulo 1, quando enunciamos o princípio da adição, colocamos que se uma decisão d_1 pode ser tomada de n_1 maneiras, a decisão d_2 poder ser tomada de n_2 maneiras e as decisões são independentes, então o número de maneiras de se tomarem as decisões d_1 ou d_2 é $n_1 + n_2$. Em linguagem de conjuntos, se $A \cap B = \varnothing$, então $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Mas o que ocorre se $A \cap B \neq \varnothing$? Uma situação prática, dentro da análise combinatória, seria, por exemplo, calcular o número de permutações de AABB em que letras iguais não fiquem consecutivas. Uma ideia seria calcular o total de permutações, sem restrições, de AABB e depois subtrair os anagramas em que as letras A estão juntas ou as letras B estão juntas. Contudo, surge um problema nessa forma de contagem. Quando se contabiliza os anagramas em que as letras A estão juntas, em algumas delas as letras B também estão juntas e vice versa. Como resolver esse impasse? Usando uma formulazinha lá da teoria dos conjuntos. Como dentro de $n(A)$ o valor de $n(A \cap B)$ é contado uma vez e dentro de $n(B)$ o valor de $n(A \cap B)$ é contado novamente uma vez, então o número $n(A) + n(B)$ possui contado duas vezes o valor de $n(A \cap B)$. Como devemos contar apenas uma vez o valor de $n(A \cap B)$, então podemos afirmar que, se $A \cap B \neq \varnothing$:

$$\mathbf{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).}$$

Para três conjuntos podemos fazer o seguinte:

$n(A \cup B \cup C) = n((A \cup B) \cup C) = n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \Rightarrow$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - (n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)) \Rightarrow$

$$\mathbf{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Seguindo com esse raciocínio, para quatro conjuntos tem-se:

$$\mathbf{n(A \cup B \cup C \cup D) = n(A) + n(B) + n(C) + n(D) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(A \cap D) - n(B \cap C) - n(B \cap D) - n(C \cap D) + n(A \cap B \cap C) + n(A \cap B \cap D) + n(A \cap C \cap D) + n(B \cap C \cap D) - n(A \cap B \cap C \cap D)}$$

Vamos agora generalizar esta ideia. Para $1 \leq k \leq n$, definimos $I_{n,k} = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n} n(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})$. Vamos provar, por indução finita, que:

$$n(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n,k}.$$

O caso em que n = 1 é trivial e para n = 2 e n = 3 já foi demonstrado. Vamos assumir que a fórmula seja válida para um determinado valor de n. Então:

$$(A_1 \cup ... \cup A_{n+1}) = n(A_1 \cup ... \cup A_n) + n(A_{n+1}) - n((A_1 \cup ... \cup A_n) \cap A_{n+1}) =$$

$$= n(A_1 \cup ... \cup A_n) + n(A_{n+1}) - n((A_1 \cap A_{n+1}) \cup ... \cup (A_n \cap A_{n+1})) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n,k} + n(A_{n+1}) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\sum_{1 \le i_1 < ... < i_k \le n} n(A_{i_1} \cap ... \cap A_{n+1}) \right] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n+1,k}$$

Assim, por indução, segue que a fórmula $n(A_1 \cup ... \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} I_{n,k}$ é válida.

Exercícios Resolvidos

1) Seja S = {1, 2, ..., 500}. Determine o número de inteiros em S que são divisíveis por 2, 3 ou 5.

Solução:

Sejam: A_2 = subconjunto de S cujos elementos são divisíveis por 2; A_3 = subconjunto de S cujos elementos são divisíveis por 3; A_5 = subconjunto de S cujos elementos são divisíveis por 5.

Inicialmente, podemos notar que a quantidade de números entre 1 e n, inclusive, que são divisíveis por k é igual à parte inteira do número $\frac{n}{k}$. Assim:

i) Como 500/2 = 250, então de 1 a 500 existem 250 números divisíveis por 2.
ii) Como 500/3 = 166,66..., então de 1 a 500 existem 166 números divisíveis por 3.
iii) Como 500/5 = 100, então de 1 a 500 existem 100 números divisíveis por 5.
iv) Como 500/6 = 83,33..., então de 1 a 500 existem 83 números divisíveis por 6.
v) Como 500/10 = 50, então de 1 a 500 existem 50 números divisíveis por 10.
vi) Como 500/15 = 33,33..., então de 1 a 500 existem 33 números divisíveis por 15.
vii) Como 500/30 = 16,66..., então de 1 a 500 existem 16 números divisíveis por 30.

Pelo princípio da Inclusão-Exclusão:

$n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = n(A_2) + n(A_3) + n(A_5) - n(A_2 \cap A_3) - n(A_2 \cap A_5) - n(A_3 \cap A_5) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_5) \Rightarrow$

$n(A_2 \cup A_3 \cup A_5) = 250 + 166 + 100 - 83 - 50 - 33 + 16 = 366.$

2) Quantos números de n algarismos ($n \ge 3$) podemos formar com os algarismos 1, 2 ou 3, de modo que em cada número figure cada um desses 3 algarismos pelo menos uma vez?

Solução:

Sejam:

A = conjunto de todos os números sem restrição;

A_1 = conjunto dos números nos quais não figura o algarismo 1;
A_2 = conjunto dos números nos quais não figura o algarismo 2;
A_3 = conjunto dos números nos quais não figura o algarismo 3.
Pelo princípio da Inclusão-Exclusão:
$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \Rightarrow$
$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 2^n + 2^n + 2^n - 1 - 1 - 1 + 0 = 3.2^n - 3$
Pelo método indireto da contagem o valor pedido é igual a:
$N = n(A) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3^n - 3.2^n + 3$

3) De quantas maneiras podem sentar em uma fila 3 ingleses, 3 franceses e 3 belgas de modo que não haja 3 compatriotas juntos?
Solução:
Sejam:
A = conjunto das permutações das 9 pessoas sem restrições;
A_1 = conjunto das permutações das 9 pessoas com os 3 ingleses juntos;
A_2 = conjunto das permutações das 9 pessoas com os 3 franceses juntos;
A_3 = conjunto das permutações das 9 pessoas com os 3 belgas juntos.
Pelo princípio da Inclusão-Exclusão:
$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_1 \cap A_2) - n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \Rightarrow$
$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 3!.7! + 3!.7! + 3!.7! - 5!.(3!)^2 - 5!.(3!)^2 - 5!.(3!)^2 + (3!)^4 = 79056$
Pelo método indireto da contagem o valor pedido é igual a:
$N = n(A) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 9! - 79056 = 283824$

4) Calcular o número de permutações das 8 letras A A B B C C D D, onde duas letras iguais não sejam adjacentes.
Solução:
Sejam:
A = conjunto das permutações das 8 letras A A B B C C D D sem restrições;
A_1 = conjunto das permutações que têm as duas letras A juntas;
A_2 = conjunto das permutações que têm as duas letras B juntas;
A_3 = conjunto das permutações que têm as duas letras C juntas;
A_4 = conjunto das permutações que têm as duas letras D juntas;
Pelo princípio da Inclusão-Exclusão:
$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) =$

$$= \sum_{i=1}^{4} n(A_i) - \sum_{1 \le i < j}^{4} n(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k}^{4} n(A_i \cap A_j \cap A_k) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$$

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4.\frac{7!}{2!.2!.2!} - 6.\frac{6!}{2!.2!} + 4.\frac{5!}{2!} - 4! = 1656$$

Pelo método indireto da contagem o valor pedido é igual a:

$$N = n(A) - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \frac{8!}{2!.2!.2!.2!} - 1656 = 864.$$

5) (IME-20) Os modelos de placas de identificação de automóveis adotadas no Brasil estão sendo atualizados. Atualmente, o modelo antigo ABC1234 (três letras seguidas de quatro algarismos) está sendo gradativamente substituído pelo modelo novo ABC1D23 (três letras seguidas de um algarismo, uma letra e dois algarismos).

Placas de modelos distintos podem apresentar sequências de caracteres alfanuméricos iguais. Por exemplo, a sequência de caracteres "20" aparece nas combinações IME2020 e BRA5P20, enquanto a sequência "A12" aparece nas combinações BRA1234 e IME4A12.

Considere a placa do modelo antigo IME2019. Seja P o conjunto de placas do modelo novo que podem ser formadas com alguma sequência de três caracteres em comum com a placa IME2019. Determine o número de elementos de P.

Por exemplo, IME4A12 e BRA5E20 pertencem ao conjunto P. IMP5E19 não pertence ao conjunto P.

Obs: considere o alfabeto com 26 letras.

Solução:

Sequências de 3 caracteres consecutivos de IME2019:

IME, ME2, E20, 201, 019

Destas, apenas IME, ME2 e E20 podem também ser sequências de 3 caracteres consecutivos do novo modelo.

Considere os seguintes conjuntos:

A → placas que iniciam com IME

B → placas cujas 2ª, 3ª e 4ª posições são ME2

C → placas que terminam com E20

Assim:

A: IME _ _ _ _: $10 \times 26 \times 10 \times 10 = 26000$

B: _ ME2 _ _ _: $26 \times 26 \times 10 \times 10 = 67600$

C: _ _ _ _ E20: $26 \times 26 \times 26 \times 10 = 175760$

$A \cap B$: IME2 _ _ _: $26 \times 10 \times 10 = 2600$

$A \cap C$: IME_E20: 10

$B \cap C$: _ ME2E20: 26

$A \cap B \cap C$: IME2E20: 1

Pelo princípio da inclusão-exclusão:

$N = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) =$

$= 26000 + 67600 + 175760 - 2600 - 10 - 26 + 1 = 266725$

5.15. PERMUTAÇÕES CAÓTICAS (DESARRANJOS)

Permutação caótica ou desarranjo de um conjunto é uma permutação no qual nenhum elemento do conjunto ocupa a mesma posição que ocupava inicialmente. Por exemplo, uma permutação caótica da palavra ESCOLA é o anagrama SEACOL.

Vamos agora determinar a expressão que fornece a quantidade de permutações caóticas de um conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ de n elementos distintos. A melhor forma de determinar a quantidade de permutações caóticas é usar o método indireto, ou seja, calcular exatamente o contrário de uma permutação caótica, que é o número de permutações em que pelo menos um elemento ocupa a posição original. Para $1 \le i \le n$, sabemos que a quantidade de permutações em que k elementos de A ocupam a mesma posição que ocupavam inicialmente é igual a $I_{n,k} = \binom{n}{k}(n-k)!$. Observe que, na verdade, o valor de $I_{n,k}$ fornece o número de permutações dos elementos de A em que ***pelo menos*** k elementos ocupam a mesma posição que ocupavam inicialmente, uma vez que, para obter o valor de $I_{n,k}$, fixamos k elementos de A na sua posição inicial e depois permutamos os demais n – k elementos. Nesta permutação dos n – k demais elementos de A, teremos eventualmente casos em que um elemento ocupa a posição inicial. Desta maneira, para calcular a quantidade de permutações caóticas de A, devemos utilizar o princípio da inclusão-exclusão:

$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}(n-k)! = n! - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{n!}{k!} = n! - n!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!} = n!\left(1 - \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right) \Rightarrow$$

$$D_n = n!\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!} \quad \text{ou} \quad D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$$

Observações:

(1) Note que as duas primeiras parcelas da expressão da permutação caótica, $\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$, sempre se cancelam. A presença delas na fórmula é apenas para facilitar sua memorização.

(2) Esta fórmula vale apenas quando todos os elementos são distintos.

(3) A fórmula demonstrada somente é válida quando todos os distintos elementos não podem ocupar a posição original. Se apenas alguns determinados elementos não podem ocupara a posição original, não há fórmula fechada e é necessário calcular usando o princípio da inclusão-exclusão.

(4) Não existe fórmula quando alguns elementos são idênticos, sendo necessário analisar caso a caso, utilizando o princípio da inclusão-exclusão. Em alguns casos extremos a resposta é zero, por exemplo na quantidade de anagramas da palavra ALANA que não ocupam a posição original.

Exercícios Resolvidos

1) (Escola Naval-86) Determine o número de anagramas da palavra ESCOLA de modo que nenhuma letra ocupe o seu lugar primitivo.

Solução:

O que está se pedindo nesta questão é o número de permutações caóticas de 6 elementos. Assim, há $D_6 = 6!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right) = 265$ possibilidades.

2) Suponha que o número de elementos do conjunto A é n.

a) Quantas são as funções f: A→A para as quais a equação f(x) = x não possui solução?

b) Quantas são as funções f: A→A bijetoras para as quais a equação f(x) = x não possui solução?

Solução:

a) Como a única restrição para a escolha de $f(a_1)$ é $f(a_1) \neq a_1$, então temos n – 1 possibilidades para a sua escolha. Analogamente, como $f(a_2) \neq a_2$, temos n – 1 possibilidades para a sua escolha. Este raciocínio segue até a escolha de $f(a_n)$, onde temos também n – 1 possibilidades. Assim, existem $(n-1)^n$ funções.

b) Como as funções devem ser bijetoras, então cada função é igual a uma permutação caótica do conjunto A.

Assim, temos $D_n = n!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\right)$ funções.

3) Quantas são as permutações de (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7) que têm exatamente 3 elementos no seu lugar primitivo?

Solução:

Inicialmente vamos escolher os 3 elementos que vão ocupar o seu lugar primitivo. Como temos 7 elementos no total, para tanto existem $C_{7,3} = 35$ possibilidades. Depois disto, temos que permutar caoticamente os demais 4 elementos, fato que pode ser feito de $D_4 = 4!\left(\frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\right) = 9$ possibilidades.

Assim, no total, temos $35 \times 9 = 315$ permutações.

5.16. LEMAS DE KAPLANSKY

5.16.1. 1º Lema de Kaplansky

De quantas maneiras podemos formar um subconjunto de 3 elementos a partir do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} no qual não existam números consecutivos? Enumerando encontramos 4 possibilidades: {1, 3, 5}, {1, 3, 6}, {1, 4, 6} e {2, 4, 6}. Vamos agora organizar duas demonstrações para contagem do número de subconjuntos sem precisar enumerá-los exaustivamente.

1ª Demonstração:

Sejam:

x = quantidade de números antes do 1º escolhido;

y = quantidade de números entre o 1º e o 2º escolhido;

z = quantidade de números entre o 2º e o 3º escolhido;

w = quantidade de números depois do 3º escolhido.

Observe que a soma destas variáveis é igual à quantidade de números não escolhidos. Assim, temos que:

$$x + y + z + w = 3 \quad (1)$$

Como não podemos ter números consecutivos, temos as seguintes restrições entre as variáveis:

$$x \geq 0, y \geq 1, z \geq 1 \text{ e } w \geq 0 \quad (2)$$

Perceba também que para cada solução natural de (1) respeitando às restrições (2) equivale a um subconjunto distinto de 3 elementos sem número consecutivos. Assim, o número de soluções de (1) é igual à quantidade de subconjuntos. Vamos agora fazer troca de variáveis para que todas as restrições sejam ≥ 1. Assim, sendo a = x + 1 e b = w + 1, teremos: $a - 1 + y + z + b - 1 = 3 \Rightarrow a + y + z + b = 5$.

Deste modo, como o número de soluções inteiras positivas da equação anterior é $\binom{5-1}{4-1} = \binom{4}{3} = 4$, então existem 4 maneiras de formar um subconjunto de 3 elementos a partir do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6} no qual não existam números consecutivos.

Vamos agora generalizar este procedimento. Suponhamos que desejamos determinar de quantas maneiras podemos formar subconjuntos de p elementos a partir de {1, 2, 3, ..., n} de modo que nestes subconjuntos não existam números consecutivos. Sejam:

a_1 = quantidade de números antes do 1º escolhido;

a_2 = quantidade de números entre o 1º e o 2º escolhido;

a_3 = quantidade de números entre o 2º e o 3º escolhido;

...

a_p = quantidade de números entre o $(p-1)^o$ e o p^o escolhido;

a_{p+1} = quantidade de números depois do p° escolhido.

Obviamente temos que $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_p + a_{p+1} = n - p$, onde $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 1$, $a_3 \geq 1$, ..., $a_p \geq 1$, $a_{p+1} \geq 0$. Fazendo $x = a_1 + 1$ e $y = a_{p+1} + 1$, temos que:

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_p + a_{p+1} = n - p \Rightarrow$$
$$x - 1 + a_2 + a_3 + ... + a_p + y - 1 = n - p \Rightarrow$$
$$x + a_2 + a_3 + ... + a_p + y = n - p + 2$$

Sabemos que o número de soluções inteiras positivas de

$$x + a_2 + a_3 + ... + a_p + y = n - p + 2$$

é igual a $\binom{n-p+2-1}{p+1-1} = \binom{n-p+1}{p}$. Como cada solução deste sistema equivale a um subconjunto distinto (e vice-versa), então podemos afirmar que o número de maneiras em que podemos formar subconjuntos de p elementos a partir de {1, 2, 3, ..., n} de modo que nestes subconjuntos não existam número consecutivos é igual a

$$F(n,p) = \binom{n-p+1}{p}.$$

2ª Demonstração:

Se p elementos serão escolhidos então n – p não serão escolhidos. Suponha que os n – p não escolhidos sejam designados por a_1, a_2, ..., a_{n-p}. Coloquemos estes n – p elemento em sequência, separados por um traço __, onde pode ficar um elemento escolhido:

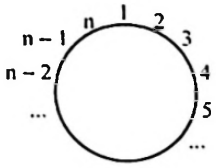
$$__\ a_1\ __\ a_2\ __\ a_3\ __\ a_4\ __ ...\ __\ a_{n-p-1}\ __\ a_{n-p}\ __$$

De modo que os p elementos escolhidos não fiquem consecutivos, basta colocá-los nos espaços vazios designados pelos traços __. Espaços que não fiquem com elementos escolhidos devem ser eliminados. Assim, para escolher os p elementos de forma não consecutiva, basta escolher p espaços vazios dentre os n – p + 1 disponíveis. Nestes espaços serão escritos os elementos escolhidos. Assim, o número de maneiras em que podemos formar subconjuntos de p elementos a partir de {1, 2, 3, ..., n} de modo que nestes subconjuntos não existam número consecutivos é igual a

$$F(n,p) = \binom{n-p+1}{p}.$$

5.16.2. 2º Lema de Kaplansky

Suponhamos agora que os elementos do conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ estejam dispostos ao longo de um círculo, como indica a figura abaixo:



De quantas maneiras podemos formar um subconjunto com p elementos, a partir do conjunto A = {1, 2, ..., n}, cujos elementos estão distribuídos ao longo de um círculo, de modo que dois elementos do subconjunto não sejam números consecutivos? Note que, ao contrário do que ocorre na situação do 1º Lema de Kaplansky, agora os números 1 e n são consecutivos. Vamos separar a contagem em dois casos:

i) Subconjuntos em que figura o número 1:

Como os números 2 e n são consecutivos ao número 1, então devemos escolher p – 1 elementos (com nenhum par de números consecutivos) do conjunto {3, 4, ..., n – 1}. Para tanto podemos aplicar o 1º Lema de Kaplansky, fazendo $n \to n-3$ e $p \to p-1$. Portanto, o número de subconjuntos em que figura o elemento 1 é igual a

$$F(n-3,p-1)=\binom{(n-3)-(p-1)+1}{p-1}=\binom{n-p-1}{p-1}.$$

ii) Subconjuntos em que não figura o número 1:

Para formar o subconjunto devemos escolher p elementos de {2, 3, ..., n} sem elementos consecutivos. Para tanto temos $F(n-1,p)=\binom{(n-1)-p+1}{p}=\binom{n-p}{p}$ possibilidades.

Desde que os subconjuntos podem ser divididos entre os que o número 1 figura ou os que o número 1 não figura, então o total é igual a:

$$G(n,p)=\binom{n-p-1}{p-1}+\binom{n-p}{p}=\frac{(n-p-1)!}{(p-1)!(n-2p)!}+\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!}=\frac{(n-p-1)!p+(n-p)!}{p!(n-2p)!} \Rightarrow$$

$$G(n,p)=(n-p-1)!\frac{p+(n-p)}{p!(n-2p)!}=n\frac{(n-p-1)!}{p!(n-p)!}=\frac{n}{n-p}.\frac{(n-p)!}{p!(n-2p)!} \Rightarrow$$

$$\boxed{G(n,p)=\frac{n}{n-p}\binom{n-p}{p}.}$$

Exercícios Resolvidos

1) (IME-85) Um exame vestibular se constituiu de 10 provas distintas, 3 das quais da área de Matemática. Determine de quantas formas é possível programar a sequência das 10 provas, de maneira que duas da área de Matemática não se sucedam.
Solução:

Inicialmente, deve-se escolher os dias das provas de matemática: $\binom{10-3+1}{3-1}=\binom{8}{2}$.

Como as provas são todas distintas, deve-se permutar as provas de matemática (nos 3 locais já escolhidos) e as demais provas (nos 7 locais restantes). Logo, a quantidade total de maneiras de programar as provas é: $\binom{8}{2}.3!.7!$

2) (Olimpíada da Bulgária-80) Em uma loteria 6 números são escolhidos do conjunto {1, 2, ..., 49}. De quantas maneiras isto pode ser feito de modo que no subconjunto escolhido exista ao menos um par de números consecutivos?
Solução:

Vamos usar o método indireto de contagem. O número de maneiras de escolher, sem restrições, 6 diferentes números entre os números {1, 2, ..., 49} é igual a $\binom{49}{6}$. O número de maneiras de escolher 6 diferentes números, com nenhum par de números consecutivos, entre os números {1, 2, ..., 49}, é igual a $\binom{49-6+1}{6}=\binom{44}{6}$. Portanto, pelo método indireto de contagem, o número de formas na qual 6 diferentes números podem ser escolhidos entre os primeiros 49 inteiros positivos de tal forma que dois deles são consecutivos é igual a $\binom{49}{6}-\binom{44}{6}$.

3) 5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?
Solução:

Inicialmente temos que escolher 5 dentre 15 cadeiras ao longo de um círculo sendo que duas cadeiras não podem ser adjacentes. Pelo 2º Lema de Kaplansky temos $G(15,5)=\frac{15}{15-5}\binom{15-5}{5}=\frac{15}{10}\binom{10}{5}=378$. Depois disto falta permutar as 5 pessoas nas cadeiras escolhidas. Assim, temos no total 378.5! = 45360 maneiras de distribuir as pessoas nas cadeiras.

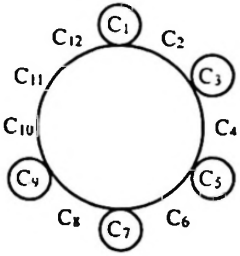
4) (IME-86) 12 cavaleiros estão sentados em torno de uma mesa redonda. Cada um dos 12 cavaleiros considera seus dois vizinhos como rivais. Deseja-se formar um grupo de cinco cavaleiros para libertar uma princesa. Nesse grupo não poderá haver cavaleiros rivais. Determine de quantas maneiras é possível escolher esse grupo.

1ª Solução:

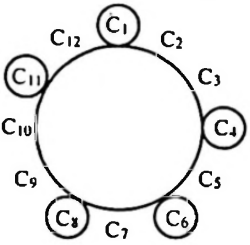
Temos que escolher 5 dentre 12 cadeiras que estão ao longo de um círculo sendo que duas não podem ser adjacentes. Pelo segundo Lema de Kaplansky existem $G(12,5) = \frac{12}{12-5}\binom{12-5}{5} = \frac{12}{7}\binom{7}{5} = 36$ possibilidades.

2ª Solução:

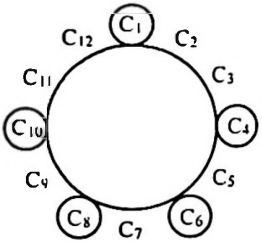
Devido a esta questão ter sido aplicada em um vestibular cuja banca corretora possui fama de ser bastante rigorosa, talvez a solução anterior, que é uma simples aplicação de fórmula, não valesse todos os pontos atribuídos a uma solução completa da questão. Vamos proceder de forma diferente, analisando como podemos construir as escolhas dos cavaleiros. Observe que todas as formas de selecionar os cavaleiros podem ser obtidas por rotação a partir das três seleções de cavaleiros abaixo.



Situação 1



Situação 2



Situação 3

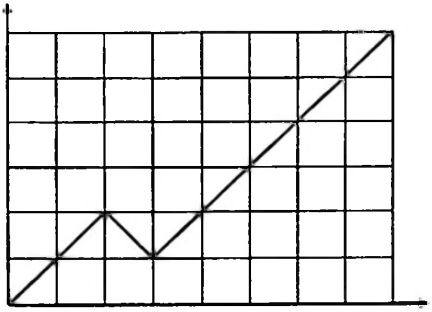
Como podemos girar cada uma das 3 situações acima 12 vezes até voltar à situação inicial, então temos 3.12 = 36 maneiras de escolher os cavaleiros.

5.17. PRINCÍPIO DA REFLEXÃO

O Princípio da Reflexão consiste em um recurso geométrico muito útil para resolver questões de contagem que envolvam restrições do tipo "a sequência de resultados deve (ou não deve) atingir um especificado valor máximo (ou mínimo)". A situação problema típica é encontrar a quantidade de caminhos poligonais saindo da origem do sistema cartesiano (0, 0) e chegar ao ponto de coordenadas (a, b), de acordo com as seguintes restrições:

(i) a e b são inteiros positivos de mesma paridade;
(ii) a trajetória é composta por segmentos de reta que ligam o ponto (x, y) ao ponto (x + 1, y – 1) ou ao ponto (x + 1, y + 1);
(iii) a trajetória nunca intersecta a reta y = c, com c inteiro, c > b.

Inicialmente, vamos resolver um problema mais simples, de determinar de quantas maneiras podemos ir do ponto (0, 0) ao ponto (a, b), com cada movimento indo do ponto (x, y) ao ponto (x + 1, y – 1) ou ao ponto (x + 1, y + 1), eliminando a restrição de não intersectar uma reta da forma y = c. Ilustrando um desses trajetos possíveis, para o caso numérico a = 6 e b = 8, temos:



Note que os movimentos permitidos são de subida "S" ou de descida "D" de forma que:

$$S: (x, y) \rightarrow (x + 1; y + 1)$$
$$D: (x, y) \rightarrow (x + 1; y - 1).$$

Para a nossa situação problema numérica, o trajeto descrito na figura equivale à sequência SSDSSSSS. Assim, para que a partícula percorra de (0, 0) à (a, b) devemos ter:

$$S + D = a \quad (1),$$

pois em cada movimento de subida ou de descida, a abscissa da partícula avança uma unidade e, portanto, ela deve percorrer um total de a unidades em relação ao eixo das abscissas.

Por outro lado, em relação ao eixo das ordenadas, cada movimento de subida ou de descida, a ordenada aumenta ou diminui uma unidade, respectivamente. Desta forma, segue diretamente que

$$S - D = b \quad (2).$$

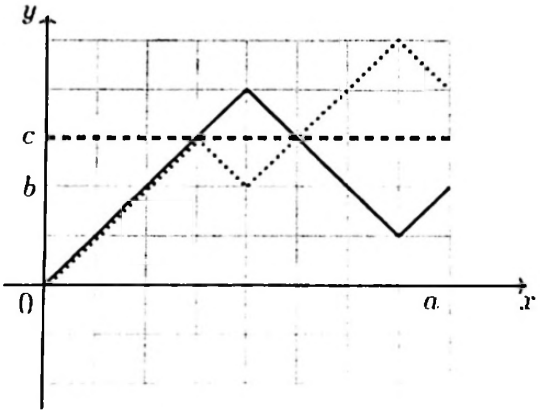
Resolvendo o sistema formado pelas equações (1) e (2) encontramos $S = \frac{a+b}{2}$ e $D = \frac{a-b}{2}$. Repare que realmente é necessário que a e b tenham a mesma paridade para que o problema seja possível.

Como a trajetória é uma sequência de $\frac{a+b}{2}$ letras S e $\frac{a-b}{2}$ letras D, aplicando permutação com repetição, o número de trajetos distintos possíveis será igual a

$$P_a^{\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}} = \frac{a!}{\left(\frac{a+b}{2}\right)! \times \left(\frac{a-b}{2}\right)!}.$$

Vamos calcular agora o número de trajetórias iniciando em (0, 0), terminando em (a, b) e que tocam a reta y = c. A resposta para o nosso problema original será o total $T_{a,b}$ menos os casos em que as trajetórias tocam a reta y = c.

Dada uma trajetória que toca a reta y = c, façamos uma reflexão em torno da reta y = c a partir da primeira vez que a trajetória toca esta altura. Veja um exemplo na figura seguinte.



Repare que a trajetória refletida vai terminar em uma outra altura, que pode ser determinada da seguinte forma:

$$h = c + (c - b) = 2c - b.$$

Desde que a reflexão em torno de uma reta por ser considerada uma bijeção, basta determinar a quantidade de trajetórias refletidas. Observando a figura, conclui-se que o número de trajetórias refletidas é exatamente igual ao número de trajetórias que iniciam em (0, 0) e terminam em (a, 2c – b). Pela fórmula, obtida anteriormente, isso vale

$$P_a^{\frac{a+2c-b}{2},\frac{a-2c+b}{2}} = \frac{a!}{\left(\frac{a+2c-b}{2}\right)! \times \left(\frac{a-2c+b}{2}\right)!}.$$

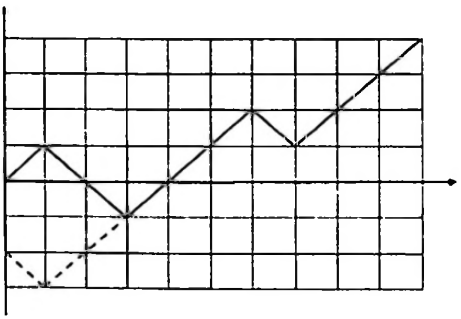
Deste modo, pelo método indireto da contagem, o número de caminhos indo de (0, 0) até (a, b) e que não tocam a reta y = c vale:

$$P_a^{\frac{a+b}{2},\frac{a-b}{2}} - P_a^{\frac{a+2c-b}{2},\frac{a-2c+b}{2}} = \frac{a!}{\left(\frac{a+b}{2}\right)! \times \left(\frac{a-b}{2}\right)!} - \frac{a!}{\left(\frac{a+2c-b}{2}\right)! \times \left(\frac{a-2c+b}{2}\right)!}$$

Exercícios Resolvidos

1) Numa fila de cinema, por exemplo, se m pessoas tem notas de R$ 5 e n pessoas tem notas de R$ 10. Sabe-se que n < m e que a entrada custa R$ 5, quantas são as filas que terão problemas de troco se a bilheteria começar a trabalhar sem troco?

Solução:



Observe o gráfico cartesiano ao lado, onde o eixo vertical representa a quantidade de notas de R$ 5 no caixa da bilheteria e no eixo horizontal a quantidade de pessoas atendidas. A representação gráfica das filas são os caminhos de (0, 0) até (m + n, m – n). As filas que apresentam problemas de troco são as que tocam a reta y = – 1. Refletindo na reta y = – 1 o trecho desde (0, 0) até o primeiro toque na reta y = – 1, os gráficos obtidos correspondem aos caminhos desde (0, – 2) até (m + n, m – n). Tais caminhos são formados por subidas e descidas de modo que:

$$S + D = m + n \text{ e } S - D = m - n + 2,$$

que resulta em $S = m + 1$ e $D = n - 1$.

Para cada um desses caminhos, se deve permutar as pessoas nos respectivos lugares de R$ 5 e R$ 10. Logo, o total de filas que terão problemas de troco se a bilheteria começar a trabalhar sem troco é igual a:

$$m!n!P_{S-D}^{S,D} = m!n!\frac{(S+D)!}{S!D!} = \frac{n(m+n)!}{m+1}.$$

2) Se numa eleição com dois candidatos A e B, há vinte eleitores e o candidato A recebe quinze votos favoráveis enquanto o candidato B recebe cinco votos, quantas são as formas possíveis de desenvolver a apuração de modo que o candidato A permaneça sempre em vantagem (nem sequer empata) desde o primeiro voto apurado?

Solução:

Neste caso, o eixo y deve representar a diferença de votos entre os candidatos A e B e o eixo horizontal deve representar a quantidade de votos apurados. Cada apuração dos votos equivale a um gráfico de vai de (0, 0) até (20, 10). Estamos interessados nos gráficos que iniciam com uma subida de (0, 0) para (1, 1) e depois não tocam a reta $y = 0$ até chegar em (20, 10). Se (1, 1) até (20, 10) tem-se:

$$S + D = 19 \text{ e } S - D = 9 \Rightarrow S = 14 \text{ e } D = 5$$

Iniciando em (1, 1), uma reflexão na reta $y = 0$ corresponde a descer duas unidades na vertical, ou seja:

$$S + D = 19 \text{ e } S - D = 11 \Rightarrow S = 15 \text{ e } D = 4$$

Consequentemente, o número de caminhos de ir de (1, 1) até (20, 10) sem tocar a reta $y = 0$ é:

$$P_{19}^{14,5} - P_{19}^{15,4} = \frac{19!}{14!5!} - \frac{19!}{15!4!} = 11628 - 3876 = 7752$$

5.18. NÚMEROS DE STIRLING

Com uma similaridade grande aos coeficientes binomiais, os Números de Stirling são de dois tipos, os de primeira espécie $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ e os de segunda espécie $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$.

Iniciaremos a abordagem com os Números de Stirling de segunda espécie, de mais fácil entendimento.

5.18.1. Números de Stirling de Segunda Espécie

Sejam n; k ∈ IN, com n ≥ k ≥ 1. O símbolo $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ é igual ao número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia. Por exemplo, suponha que se deseja distribuir 4 elementos (ABCD) distintos em 2 caixas idênticas. Analisando todas as possibilidades:

$$\{A\}\cup\{BCD\},\ \{B\}\cup\{ACD\},\ \{C\}\cup\{ABD\},\ \{D\}\cup\{ABC\},\ \{AB\}\cup\{CD\},$$
$$\{AC\}\cup\{BD\},\ \{AD\}\cup\{BC\}$$

Logo, se conclui que $\begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \end{Bmatrix} = 7$.

5.18.1.2. Teorema: $\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix} = 1$, $\begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix} = 1$, $\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$ e $\begin{Bmatrix} n \\ 2 \end{Bmatrix} = 2^{n-1} - 1$.

Demonstração:

$\begin{Bmatrix} n \\ 1 \end{Bmatrix}$ equivale a distribuir todos os n objetos distintos em uma única caixa, onde segue diretamente que existe apenas uma maneira de distribuir.

$\begin{Bmatrix} n \\ n \end{Bmatrix}$ equivale a distribuir todos os n objetos distintos em n caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia, implicando que há apenas uma maneira, que é colocar um objeto em cada caixa.

$\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix}$ é igual ao número de formas de colocar n objetos distintos em n – 1 caixas iguais, onde basta indicar quais são os dois objetos que ficarão na mesma caixa (os demais vão cada um pra uma caixa diferente), ou seja: $\begin{Bmatrix} n \\ n-1 \end{Bmatrix} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

$\left\{ {n \atop 2} \right\}$ é o número de maneiras de distribuir n objetos distintos em duas caixas idênticas. Como as caixas são iguais, podemos fazer o cálculo supondo serem distintas e depois dividir o resultado por 2. Deste modo, existem duas possibilidades para cada um dos n objetos, onde deve-se subtrair duas possibilidades não permitidas, que são todos os objetos ficarem na mesma caixa: $\left\{ {n \atop 2} \right\} = \frac{2^n - 2}{2} = 2^{n-1} - 1$.

5.18.1.3. Teorema: Para os naturais $1 < k \leq n$ e $n \geq 2$, vale $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k.\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$

Demonstração:

Dos n objetos, tome um deles, que chamaremos de objeto 1, para análise. Há duas possibilidades para a caixa onde está o objeto 1:

i) o objeto 1 está sozinho em uma das caixas: faltam distribuir os $n - 1$ objetos restantes em $k - 1$ caixas, ou seja, neste caso, existem $\left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$ possibilidades.

ii) o objeto 1 está numa caixa junto com outros objetos: inicialmente distribua $n - 1$ objetos nas k caixas e depois escolha uma das caixas para inserir o objeto 1 (perceba que as caixas agora são diferentes entre si pois estão com objetos distintos). Assim, existem $k.\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$ possibilidades para este caso.

Como ocorre o caso i ou o ii, segue que $\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k.\left\{ {n-1 \atop k} \right\}$.

Esse resultado permite calcular todos os números de Stirling de 2ª espécie. Por exemplo, para calcular $\left\{ {5 \atop 3} \right\}$ basta fazer:

$$\left\{ {5 \atop 3} \right\} = \left\{ {4 \atop 2} \right\} + 3.\left\{ {4 \atop 3} \right\} = 2^{4-1} - 1 + 3.\frac{4(4-1)}{2} = 7 + 18 = 25.$$

5.18.1.4. Teorema: O número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas diferentes, com nenhuma caixa vazia é igual ao número de funções sobrejetoras $f: A \to B$, onde $A = \{a_1, ..., a_n\}$ e $B = \{b_1, ..., b_k\}$.

Demonstração:

Numere os objetos de 1 à n e as caixas de 1 à k. Como $n(A) = n$ e $n(B) = k$, é possível associar cada objeto à caixa onde ele vai ser colocado através da função f, de modo que $f(a_i) = b_j$ significa que o objeto i será colocado na caixa j. Como f é sobrejetora,

segue que nenhuma caixa ficará vazia. Assim, o número de funções f sobrejetoras é igual ao número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas diferentes.

5.18.1.5. Teorema: Para os naturais $n \geq k$, o número de funções sobrejetoras $f: A \to B$, onde $A = \{a_1, ..., a_n\}$ e $B = \{b_1, ..., b_k\}$ é igual a

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

Demonstração:

Primeiro vamos calcular a quantidade de funções não sobrejetoras e depois subtrair o total de funções (sem restrições) deste valor. Se I(f) é a imagem da função f, considere os seguintes conjuntos:

B_1: funções em que $b_1 \notin I(f)$

B_2: funções em que $b_2 \notin I(f)$

...

B_k: funções em que $b_k \notin I(f)$

Assim, o número de funções $f: A \to B$ não sobrejetoras vale:

$$n(B_1 \cup B_2 ... \cup B_k) = \sum_{i=0}^{k} n(B_i) - \sum_{1 \leq i < j} n(B_i \cap B_j) + \sum_{1 \leq i < j < r} n(B_i \cap B_j \cap B_r) - ... =$$

$$= \binom{k}{1}(k-1)^n - \binom{k}{2}(k-2)^n + \binom{k}{3}(k-3)^n - ... + (-1)^{k-1}\binom{k}{k}(k-k)^n \Rightarrow$$

$$n(B_1 \cup B_2 ... \cup B_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Logo, o número de funções sobrejetoras é igual ao número de funções totais (sem restrições) menos o número de funções não sobrejetoras:

$$N_{sobrejetoras} = k^n - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \binom{k}{i} (k-i)^n \Rightarrow N_{sobrejetoras} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

5.18.1.6. Teorema: O número de maneiras de distribuir n objetos distintos em k caixas iguais, de modo que nenhuma caixa fique vazia é:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n .$$

Demonstração:

Basta calcular o número de maneiras de distribuir os objetos em k caixas distintas e depois dividir o total pelo número de ordenações das k caixas:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n$$

Utilizando essa fórmula, pode-se calcular, por exemplo, o número de maneiras de distribuir 6 objetos distintos em 3 caixas idênticas, com nenhuma caixa vazia:

$$\left\{ {6 \atop 3} \right\} = \frac{1}{3!}\sum_{i=0}^{3}(-1)^i \binom{3}{i}(3-i)^6 = \frac{1}{6}\left[\binom{3}{0}.3^6 - \binom{3}{1}.2^6 + \binom{3}{2}.1^6 - \binom{3}{3}.0^6\right] \Rightarrow$$

$$\left\{ {6 \atop 3} \right\} = \frac{1}{6}[729 - 192 + 3 - 0] \Rightarrow \left\{ {6 \atop 3} \right\} = 90$$

5.18.2. Números de Stirling de Primeira Espécie

Sejam n; k $\in$ IN, com n $\geq$ k $\geq$ 1. O símbolo $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ é igual ao número de maneiras de distribuir n pessoas em k mesas idênticas, com nenhuma mesa vazia. Por exemplo, suponha que se deseja distribuir 4 pessoas [1, 2, 3, 4] em 2 mesas idênticas. Analisando todas as possibilidades:

[1]$\cup$[2, 3, 4]; [1]$\cup$[2, 4, 3], [1, 2]$\cup$[3, 4]; [1, 3]$\cup$[2, 4];
[1, 4]$\cup$[2, 3]; [2]$\cup$[1, 3, 4]; [2]$\cup$[3, 1, 4]; [3]$\cup$[1, 2, 4];
[3]$\cup$[2, 1, 4]; [4]$\cup$[1, 2, 3]; [4]$\cup$[2, 1, 3]

Logo, se conclui que $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 11$.

5.18.2.1. Teorema: $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$, $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ e $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Demonstração:

$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$ pois todas as n pessoas devem ser colocadas numa mesma mesa.

$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$ pois deve-se colocar uma pessoa em cada uma das mesas iguais.

$\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$ pois basta escolher as duas pessoas que ficarão juntas numa mesma mesa. As demais ficarão cada uma numa mesa diferente, onde há 1 possibilidade.

5.18.2.2. Teorema: Para os números naturais 1 < k < n é válida a relação

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Considere que n pessoas devem ser distribuídas em k mesas idênticas. Numere as pessoas de 1 até n e as mesas de 1 até k. Há duas possibilidades para a pessoa 1:

i) 1 está sozinho em uma mesa: falta apenas distribuir as demais n – 1 pessoas nas outras k – 1 mesas→$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$ possibilidades.

ii) 1 não está sozinho na mesa: distribua as outras n – 1 pessoas nas k mesas→$\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ possibilidades e depois escreva a sequência das pessoas nas mesas seguindo um mesmo sentido (horário ou anti-horário) em cada mesa, deixando espaços entre as pessoas, como indicado no exemplo abaixo:

$$[2_\,]\,[3_\,4_\,]\,[5_\,]\,[6_\,7_\,8_\,9_\,]...[n-2_\,n-1_\,n_\,]$$

A pessoa 1 deverá ocupar um desses n – 1 espaços e qualquer posição provoca uma permutação circular diferente na mesa em que entrar. Assim, existem n – 1 maneiras de escolher a posição da pessoa 1 nas mesas. Logo, nesse caso ii, há $(n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$ possibilidades.

Como ocorre o caso i ou o caso ii segue que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} + (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}$.

Esse teorema permite determinar o valor de qualquer número de Stirling de primeira espécie. Por exemplo, suponha que se deseja calcular o valor de $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Inicialmente vamos determinar o valor de $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + 3.\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2! + 3.\frac{3.2}{2} = 2 + 9 = 11.$$

Finalmente:

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 3! + 4.11 = 6 + 44 = 50.$$

Assim, há exatamente 50 maneiras diferentes de distribuir 5 pessoas em 2 mesas idênticas, não ficando alguma mesa vazia.

Para calcular $\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ pode-se fazer:

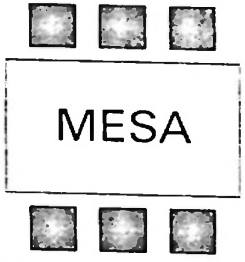
$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 11 + 4.\frac{4.3}{2} = 11 + 24 = 35.$$

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} + 4.\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 50 + 4.35 = 50 + 70 = 120.$$

Exercícios de Vestibular

1) (UFPE-12) Um casal está fazendo uma trilha junto com outras 10 pessoas. Em algum momento, eles devem cruzar um rio em 4 jangadas, cada uma com capacidade para 3 pessoas (excluindo o jangadeiro). De quantas maneiras, os grupos podem ser organizados para a travessia, se o casal quer ficar na mesma jangada?

2) (Insper-12) Em cada ingresso vendido para um show de música, é impresso o número da mesa onde o comprador deverá se sentar. Cada mesa possui seis lugares, dispostos conforme o esquema a seguir.



O lugar da mesa em que cada comprador se sentará não vem especificado no ingresso, devendo os seis ocupantes entrar em acordo. Os ingressos para uma dessas mesas foram adquiridos por um casal de namorados e quatro membros de uma mesma família. Eles acordaram que os namorados poderiam sentar-se um ao lado do outro. Nessas condições, o número de maneiras distintas em que as seis pessoas poderão ocupar os lugares da mesa é

a) 96. b) 120. c) 192. d) 384. e) 720.

3) (Insper-14) Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo. Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é

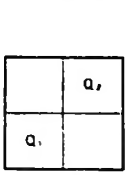
a) 140. b) 120. c) 70. d) 60. e) 40.

4) (Insper-15) Certa comunidade mística considera 2015 um ano de sorte. Para tal comunidade, um ano é considerado de sorte se, e somente se, é formado por 4 algarismos distintos, sendo 2 pares e 2 ímpares. No período que vai do ano 1000 até o ano 9999, o número total de anos de sorte é igual a

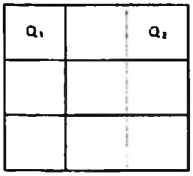
a) 1680. b) 1840. c) 1920.
d) 2160. e) 2400.

5) (Fuvest-17) Um quadriculado é formado por n×n quadrados iguais, conforme ilustrado para n = 2 e n = 3. Cada um desses quadrados será pintado de azul ou de branco. Dizemos que dois quadrados Q_1 e Q_2 do quadriculado estão conectados se ambos estiverem pintados de azul e se for possível, por meio de movimentos horizontais e verticais entre quadrados adjacentes, sair de Q_1 e chegar

a Q_2 passando apenas por quadrados pintados de azul.



$n = 2$



$n = 3$

a) Se n = 2, de quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto inferior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

b) Suponha que n = 3 e que o quadrado central esteja pintado de branco. De quantas maneiras distintas será possível pintar o restante do quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

c) Suponha que n = 3. De quantas maneiras distintas será possível pintar o quadriculado de modo que o quadrado Q_1 do canto superior esquerdo esteja conectado ao quadrado Q_2 do canto superior direito?

6) (Insper-18) LOTOGOL é um jogo de loteria em que o apostador marca seu palpite de placar em 5 jogos de futebol de uma rodada. Ganha premiação aquele que acerta 3, 4 ou 5 dos palpites.

Estas são as instruções do jogo:

Como jogar

Acerte a quantidade de gols feitos pelos times de futebol na rodada e concorra a uma bolada. Para apostar, basta marcar no volante o número de gols de cada time de futebol participante dos 5 jogos do concurso. Você pode assinalar 0, 1, 2, 3 ou mais gols (esta opção está representada pelo sinal +). Os clubes participantes estão impressos nos bilhetes emitidos pelo terminal.

Exemplo de aposta

Jogo		Placar
1	VITÓRIA/BA X AVAÍ/SC	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
2	ATLÉTICO/MG X FLAMENGO/RJ	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
3	INTERNACIONAL/RS X LONDRINA/PR	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
4	CEARÁ/CE X CRB/AL	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +
5	CSA/ALE X REMO/PA	0 1 2 3 + 0 1 2 3 +

(http://loterias.caixa.gov.br Adaptado)

Laura acredita que, nos 5 jogos da rodada, serão marcados um total de 4 gols. Além disso, ela também acredita que em apenas um dos jogos o placar será zero a zero. O número de apostas diferentes que Laura poderá fazer, seguindo sua crença, é

a) 64. b) 96. c) 80. d) 84. e) 75.

7) (Insper-17) Muitas empresas utilizam senhas para que apenas o funcionário autorizado tenha acesso ao sistema informatizado. Em uma determinada empresa, o sistema atual exige que a senha tenha as seguintes características:

4 letras seguidas de 2 algarismos, sendo que o sistema reconhece

- 26 letras minúsculas e;
- 10 algarismos.

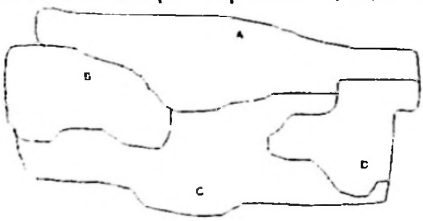
Além disso, o sistema permite repetição, tanto de letras quanto de algarismos.

Essa empresa estuda implementar um novo sistema que exigirá um novo formato de senha:

4 letras seguidas de 1 caractere especial e 2 algarismos, sendo que o sistema reconhece
• 26 letras maiúsculas e minúsculas;
• 10 caracteres especiais e;
• 10 algarismos.
Além disso, o sistema permite repetição, tanto de letras quanto de algarismos. Ao analisar o número de senhas possíveis para o novo sistema, pode-se afirmar que, em relação ao número de senhas do sistema atual, tem-se um número
a) 20 vezes maior.
b) 80 vezes maior.
c) 520 vezes maior.
d) 160 vezes maior.
e) 10 vezes maior.

8) (UFC-01) Ao adicionarmos todos os números inteiros positivos formados a partir das permutações simples dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, obteremos um número M. Determine o algarismo das dezenas de M.

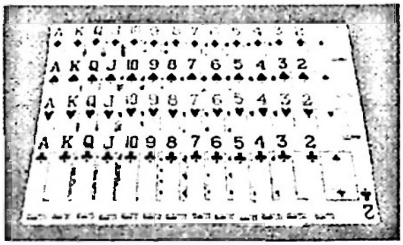
9) (UFMS-04) Considere o mapa da região formada pelos países A, B, C e D.



Ao colorir um mapa, pode-se usar uma mesma cor mais de uma vez, desde que dois países vizinhos tenham cores diferentes. De acordo com essa informação e usando apenas quatro cores, pode-se colorir o mapa acima de L maneiras distintas. Então, é correto afirmar que L vale:
a) 24 b) 36 c) 40 d) 48 e) 32

10) (Insper-01) Nove economistas trabalham em um projeto sigiloso. Por motivo de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por "chaves eletrônicas" de modo que só é possível destravá-las se houver pelo menos 5 economistas presentes. Logo, o número mínimo possível de "chaves eletrônicas" é de:
a) 9! b) 5! c) 4! d) 70 e) 126

11) (UERJ-13) Na ilustração abaixo, as 52 cartas de um baralho estão agrupadas em linhas com 13 cartas de mesmo naipe e colunas com 4 cartas de mesmo valor.



Denomina-se quadra a reunião de quatro cartas de mesmo valor. Observe, em um conjunto de cinco cartas, um exemplo de quadra:

O número total de conjuntos distintos de cinco cartas desse baralho que contêm uma quadra é igual a:
a) 624 b) 676 c) 715 d) 720

12) (UESPI-09) Em um campeonato de xadrez, participam 10 jogadores. Na primeira etapa, serão realizados 5 jogos, com cada participante competindo em

um único jogo. De quantas maneiras podemos arrumar os participantes para a primeira etapa? Observação: não considere a ordem dos participantes de cada jogo, nem a ordem de realização dos jogos.
A) 945 B) 950 C) 955
D) 960 E) 965

13) (Insper-10) Uma construtora lançará no 2°- semestre o projeto de três edifícios residenciais idênticos numa mesma cidade. Por isso, selecionou seis regiões da cidade com perfil para receber esse tipo de empreendimento. Considerando que uma mesma região poderá receber, no máximo, dois dos três lançamentos, o número de maneiras diferentes de distribuir esses lançamentos entre as seis regiões é igual a
a) 20. b) 30. c) 40. d) 50. e) 60.

14) (Insper-11) Os oito elementos que estão faltando na sequência de números inteiros

(1, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, ??, 10)

serão escolhidos respeitando-se os seguintes critérios:
• todo elemento da sequência obtida, a partir do segundo, será maior ou igual ao elemento imediatamente anterior;
• haverá um único elemento repetido na sequência, isto é, dentre os seus dez elementos haverá exatamente nove números inteiros diferentes.
Nessas condições, o número de maneiras distintas de escolher estes oito elementos é igual a
a) 54. b) 56. c) 64. d) 70. e) 72.

15) (Insper-14) Um dirigente sugeriu a criação de um torneio de futebol chamado Copa dos Campeões, disputado apenas pelos oito países que já foram campeões mundiais: os três sul-americanos (Uruguai, Brasil e Argentina) e os cinco europeus (Itália, Alemanha, Inglaterra, França e Espanha). As oito seleções seriam divididas em dois grupos de quatro, sendo os jogos do grupo A disputados no Rio de Janeiro e os do grupo B em São Paulo. Considerando os integrantes de cada grupo e as cidades onde serão realizados os jogos, o número de maneiras diferentes de dividir as oito seleções de modo que as três sul-americanas não fiquem no mesmo grupo é
a) 140. b) 120. c) 70. d) 60. e) 40.

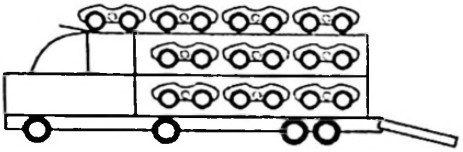
16) (ENEM-17) O comitê organizador da Copa do Mundo 2014 criou a logomarca da Copa, composta de uma figura plana e o slogan "Juntos num só ritmo", com mãos que se unem formando a taça Fifa. Considere que o comitê organizador resolvesse utilizar todas as cores da bandeira nacional (verde, amarelo, azul e branco) para colorir a logomarca, de forma que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

JUNTOS NUM SÓ RITMO

Disponível em: www.pt.fifa.com. Acesso em: 19 mar. 2014 (adaptado).

De quantas maneiras diferentes o comitê organizador da Copa poderia pintar a logomarca com as cores citadas?

17) (ENEM-17) Um brinquedo infantil caminhão-cegonha é formado por uma carreta e dez carrinhos nela transportados, conforme a figura.



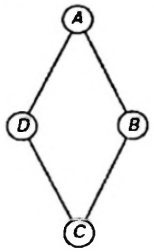
No setor de produção da empresa que fabrica esse brinquedo, é feita a pintura de todos os carrinhos para que o aspecto do brinquedo fique mais atraente. São utilizadas as cores amarelo, branco, laranja e verde, e cada carrinho é pintado apenas com uma cor. O caminhão-cegonha tem uma cor fixa. A empresa determinou que em todo caminhão-cegonha deve haver pelo menos um carrinho de cada uma das quatro cores disponíveis. Mudança de posição dos carrinhos no caminhão-cegonha não gera um novo modelo do brinquedo.

Com base nessas informações, quantos são os modelos distintos do brinquedo caminhão-cegonha que essa empresa poderá produzir?

a) $C_{6,4}$ b) $C_{9,3}$ c) $C_{10,4}$ d) 64 e) 46

18) (ENEM-13) Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes. A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

a) 6 b) 12 c) 18 d) 24 e) 36

19) (UFC-98) A quantidade de números inteiros positivos de 8 algarismos, formados somente pelos algarismos 1, 2 e 3, nos quais números cada um destes algarismos aparece pelo menos uma vez, é:

a) $3^8 + 3.2^8$ b) $3^8 - 3.2^8$
c) $3^8 + 3.2^8 - 3$ d) $3^8 + 3.2^8 + 3$
e) $3^8 - 3.2^8 + 3$

20) (Escola Naval-15) A Escola Naval irá distribuir 4 viagens para a cidade de Fortaleza, 3 para a cidade de Natal e 2 para a cidade de Salvador. De quantos modos diferentes podemos distribuídas entre 9 aspirantes, dando somente uma viagem para cada um?

a) 288 b) 1260 c) 60800
d) 80760 e) 120960

21) (AFA-19) No ano de 2017, 22 alunos da EPCAR foram premiados na Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP). Desses alunos, 14 ganharam medalhas, sendo 3 alunos do 3° esquadrão, 9 do 2° esquadrão e 2 do 1° esquadrão. Os demais receberam menção honrosa, sendo 2 alunos do 3° esquadrão, 4 do 2°

esquadrão e 2 do 1° esquadrão. Para homenagear os alunos premiados, fez-se uma fotografia para ser publicada pela Nascentv em uma rede social. Admitindo-se que, na fotografia, os alunos que receberam menção honrosa ficaram agachados, sempre numa única ordem, sem alteração de posição entre eles, à frente de uma fila na qual se posicionaram os alunos medalhistas, de modo que, nesta fila:

• as duas extremidades foram ocupadas somente por alunos do 2° esquadrão que receberam medalha;

• os alunos do 1° esquadrão, que receberam medalha, ficaram um ao lado do outro; e

• os alunos do 3° esquadrão, que receberam medalha, ficaram, também, um ao lado do outro.

Marque a alternativa que contém o número de fotografias distintas possíveis que poderiam ter sido feitas.

a) (72)· 9! b) (144)· 9!
c) (288)· 9! d) (864)· 9!

22) (AFA-16) Uma caixa contém 10 bolas das quais 3 são amarelas e numeradas de 1 a 3; 3 verdes numeradas de 1 a 3 e mais 4 bolas de outras cores todas distintas e sem numeração. A quantidade de formas distintas de se enfileirar essas 10 bolas de modo que as bolas de mesmo número fiquem juntas é

a) 8.7 ! b) 7 ! c) 5.4 ! d) 10 !

23) (AFA-12) Para evitar que João acesse sites não recomendados na Internet, sua mãe quer colocar uma senha no computador formada apenas por m letras A e também m letras B (sendo m par). Tal senha, quando lida da esquerda para a direita ou da direita para a esquerda, não deverá se alterar (Ex.: ABBA). Com essas características, o número máximo de senhas distintas que ela poderá criar para depois escolher uma é igual a

a) $\frac{(2m)!}{m!\,m!}$ b) $\left[\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}\right]^2$

c) $\frac{2m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{3m}{2}\right)!}$ d) $\frac{m!}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{m}{2}\right)!}$

24) (AFA-11) Um colecionador deixou sua casa provido de R$ 5,00, disposto a gastar tudo na loja de miniaturas da esquina. O vendedor lhe mostrou três opções que havia na loja, conforme a seguir.

• 5 diferentes miniaturas de carros, custando R$ 4,00 cada miniatura;

• 3 diferentes miniaturas de livros, custando R$ 1,00 cada miniatura;

• 2 diferentes miniaturas de bichos, custando R$ 3,00 cada miniatura.

O número de diferentes maneiras desse colecionador efetuar a compra das miniaturas, gastando todo o seu dinheiro, é

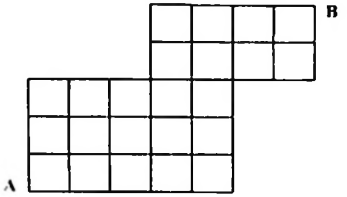
a) 15 b) 21 c) 42 d) 90

25) (AFA-10) Numa sala de aula, estão presentes 5 alunos e 6 alunas. Para uma determinada atividade, o professor deverá escolher um grupo formado por dessas alunas e 3 dos alunos. Em seguida, os escolhidos serão dispostos em círculo de tal forma que alunos do mesmo sexo não fiquem lado a lado. Isso poderá ocorrer de n maneiras distintas. O número n é igual a:

a) 24000 b) 2400 c) 400 d) 200

26) (UFC-01) Ao adicionarmos todos os números inteiros positivos formados a partir das permutações simples dos algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, obteremos um número M. Determine o algarismo das dezenas de M.

27) (UFPE-99) No mapa abaixo estão esboçadas as ruas de um bairro. As ruas verticais são paralelas entre si e é igual a distância entre ruas consecutivas; o mesmo acontece com as ruas horizontais. Se N é o número de formas de sair de A e chegar até B percorrendo a menor distância possível, determine N.



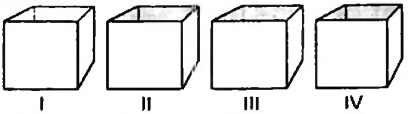
28) (Insper-01) Nove economistas trabalham em um projeto sigiloso. Por motivo de segurança, os planos são guardados em um cofre protegido por "chaves eletrônicas" de modo que só é possível destravá-las se houver pelo menos 5 economistas presentes. Logo, o número mínimo possível de "chaves eletrônicas" é de:

a) 9! b) 5! c) 4! d) 70 e) 126

29) (AFA-13) Num acampamento militar, serão instaladas três barracas: I, II e III. Nelas, serão alojados 10 soldados, dentre eles o soldado A e o soldado B, de tal maneira que fiquem 4 soldados na barraca I, 3 na barraca II e 3 na barraca III. Se o soldado A deve ficar na barraca I e o soldado B NÃO deve ficar na barraca III, então o número de maneiras distintas de distribuí-los é igual a

a) 560 b) 1120 c) 1680 d) 2240

30) (AFA-14) Sr. José deseja guardar 4 bolas – uma azul, uma branca, uma vermelha e uma preta – em 4 caixas numeradas:

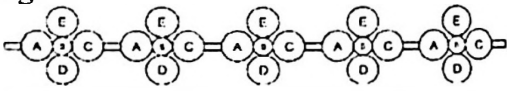


O número de maneiras de Sr. José guardar todas as 4 bolas de forma que uma mesma caixa NÃO contenha mais do que duas bolas, é igual a

a) 24 b) 36 c) 144 d) 204

31) (AFA-10) Um pisca-pisca usado em árvores de natal é formado por um fio com lâmpadas acopladas, que acendem e apagam sequencialmente. Uma pessoa comprou um pisca-pisca, formado por vários blocos, com lâmpadas em formato de flores, com o seguinte padrão:

• Cada bloco é composto por 5 flores, cada uma com 5 lâmpadas circulares, de cores distintas (A, B, C, D, E), como na figura:

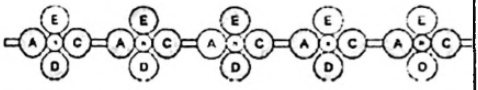


• Em cada flor, apenas 3 lâmpadas quaisquer acendem e apagam juntas, por vez, ficando as outras duas apagadas.

• Todas as 5 flores do bloco acendem e apagam juntas.

• Em duas flores consecutivas, nunca acendem e apagam as mesmas 3 cores da anterior. Assim, considere que uma composição possível para um bloco

acender e apagar corresponde à figura abaixo:



O número de maneiras, distintas entre si, de contar as possibilidades de composição para um bloco desse pisca-pisca é

a) 10^5 c) 9^5
b) $9^4 \cdot 10$ d) $9^5 \cdot 10$

32) (Escola Naval-17) Calcule o número de soluções inteiras não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$, nas quais pelo menos 3 incógnitas são nulas, e assinale a opção correta.

a) 3332 b) 3420 c) 3543
d) 3678 e) 3711

33) (Escola Naval-18) O atual campeão carioca de futebol, Botafogo, possui escudo baseado em um pentagrama, conforme figuras abaixo.

Figura 1

Figura 2

O pentagrama é um polígono estrelado de 5 vértices, que podem ser igualmente distribuídos em uma circunferência (formando cinco arcos congruentes). O pentagrama, através de seus segmentos, determina 6 regiões internas, 5 triângulos e 1 pentágono. O pentágono é vizinho de todos os triângulos e não existem triângulos vizinhos entre si. Sendo assim, utilizando até 6 cores distintas (preto, branco, cinza, verde, amarelo e azul), de quantas maneiras essas regiões do pentagrama, conforme Figura 2, podem ser coloridas, de forma que não haja duas regiões vizinhas com cores iguais?

a) 720 b) 120 c) 6480
d) 3750 e) 3774

34) (Escola Naval-80) O número de anagramas da palavra "castelo" nos quais as letras "C" e "A" não são adjacentes é:

a) 1420 b) 2840 c) 3600
d) 4320 e) 5040

35) (Escola Naval-81) Se o conjunto **A** tem **6** elementos e **B** tem **8** elementos, o número de funções de **A** em **B** que podem ser definidas:

a) 10160. b) 2^{18}. c) 2^8.
d) 3003. e) 56.

36) (Escola Naval-84) Considere todos os números inteiros com 4 algarismos significativos distintos. Quantos, destes números, têm a soma de seus algarismos par?

a) 384 b) 1104 c) 1584
d) 5904 e) 3024

37) (EsPCEx-17) Duas instituições financeiras fornecem senhas para seus clientes, construídas segundo os seguintes métodos:

1ª instituição: 5 caracteres distintos formados por elementos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9};

2ª instituição: 6 caracteres distintos formados por duas letras, dentre as vogais, na primeira e segunda posições da senha, seguidas por 4 algarismos dentre os elementos do conjunto {3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

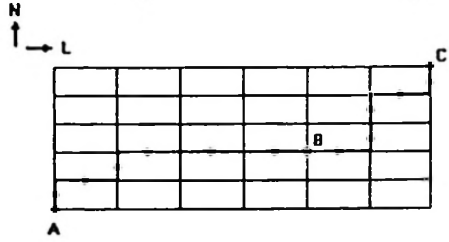
Para comparar a eficiência entre os métodos de construção das senhas,

medindo sua maior ou menor vulnerabilidade, foi definida a grandeza "força da senha", de forma que, quanto mais senhas puderem ser criadas pelo método, mais "forte" será a senha.
Com base nessas informações, pode-se dizer que, em relação à 2ª instituição, a senha da 1ª instituição é
a) 10% mais fraca.
b) 10% mais forte.
c) De mesma força.
d) 20% mais fraca.
e) 20% mais forte.

38) (Escola Naval-91) A partir de um conjunto de 19 atletas, formam 57 times de 4 atletas cada. Todos os atletas participam de um mesmo número de times e cada par de atletas fica junto no mesmo time um mesmo número x de vezes. O valor de x é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

39) (Escola Naval-93) Um grupo de 8 jovens pretende sair para um passeio em dois carros (cada um com capacidade para 4 pessoas). Apenas 4 delas dirigem. O número de modos deles escolherem seus lugares nos dois carros é igual a:
a) 10080 b) 8640 c) 4320
d) 1440 e) 720

40) (Fuvest-93) A figura ao lado representa parte do mapa de uma cidade onde estão assinalados as casas de João (A), de Maria (B), a escola (C) e um possível caminho que João percorre para, passando pela casa de Maria, chegar à escola. Qual o número total de caminhos distintos que João poderá percorrer, caminhando somente para Norte ou Leste, para ir de sua casa à escola, passando pela casa se Maria?



41) (Fuvest-94) O jogo da sena consiste no sorteio de 6 números distintos ao acaso, entre os números 1, 2, 3, ..., até 50. Uma aposta consiste na escolha (pelo apostador) de 6 números distintos entre os 50 possíveis, sendo premiadas aquelas que acertarem 4 (quadras), 5 (quina) ou todos os 6 (sena) números sorteados. Um apostador, que dispõe de muito dinheiro para jogar, escolhe 20 números e faz todos os $C_{20,6} = 38760$ jogos possíveis de serem realizados com esses 20 números. Realizado o sorteio, ele verifica que todos os seis números sorteados estão entre os 20 que ele escolheu. Além de uma aposta premiada com a sena,
a) Quantas apostas premiadas com a quina este apostador conseguiu?
b) Quantas apostas premiadas com a quadra ele conseguiu?

42) (Fuvest-97) Os trabalhos da diretoria de um clube são realizados por seis comissões. Cada diretor participa exatamente de duas comissões e cada duas comissões têm exatamente um diretor comum. Quantos diretores têm o clube?

43) (Unicamp-98) De quantas maneiras é possível distribuir 20 bolas iguais entre 3

crianças de modo que cada uma delas receba, pelo menos, 5 bolas?

44) (AFA-94) A quantidade de números distintos, com 4 algarismos, sem repetição que pode ser obtida com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, e 5 é.
a) 66 b) 240 c) 300 d) 360

45) (ITA-57) Uma urna contém 12 bolas das quais 7 são pretas e 5 brancas. De quantos modos podemos tirar 6 bolas da urna, das quais duas são brancas?

46) (ITA-58) São dados 10 pontos num plano dos quais 8 sobre uma mesma reta r, os outros 2 não alinhados com qualquer um dos 8 na reta r. Quantos triângulos podem ser formados usando os pontos dados como vértices?

47) (ITA-71) Dispomos de seis cores diferentes. Cada face de um cubo será pintada com uma cor diferente, de forma que as seis cores sejam utilizadas. De quantas maneiras diferentes isto pode ser feito, se uma maneira é considerada idêntica a outra, desde que possa ser obtida a partir desta por rotação do cubo?
a) 30 b) 12 c) 36 d) 18 e) N.d.r.a

48) (ITA-71) Qual o maior número de partes em que um plano pode ser dividido por n linhas retas? (Sugestão: usar indução finita).
a) n^2; b) $n(n + 1)$
c) $n(n + 1)/2$ d) $(n^2 + n + 2)/2$;
e) N.d.r.a.

49) (ITA-72) Sejam A um conjunto finito com m elementos e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. O número de todas as funções definidas em I_n com valores em A é:
a) C_m^n b) m.n c) n^m
d) m^n e) n.d.a

50) (ITA-72) Sejam $m \leq n$, $I_m = \{1, 2, ..., m\}$ e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. O número de funções biunívocas definidas em I_m com valores em I_n é:
a) A_m^n b) C_m^n c) m!/n!
d) m.n e) n.d.a

51) (ITA-77) Consideremos m elementos distintos. Destaquemos k dentre eles. Quantos arranjos simples daqueles m elementos tomados n a n ($A_{m,n}$) podemos formar, de modo que em cada arranjo haja sempre, contíguos e em qualquer ordem de colocação, r ($r < n$) dos k elementos destacados?
a) $(n - r - 1)A_{k,r}A_{m-k,n-r}$
b) $(n - r + 1)A_{k,r}A_{m-r,n-k}$
c) $(n - r - 1)A_{k,r}A_{m-r,n-k}$
d) $(n - r + 1)A_{k,r}A_{m-k,n-r}$
e) nenhuma das anteriores

52) (ITA-80) O número de soluções inteiras e não negativas da equação $x + y + z + w = 5$ é:
a) 36 b) 48 c) 52 d) 54 e) 56

53) (IME-71) Num sistema de numeração duodecimal quantos números de 3 algarismos diferentes existem, cuja soma
desses 3 algarismos seja ímpar? (Considerar 012, 014, 016 etc., números de 3 algarismos diferentes).
(A) 680 (B) 360 (C) 660
(D) 720 (E) 800 (F) N.R.A.

54) (ITA-83) Um general possui n soldados para tomar uma posição inimiga. Desejando efetuar um ataque com dois grupos, um frontal com r soldados e outro da retaguarda com s soldados ($r + s = n$), ele poderá dispor seus homens de:
a) n!/(r + s)! maneiras distintas neste ataque.
b) n!/r!s! maneiras distintas neste ataque.
c) n!/(rs)! maneiras distintas neste ataque.
d) 2(n!)/(r + s)! maneiras distintas neste ataque.
e) 2(n!)/r!s! maneiras distintas neste ataque.

55) (ITA-87) Quantos números de 3 algarismos distintos podemos formar, empregando caracteres 1, 3, 5, 6, 8 e 9?
a) 60 b) 120 c) 240 d) 40 e) 80

56) (ITA-88) Considere (P) um polígono regular de n lados. Suponha que os vértices de (P) determinem 2n triângulos, cujos lados não são lados de (P). O valor de n é:
a) 6 b) 8 c) 10 d) 20
e) Não existe este polígono

57) (ITA-93) Possuo 3 vasos idênticos e desejo ornamentá-los com 18 rosas, sendo 10 vermelhas e 8 amarelas. Desejo que um dos vasos tenha 7 rosas e os outros dois no mínimo 5. Cada um deverá ter 2 rosas vermelhas e 1 amarela, pelo menos. Quantos arranjos distintos poderei fazer usando as 18 rosas?
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

58) (IME-55) Com os algarismos significativos, quantos números constituídos de 3 algarismos ímpares e 3 pares, sem repetição, podem ser formados? Explanar o raciocínio no desenvolvimento da questão.

59) (IME-70) Determine quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser formados com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Obs: Considere os números iniciados com o algarismo 0 (por exemplo, 0123), número de 3 algarismos.

60) (ITA-96) Três pessoas A, B e C, chegam no mesmo dia a uma cidade onde há cinco hotéis H_1, H_2, H_3, H_4 e H_5 Sabendo que cada hotel tem pelo menos três vagas, qual/quais das seguintes afirmações, referentes à distribuição das três pessoas nos cinco hotéis, é/são correta(s)?
I- Existe um total de 120 combinações
II- Existe um total de 60 combinações se cada pessoa pernoitar num hotel diferente
III- Existe um total de 60 combinações se duas e apenas duas pessoas pernoitarem no mesmo hotel
a) Todas as afirmações são verdadeiras.
b) Apenas a afirmação I é verdadeira.
c) Apenas a afirmação II é verdadeira.
d) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações II e III são verdadeiras.

61) (IME-71) 5 rapazes e 5 moças devem posar para fotografia, ocupando 5 degraus de uma escadaria, de forma que em cada degrau fique um rapaz e uma moça. De quantas maneiras diferentes podemos arrumar este grupo?

62) (IME-60) Quantos números naturais podem ser escritos, tendo, no máximo, quatros dos seguintes algarismos: 0, 1, 2, 3 e 4, sem repetir?

63) (IME-75) Determine quantos números M existem satisfazendo simultaneamente as seguintes condições:
i) $10^6 < M < 10^7$;
ii) o algarismo 4 aparece pelo menos 2 vezes em M;
iii) o algarismo 8 aparece pelo menos 3 vezes em M.
Obs: Os números M são inteiros escritos na base 10.

64) (IME-76) Considere uma turma com n alunos, numerados de 1 a n. Deseja-se organizar uma comissão de 3 alunos. De quantas maneiras pode ser formada esta comissão de modo que não façam parte da mesma dois ou três alunos designados por números consecutivos?

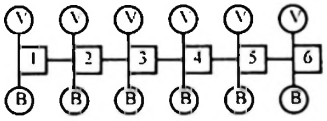
65) (IME-77) São dados n pontos em um plano, supondo-se:
a) Cada três pontos quaisquer não pertencem a uma mesma reta;
b) Cada par de retas por eles determinados não é constituído por retas paralelas;
c) Cada três retas por eles determinadas não passam por um mesmo ponto.
Pede-se o número de interseções das retas determinadas por esses pontos distintos dos pontos dados.

66) (IME-77) Quatro rapazes e três moças formam uma comissão de três pessoas. De quantas maneiras pode ser formada a comissão de forma a contar pelo menos uma moça?

67) (IME-79) Um elevador com 7 pessoas parte do andar térreo de um prédio e faz 4 paradas em andares diferentes. Determinar de quantas maneiras diferentes todas aquelas 7 pessoas podem desembarcar até a 4ª parada, inclusive.

68) (ITA-99) Listando-se em ordem crescente todos os números de cinco algarismos distintos formados com os elementos do conjunto {1, 2, 4, 6, 7}, o número 62417 ocupa o *n*-ésimo lugar. Então *n* é igual a:
a) 74 b) 75 c) 79 d) 81 e) 92

69) (IME-82) Deseja-se transmitir sinais luminosos de um farol, representado pela figura abaixo. Em cada um dos seis pontos de luz do farol existem uma lâmpada branca e uma vermelha. Sabe-se que em cada ponto de luz não pode haver mais que uma lâmpada acesa e que pelo menos três pontos de luz devem ficar iluminados. Determine o número total de configurações que podem ser obtidas.



70) (IME-83) Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do

carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.

11	10	8	7	6	2	1	3	4	5	9

71) (IME-84) Determine a soma de todos os números inteiros que são obtidos permutando-se, sem repetição, os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5.

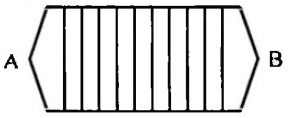
72) (IME-85) Dois clubes do Rio de Janeiro participaram de um campeonato nacional de futebol de salão onde cada vitória valia um ponto, cada empate meio ponto e cada derrota zero ponto. Sabendo que cada participante enfrentou todos os outros apenas uma vez, que os clubes do Rio de Janeiro totalizaram, em conjunto, 100 pontos e que cada um dos outros clubes alcançou a mesma quantidade k de pontos, determine a quantidade de clubes que participou do torneio.

73) (IME/CG-00) Considere A = {1, 2, 3, ..., 12}. Determine o número de subconjuntos H de A tais que as condições:
a) H tem 6 elementos;
b) $8 \in H$;
c) exatamente dois elementos maiores que 8 pertencem a H;
sejam simultaneamente satisfeitas.

74) (ITA-69) Resolvendo a equação $C_{15,(x-1)} = C_{15,(2x+1)}$, onde $C_{m,p}$ significa o número de combinações simples (sem repetição) de m elementos tomados p a p, obtemos:
a) $x = -2$ e $x = 5$ b) $x = 2$ e $x = -2$
c) $x = 2$ e $x = 5$ d) $x = 2$
e) nra

75) (IME-89) Em cada uma das faces de um cubo constrói-se um círculo e, em cada círculo marcam-se n pontos. Unindo-se esses pontos,
a) quantas retas, não contidas numa mesma face do cubo, podem ser formadas;
b) quantos triângulos, não contidos numa mesma face do cubo, podem ser formados;
c) quantos tetraedros, com base numa das faces do cubo, podem ser formados;
d) quantos tetraedros, com todos os vértices em faces diferentes, podem ser formados.

76) (IME-90) Ligando as cidades A e B existem duas estradas principais. Dez estradas secundárias de mão-dupla, ligam as duas estradas principais como mostra a figura. Quantos caminhos, sem auto-interseções, existem de A até B.
OBS.: Caminho sem auto-interseções é um caminho que não passa por um ponto duas ou mais vezes.



77) (IME-91) Dado o conjunto A = {1, 2, 3, ..., 102}, pede-se o número de subconjuntos de A, com três elementos, tais que a soma destes seja um múltiplo de três.

78) (IME-92) Calcule quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem no sistema de base 7.

79) (IME-93) Numa escola há 15 comissões, todas com igual número de alunos. Cada aluno pertence a duas comissões e cada duas comissões possui exatamente um membro comum. Todos os alunos participam.
a) Quantos alunos tem a escola?
b) Quantos alunos participam de cada comissão?

80) (IME-94) Seja um octógono convexo. Suponha que quando todas as suas diagonais são traçadas, não há mais de duas diagonais se interceptando no mesmo ponto. Quantos pontos de interseção (de diagonais) existem neste octógono?

81) (IME-97) Em cada uma das 6(seis) faces de um cubo, construiu-se uma circunferência, onde foram marcados n pontos. Considerando que 4 (quatro) pontos não pertencentes à mesma face, não sejam coplanares, quantas retas e triângulos, não contidos nas faces desse cubo, são determinados pelos pontos.

82) (IME-98) Uma embarcação deve ser tripulada por oito homens, dois dos quais só remam do lado direito e apenas um, do lado esquerdo. Determine de quantos modos esta tripulação pode ser formada, se de cada lado deve haver quatro homens.
Observação: A ordem dos homens de cada lado distingue a tripulação.

83) (IME-01) Um comandante de companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas elas são formadas pelo mesmo número de homens. Cada homem participa de exatamente de duas patrulhas. Cada duas patrulhas têm somente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

84) (ITA-91) Uma escola possui 18 professores sendo 7 de Matemática, 3 de Física e 4 de Química. De quantas maneiras podemos formar comissões de 12 professores de modo que cada uma contenha exatamente 5 professores de Matemática, com no mínimo 2 de Física e no máximo 2 de Química?
a) 875 b) 1877 c) 1995
d) 2877 e) n.d.a.

85) (ITA-00) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1,2,3,4,5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes, mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?
a) 144 b) 180 c) 240
d) 288 e) 360

86) (ITA-04) Considere **12 pontos** distintos dispostos no plano, 5 dos quais estão numa mesma reta. Qualquer outra reta do plano contém, no máximo, 2 destes pontos. Quantos triângulos podemos formar com os vértices nestes pontos?
a) 210 b) 315 c) 410 d) 415 e) 521

87) (ITA-06) Considere uma prova com 10 questões de múltipla escolha, cada

questão com 5 alternativas. Sabendo que cada questão admite uma única alternativa correta, então o número de formas possíveis para que um candidato acerte somente 7 das 10 questões é

a) $4^4.30$ b) $4^3.60$ c) $5^3.60$

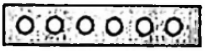
d) $\binom{7}{3}.4^3$ e) $\binom{10}{7}$

88) (ITA-07) Seja A um conjunto com 14 elementos e B um subconjunto de A com 6 elementos. O número de subconjuntos de A com um número de elementos menor ou igual a 6 e disjuntos de B é

a) $2^8 - 9$ b) $2^8 - 1$ c) $2^8 - 2^6$

d) $2^{14} - 2^8$ e) 2^8

89) (IME/CG-01) Um painel de lâmpadas é composto de 6 bocais dispostos em fileira, conforme mostra a figura abaixo. Para preencher este painel estão disponíveis 6 lâmpadas distintas que apresentam as seguintes cores: amarela, verde, azul, branca, vermelha e laranja. Calcule quantas disposições diferentes de preenchimento do painel são possíveis, empregando as lâmpadas disponíveis, de maneira e permitir que as lâmpadas de cor branca e vermelha fiquem posicionadas de maneira adjacente no painel (uma imediatamente ao lado da outra).


Painel de lâmpadas com 6 bocais

90) (IME-69) Seja A um conjunto e F uma coleção das bijeções de A sobre A. Calcular o número total de funções de F que não admitem nenhum ponto fixo, supondo-se A finito com n elementos.
Obs: i) x é ponto fixo de f se e só se f(x) = x; ii) uma bijeção de f de A sobre A é uma função biunívoca cujas coleções de argumentos e valores são ambas iguais a A.

91) (ITA-12) Deseja-se trocar uma moeda de 25 centavos, usando-se apenas moedas de 1, 5 e 10 centavos. Então, o número de diferentes maneiras em que a moeda de 25 centavos pode ser trocada é igual a

a) 6. b) 8. c) 10. d) 12. e) 14.

92) (ITA-13) Quantos tetraedros regulares da mesma dimensão podemos distinguir usando 4 cores distintas para pintar todas as suas faces? Cada face só pode ser pintada com uma única cor.

93) (ITA-14) Determine quantos paralelepípedos retângulos diferentes podem ser construídos de tal maneira que a medida de cada uma de suas arestas seja um número inteiro positivo que não exceda 10.

94) (ITA-16) Pintam-se N cubos iguais utilizando-se 6 cores diferentes, uma para cada face. Considerando que cada cubo pode ser perfeitamente distinguindo dos demais, o maior valor possível de N é igual a

a) 10 b) 15 c) 20 d) 25 e) 30

95) (IME-67) De quantas maneiras 3 rapazes e 2 moças podem ocupar 7 cadeiras em fila, de modo que as moças sentem juntas uma das outras, e os rapazes juntos uns dos outros.

96) (ITA-18) Sobre duas retas paralelas r e s são tomados 13 pontos, m pontos em r e n pontos em s, sendo m > n. Com os

pontos são formados todos os triângulos e quadriláteros convexos possíveis. Sabe-se que o quociente entre o número de quadriláteros e o número de triângulos é 15/11. Então, os valores de n e m são, respectivamente,

a) 2 e 11. b) 3 e 10. c) 4 e 9.
d) 5 e 8. e) 6 e 7.

97) (IME/CG-88) Considere um conjunto de 12 letras distintas, sendo 8 consoantes e 7 vogais;

a) quantas palavras podem ser formadas contendo 3 consoantes e 2 vogais sem repetição?

b) em quantas destas palavras as vogais não estão juntas?

98) (IME-08) De quantas maneiras n bolas idênticas podem ser distribuídas em três cestos de cores verde, amarelo e azul?

a) $\binom{n+2}{2}$ b) $\binom{n}{3}$ c) $\frac{n!}{3!}$

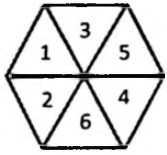
d) $(n-3)!$ e) 3^n

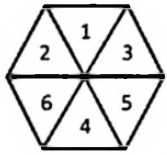
99) (ITA-76) No sistema decimal, quantos números de cinco algarismos (sem repetição) podemos escrever, de modo que os algarismos 0, 2 e 4 apareçam agrupados?

Obs: Considerar somente números de 5 algarismos em que o primeiro algarismo é diferente de zero.

a) $2^4.3^2.5$ b) $2^5.3.7$ c) $2^4.3^3$
d) $2^5.3^2$ e) n.d.a

100) (IME-17) Um hexágono é dividido em 6 triângulos equiláteros. De quantas formas podemos colocar os números de 1 a 6 em cada triângulo, sem repetição, de maneira que a soma dos números em três triângulos adjacentes seja sempre múltiplo de 3? Soluções obtidas por rotação ou reflexão são diferentes, portanto as figuras abaixo mostram duas soluções distintas.





a) 12 b) 24 c) 36 d) 48 e) 96

101) (IME-14) Em uma festa de aniversário estão presentes k famílias com pai, mãe e 2 filhos, além de 2 famílias com pai, mãe e 1 filho. Organiza-se uma brincadeira que envolve esforço físico, na qual uma equipe azul enfrentará uma equipe amarela. Para equilibrar a disputa, uma das equipes terá apenas o pai de uma das famílias, enquanto a outra equipe terá 2 pessoas de uma mesma família, não podendo incluir o pai. É permitido que o pai enfrente 2 pessoas de sua própria família. Para que se tenha exatamente 2014 formas distintas de se organizar a brincadeira, o valor de k deverá ser

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

102) (ITA-21) Pretende-se distribuir 48 balas em 4 tigelas designadas pelas letras A, B, C e D. De quantas maneiras pode-se fazer essa distribuição de forma que todas as tigelas contenham ao menos 3 balas e a tigela B contenha a mesma quantidade que a tigela D.

a) 190. b) 361. c) 722. d) 1083. e) 1444.

103) (IME-14) Um professor dá um teste surpresa para uma turma de 9 alunos, e

diz que o teste pode ser feito sozinho ou em grupos de 2 alunos. De quantas formas a turma pode ser organizar para fazer o teste? (Por exemplo, uma turma de 3 alunos pode ser organizar de 4 formas e uma turma de 4 alunos pode se organizar de 10 formas)

104) (IME-08) Cinco equipes concorrem numa competição automobilística, em que cada equipe possui dois carros. Para a largada são formadas duas colunas de carros lado a lado, de tal forma que cada carro da coluna da direita tenha ao seu lado, na coluna da esquerda, um carro de outra equipe. Determine o número de formações possíveis para a largada.

Exercícios Gerais

105) Uma enciclopédia consiste de 8 volumes, numerados de 1 a 8, inicialmente organizados na ordem crescente de seus números.
a) De quantas maneiras podemos colocar estes volumes em uma prateleira?
b) De quantas maneiras podemos colocar estes volumes em uma prateleira de modo que ao menos um volume não esteja ocupando a mesma posição inicial?
c) De quantas maneiras podemos colocar estes volumes em uma prateleira de modo que exatamente um volume não esteja colocado em ordem crescente? Por exemplo, 2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 1, 2, 4, 5, 3, 6, 7, 8.
d) De quantas maneiras podemos selecionar 3 dos 8 volumes de forma que eles não possuam números consecutivos?

106) Um saco de bombons possui 20 bombons pretos, 18 bombons brancos e 16 bombons verdes. Todos os bombons da mesma cor são idênticos.
a) De quantas maneiras é possível retirar do saco ao menos um bombom? A ordem da seleção é irrelevante
b) De quantas maneiras os bombons podem ser divididos entre duas crianças se cada uma deve receber ao menos um bombom?
c) De quantas maneiras os bombons podem ser divididos entre duas crianças se cada uma deve receber ao menos dois bombons de cada cor?
d) De quantas maneiras os bombons podem ser divididos entre três crianças se cada uma deve receber ao menos um bombom de cada cor?

107) a) De quantas maneiras oito estudantes podem ser divididos em dois grupos se cada grupo deve possuir ao menos um estudante?
b) De quantas maneiras oito estudantes podem ser divididos em três grupos se cada grupo deve possuir ao menos um estudante?

108) Calcule quantos número inteiros de 6 algarismos existem de modo que cada algarismo apareça pelo menos duas vezes.

109) Para este problema suponha o alfabeto composto de 5 vogais e 21 consoantes.
a) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas?
b) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas se letras adjacentes devem ser diferentes?

c) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas se deve existir alguma repetição de letras?
d) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas se a palavra deve possuir somente A's e B's, mas deve existir ao menos uma de cada?
e) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas consistindo de 3 A's e 7 B's?
f) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas se a palavra deve consistir de 3 A's e 7 B's, mas nenhum A pode ser adjacente a outro A?
g) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas consistindo de 2 A's, 3 B's e 5 C's?
h) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas se a palavra deve possuir exatamente 3 ou 4 A's?
i) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas se exatamente 3 das letras devem vogais? (Repetição das letras é permitido)
j) Quantas palavras de 10 letras podem ser formadas se exatamente 3 das 10 letras são vogais, mas repetição das letras não é permitido?

110) De quantas maneiras 6 diferentes livros podem ser distribuídos a 3 crianças de modo que cada uma receba pelo menos um livro?

111) Determine o número de maneiras de escolher 5 números dentre os primeiros 18 inteiros positivos de modo que a mínima diferença entre quaisquer dois números escolhidos seja 2.

112) Em cada um dos seguintes números naturais de 6 dígitos:

333333, 225522, 118818, 707099

todo dígito aparece ao menos duas vezes. Determine a quantidade total de números de 6 dígitos com essa propriedade.

113) Determine a soma de todos os números naturais de 3 dígitos com ao menos um dígito par e ao menos um dígito ímpar?

114) De quantos modos podemos distribuir dez cartas de um baralho a dois parceiros, podendo receber quantidades desiguais de cartas, sendo que cada um deve receber ao menos uma carta?

115) Quantos embrulhos é possível formar com cinco livros de matemática, três de física e dois de química, não sendo diferentes os livros da mesma matéria?

116) Determine de quantas maneiras é possível permutar 6 letras A, 7 letras B e 10 letras C de modo que toda letra A esteja entre duas letras B e C, e que duas letras B e C nunca estejam adjacentes.

117) São dados $m > 1$ pontos distintos sobre uma reta r, e $k > 1$ pontos distintos sobre a reta s paralela a r.
a) quantos triângulos podem ser formados com vértices nestes pontos?
b) quantos quadriláteros convexos podem ser formados com vértices nestes pontos?

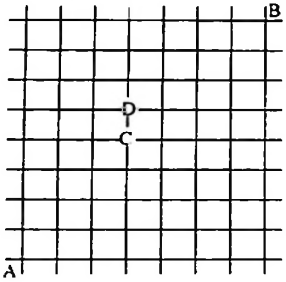
118) Num jogo de pôquer, usa-se um baralho de 32 cartas, distribuindo-se cinco cartas a cada um dos quatro parceiros. Quantas distribuições diferentes podem ocorrer?

119) De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times de basquetebol de 5 jogadores cada, denominados esperança, confiança e vitória?

120) Uma fila de cadeiras no cinema tem 20 poltronas. De quantos modos 6 casais podem se sentar nessas poltronas de modo que nenhum marido se sente separado de sua mulher?

121) De quantos modos diferentes podem ser colocados em fila m + h pessoas, sendo m mulheres de alturas diferentes e h homens também de alturas diferentes, de modo que as pessoas do mesmo sexo fiquem em ordem crescente de altura?

122) A figura abaixo representa 17 ruas que se cortam perpendicularmente, sendo oito verticais. Quantos caminhos mínimos uma pessoa pode percorrer para ir do ponto A ao ponto B:
a) sem restrições?
b) sem passar por C?
c) sem passar por C e D?
d) sem passar por C ou D?



123) De quantos modos seis casais podem sentar-se em torno de uma mesa circular:
a) não sentando juntos dois homens?;
b) não sentando juntos dois homens, mas cada homem sentando ao lado de sua esposa?;
c) não sentando juntos dois homens e nem um homem com sua esposa?

124) Dada a equação $x + y + z = 20$:
a) quantas são as soluções inteiras positivas?;
b) quantas são as soluções inteiras não-negativas?

125) Afirmamos que um número de telefone $d_1d_2d_3\text{-}d_4d_5d_6d_7$ é memorável se a sequência de números do prefixo $d_1d_2d_3$ é a mesma sequência de $d_4d_5d_6$ ou $d_5d_6d_7$ (possivelmente ambos). Assuma que cada d_i pode ser qualquer um dos 10 dígitos decimais: 0, 1, 2, ..., 9. Determine a quantidade de diferentes números de telefones memoráveis.

126) Quantas soluções inteiras da equação $x + y + z + w = 48$ existem, satisfazendo as condições $x > 5$, $y < 6$, $z > 7$ e $w > 8$?

127) Determine a quantidade de números inteiros de 4 dígitos formados usando exatamente dois dígitos distintos.

128) Uma sorveteria tem sorvetes de 11 sabores diferentes. De quantos modos uma pessoa pode escolher 6 sorvetes, não necessariamente de sabores diferentes?

129) Calcule a quantidade de anagramas da palavra TICTAC se duas letras iguais não podem ficar adjacentes.

130) Quantos números inteiros entre 1 e 1.000.000 tem soma de algarismos igual a 5? E soma menor do que 5?

131) Prove que o número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9$ é igual ao número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 9$.

132) Qual o número de soluções inteiras maiores do que 7 de $x + y + z + w = 100$?

133) Determine o número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ se:
a) $x_5 > 12$,
b) $x_5 > 12$ e $x_4 > 7$.

134) Determine o número de soluções inteiras não-negativas de $x + y + z + w = 20$ se:
a) $x \geq 6$,
b) $x \geq 6$ e $y \geq 6$.

135) Das soluções inteiras positivas de $x + y + z + w = 26$, quantas satisfazem $x > y$?

136) De quantas maneiras diferentes podemos escrever números + 1 e − 1 nas 16 casas de um tabuleiro 4×4 de modo que a soma dos números em cada linha e em cada coluna seja igual a 0?

137) Quantos inteiros entre 1 e 1.000.000 inclusive possuem a propriedade de apresentarem pelo menos 2 dígitos consecutivos iguais?

138) De quantas maneiras os dígitos do número **1112223456** podem ser rearranjados de modo que três dígitos iguais nunca fiquem adjacentes?

139) Se n dados idênticos são jogados, quantos resultados distintos são possíveis? (Um resultado é considerado idêntico a outro se apresenta o mesmo número de uns, o mesmo número de dois, ..., o mesmo número de seis).

140) De quantas formas diferentes três números podem ser selecionados entre os números 1, 2, 3, ..., 300 de tal modo que sua soma seja divisível por 3?

141) Uma editora deseja fazer uma doação de livros para as bibliotecas de duas escolas públicas. Estão disponíveis para doação 2n livros iguais do tipo A, 2n livros iguais do tipo B e 2n livros iguais do tipo C. De quantas maneiras a editora pode doar os 6n livros de modo que cada escola ganhe exatamente 3n livros?

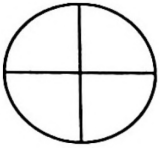
142) De quantos modos podemos arrumar 8 torres iguais em um tabuleiro de xadrez (8×8) de modo que não haja duas torres na mesma linha nem na mesma coluna?

143) Determine a quantidade de anagramas da palavra CARTADA de modo que nenhuma letra ocupe a mesma posição original.

144) De um baralho comum (52 cartas) sacam-se sucessivamente e sem reposição três cartas. Quantas são as extrações nas quais a primeira carta é de copas, a segunda é um rei e a terceira não é uma dama?

145) Quantos números de 4 dígitos existem cuja soma dos dígitos é 10?

146) A figura abaixo mostra um mapa com 4 países



a) De quantos modos esse mapa pode ser colorido (cada país com uma cor, países com uma linha fronteira comum não podem ter a mesma cor) se dispomos de λ cores diferentes?
b) Qual o menor valor de λ que permite colorir o mapa?

147) Um palhaço está a dois passos do final de um trampolim e terá que retirar 10 bolas sendo 5 vermelhas e 5 amarelas. Quando retira uma bola vermelha dá um passo à frente, e quando retira uma bola amarela dá um passo para trás. De quantos modos pode ser feita a tiragem das bolas de modo que o palhaço não caia.

148) Quantas são as permutações dos números (1, 2, ..., 10) nas quais o 5 está situado à direita do 2 e à esquerda do 3, embora não necessariamente em lugares consecutivos?

149) Delegados de 10 países devem sentar-se em 10 cadeiras em fila. De quantos modos isso pode ser feito se os delegados do Brasil e de Portugal devem sentar juntos e do Iraque e dos Estados Unidos não podem sentar juntos?

150) Um cubo de madeira tem uma face de cada cor. Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre essas faces?

151) Quantos dados diferentes podemos formar gravando números de 1 a 6 sobre as faces indistinguíveis de um cubo de madeira?

152) Resolva o problema anterior para:
a) números de 1 a 4, tetraedro regular;
b) números de 1 a 8, octaedro regular;
c) números de 1 a 12, dodecaedro regular;
d) números de 1 a 20, icosaedro regular;
e) números de 1 a 8, prisma hexagonal regular;
f) números de 1 a 5, prisma quadrangular regular.

153) a) Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura exatamente 3 vezes e o dígito 8 exatamente 2 vezes?
b) Quantos são os números naturais de 7 dígitos nos quais o dígito 4 figura pelo menos 3 vezes e o dígito 8 pelo menos 2 vezes?

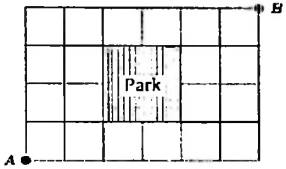
154) São dados, no plano, n pontos tais que entre as retas por eles determinadas não há duas retas paralelas nem três retas concorrentes. Quantos são os pontos de interseção dessas retas que são distintos dos pontos dados?

155) Três garotas A, B e C, e nove garotos devem colocados em linha. De quantas maneiras isto pode ser feito se B deve estar entre A e C e A e B devem

estar separadas por exatamente quatro garotos?

156) Cinco garotas e onze garotos estão em fila de modo que, da esquerda para a direita, as garotas estão na ordem: G_1, G_2, G_3, G_4, G_5. De quantas maneiras estas 16 pessoas podem ser arrumadas de modo que G_1 e G_2 devem ser separadas por ao menos 3 garotos e deve existir no máximo um garoto entre G_4 e G_5?

157) O mapa de um bairro é dado a seguir. O perímetro do parque é uma rua, mas não há rua passando por dentro do parque. Quantos distintos caminhos mínimos existem para ir desde o ponto A até o ponto B?



158) De quantos modos n casais podem formar uma roda de ciranda de modo que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?

159) Numa eleição há 30 votantes e dois candidatos A e B. Se não há votos nulos e nem brancos, e o resultado final é de 10 votos de vantagem em favor de A, quantas são as apurações possíveis nas quais A permanece, após o 3º voto apurado, sempre com no mínimo 2 votos de vantagem sobre B?

160) O conjunto A possui p elementos e o conjunto B possui n elementos. Determine o número de funções f: A→B sobrejetoras para:
a) p = n;
b) p = n + 1;
c) p = n + 2.

161) Quantas são as permutações simples dos números 1, 2, ..., n nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é inferior a k + 4, para todo k?

162) Sejam $I_m = \{1, 2, ..., m\}$ e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$, com $m \leq n$. Quantas são as funções f: $I_m \rightarrow I_n$ estritamente crescentes?

163) $I_m = \{1, 2, ..., m\}$ e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Quantas são as funções f: $I_m \rightarrow I_n$ não decrescentes?

164) Os números inteiros compreendidos entre 1000000 e 999999 são divididos em classes de modo que dois números diferentes estão na mesma classe se e só se eles têm os mesmos algarismos, diferindo apenas na ordem. Assim, por exemplo, 552221 e 125252 estão na mesma classe. Quantas classes são assim formadas?

165) Quantas permutações de 7 letras A e 7 letras B, nas quais não há 3 letras A adjacentes, existem?

166) Quantos inteiros entre 1 e 1000000, inclusive, têm a propriedade: "cada dígito é menor ou igual ao seu sucessor"?

167) Determine o número de permutações de (1, 2, 3, 4, 5, 6) nas quais nem o 4 ocupa o 4º lugar nem o 6 ocupa o 6º lugar.

168) Quantas são as permutações simples dos números 1, 2, ..., n nas quais o elemento que ocupa a k-ésima posição é maior que k – 3, para todo k?

169) Hugo deve ter aula de tênis três vezes por semana, durante um semestre. Quantos são os modos de escolher os dias de aula, se Hugo não deseja ter aulas em dias consecutivos?

170) 5 pessoas devem se sentar em 15 cadeiras colocadas em torno de uma mesa circular. De quantos modos isso pode ser feito se não deve haver ocupação simultânea de duas cadeiras adjacentes?

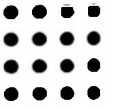
171) Quantos são os anagramas da palavra MISSISSIPI nos quais não há duas letras S consecutivas?

172) Na Liga Profissional Americana de Basquete (NBA) os times campeões das Conferências Leste e Oeste fazem a grande final, que é disputada em uma melhor de 7 jogos, ou seja, o time que primeiro vencer 4 jogos ganha a série. Por exemplo, suponha que a série seja decidida em 5 jogos. Temos as seguintes 8 possibilidades para as sequências de quem vence cada jogo: OLLLL, LOLLL, LLOLL, LLLOL, LOOOO, OLOOO, OOLOO, OOOLO, onde O significa vitória de um time da Conferência Oeste e L significa vitória de um time da Conferência Leste. Determine o número total de séries possíveis.

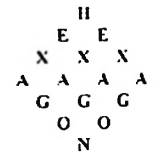
173) De quantos modos podemos formar uma sequência de p elementos iguais a 1 e q elementos iguais a 0 se dois elementos iguais a zero não podem ser adjacentes?

174) De quantas maneiras é possível arranjar 5 bolas vermelhas, 5 verdes e 5 azuis em uma linha de modo que não existam duas bolas azuis adjacentes?

175) Nós temos um quadrado formado por 4 fileiras cada uma com 4 pontos. Quantos triângulos existem com vértices nos pontos? (Os três vértices não podem estar em uma mesma linha)



176) No esquema ao lado, de quantas formas é possível formar a palavra HEXAGON, partindo do H e movendo-se de uma letra somente para as letras diretamente abaixo na esquerda ou direita.



177) Dado um conjunto de $3n + 1$ objetos, assuma que existem n idênticos e $2n + 1$ que são distintos. Prove que você pode escolher n objetos de 4^n maneiras diferentes.

178) De quantas maneiras é possível escolher um número ímpar de objetos de um conjunto de n objetos?

179) Quantos subconjuntos do conjunto {1, 2, 3, ..., n} não contém números consecutivos?

180) Nove pontos são distribuídos ao redor de um círculo de maneira que, quando traçamos todos os segmentos obtidos ligando dois pontos, não existem

três destes segmentos que são colineares. Quantos pontos de interseção existem no interior do círculo?

181) Existem 3 camas em um quarto, uma cama para uma pessoa, uma cama para duas pessoas e uma cama para quatro pessoas. De quantas maneiras podemos distribuir 7 pessoas nestas camas?

182) Em uma loteria 6 números são escolhidos do conjunto $\{1, 2, ..., 49\}$. De quantas maneiras isto pode ser feito de modo que no subconjunto escolhido exista ao menos um par de números consecutivos?

183) De quantas maneiras distintas podemos colocar num tabuleiro de xadrez um rei branco e um preto de modo que um não ataque o outro?

184) Quantos triângulos podem ser formados com os n vértices de um polígono convexo de modo que nenhum lado do triângulo possa ser um lado do polígono?

185) De quantos modos se pode repartir 27 livros diferentes entre as pessoas A, B e C, de modo que A e B, juntas, recebam o dobro de C?

186) Em uma urna há fichas numeradas de 1 até 10. De quantos modos se podem retirar 3 fichas, de maneira que a soma dessas fichas não seja menor do que 9?

187) De quantos modos se pode pintar as faces de uma pirâmide pentagonal regular, usando seis cores diferentes, sendo cada face de uma cor?

188) Determine a fórmula para o número de solução não-negativas de $x + y + z + w = m$ satisfazendo:
a) $x \geq a$,
b) $x \geq a$ e $y \geq b$

189) Uma fábrica de brinquedos produz blocos cúbicos de 2 cm de aresta, cujas faces são pintadas com uma das cores: azul ou vermelho. Alguns blocos são totalmente azuis, alguns são completamente vermelhos, e alguns têm uma mistura de faces azuis e faces vermelhas. Quantas espécies distintas de cubos podem ser fabricadas?

190) Determine quantos números de quatro dígitos existem com exatamente dois dígitos iguais. Por exemplo, 1454, 2800 e 1213 são alguns destes números.

191) As senhas de conta corrente de um banco são constituídas de sete caracteres, os três primeiros são letras (26 possibilidades para cada letra) e os quatro seguintes são dígitos (10 possibilidades para cada dígito). Para entrar com uma senha deve-se inicialmente digitar as três letras e aguardar. Se estiverem corretas aparece um texto pedindo para que sejam digitados os quatro dígitos, porém, se estiverem erradas, então pede-se para digitar novamente as três letras, até que estas estejam corretas. João esqueceu a sua senha, somente lembrando-se que a primeira letra é M e o primeiro dígito é 9. Qual o número máximo de tentativas que João pode fazer para acertar a sua senha?

192) Dez cadeiras estão alinhadas em uma sala. Sete estudantes devem sentar nas cadeiras, não ficando dois estudantes na mesma cadeira. De quantas maneiras isto pode ser feito se não devem existir duas cadeiras adjacentes vazias?

193) Quantos números inteiros existem entre 1000 e 9999 de forma que seus 4 algarismos sejam distintos e o módulo da diferença entre o primeiro e o último algarismo seja 2?

194) No clássico carioca Vasco × Flamengo, o resultado final foi: Vasco 3 × 5 Flamengo. Uma pessoa que não acompanhou o jogo ficou imaginando como poderia ter ocorrido a sequência de gols na partida.
a) de quantas maneiras ela pode imaginar que os gols aconteceram?
b) de quantas maneiras ela pode imaginar que em algum momento o Flamengo perdia por uma diferença de dois gols?
c) de quantas maneiras ela pode imaginar que em algum momento o Flamengo perdia por uma diferença de um gol?

195) Determine de quantas maneiras podemos escolher três elementos distintos do conjunto $\{1, 2, 2^2, 2^3, ..., 2^n\}$ de modo que estes três elementos formem, em alguma ordem, uma progressão geométrica.

196) Clarita sobe uma escada de um em um ou de dois em dois, mas nunca de três em três batentes. Se deve subir a escada de dez batentes pisando obrigatoriamente no sexto batente, onde há um descanso, de quantas maneiras pode fazê-lo?

197) Tem-se 13 pontos cuja maioria pertence a uma reta R e os restantes se acham sobre uma paralela a R. Com estes pontos como vértices, constroem-se todos os triângulos e todos os quadriláteros convexos possíveis. A razão do número de quadriláteros para o número de triângulos é $\frac{14}{11}$. Quantos dos pontos considerados pertencem à reta R?

198) De quantas maneiras é possível colocar 6 anéis diferentes em 4 dedos, considerando que nenhum desses dedos por ficar sem anel e que
a) a ordem dos anéis nos dedos deve ser levada em consideração?
b) a ordem dos anéis nos dedos não deve ser levada em consideração?

199) Suponha que $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ representa o número de maneiras de distribuir n pessoas em k mesas idênticas. Prove que:

$$\sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = n!.$$

200) De quantas maneiras 7 pessoas podem ser distribuídas em 4 meses redondas iguais de modo que nenhuma mesa fique vazia?

Exercícios de Olimpíada

201) (OBM-03) Num tabuleiro 2 × 2, como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: $A > B$, $C > D$, $A > C$ e $B > D$.

A	B
C	D

a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que $B = C$?
b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

202) (México-88) De quantas formas podem ser acomodadas em linha reta sete bolas brancas e cinco negras, de tal maneira que não existam duas bolas negras juntas?

203) (AIME-98) Determine o número de quádruplas ordenadas (a, b, c, d) de inteiros positivos ímpares com soma 98.

204) (AIME-02) Seja S = {1, 2, ... , 10}. Determine o número de pares não-ordenados A e B, onde A e B são subconjuntos disjuntos não-nulos de S.

205) (AIME-02) D é um polígono regular de 12 lados. Quantos quadrados (no plano de D) possuem dois ou mais de seus vértices como vértices de D?

206) (AIME-03) Quantos inteiros de quatro dígitos possuem a soma dos dois primeiros dígitos igual à soma dos dois últimos dígitos?

207) (OBM-99) Quantos números inteiros entre 10 e 1000 possuem seus dígitos em ordem estritamente crescente? (Por exemplo, 47 e 126 são números deste tipo; 52 e 566 não).
a) 90 b) 98 c) 112 d) 118 e) 120

208) (OBM-03) Cinco amigos, Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo, Dernaldo e Ernaldo, devem formar uma fila com outras 30 pessoas. De quantas maneiras podemos formar esta fila de modo que Arnaldo fique na frente de seus 4 amigos?
(Obs.: Os amigos não precisam ficar em posições consecutivas.)
a) $35!$ b) $\frac{35!}{5!}$ c) $\frac{35!}{5}$
d) $\binom{35}{5}5!$ e) $e^{\pi\sqrt{163}}$

209) (Lista Treinamento Cone Sul-04) Um comandante de uma companhia convocou voluntários para a constituição de 11 patrulhas. Todas as patrulhas são formadas por um mesmo número de homens. Por outro lado, cada homem participa de exatamente duas patrulhas e cada duas patrulhas têm exatamente um homem em comum. Determine o número de voluntários e o de integrantes de uma patrulha.

210) (Inglaterra-00) Os sete anões decidiram formar 4 times para competir no Concurso do Milênio. Obviamente, os tamanhos dos times não serão todos iguais. Por exemplo, um time pode consistir de Mestre sozinho, outro de Dunga sozinho, outro de Soneca, Feliz e Ranzinza e outro de Dengoso e Atchim. De quantas maneiras podem ser formados os 4 times? (A ordem dos times ou dos anões nos times não importa, mas cada anão deve fazer parte de exatamente um dos times).
Suponha que a Branca de Neve concorde em fazer parte. De quantas maneiras os 4 times podem ser formados?

211) (Lista Treinamento Cone Sul-00) Quantos números de quatro dígitos existem formados apenas por algarismos ímpares? E somente por algarismos pares?

212) (Lista Treinamento Cone Sul-02) Seja $n \in \mathbb{N}$. Quatro naturais diferentes a, b, c, d são escolhidos do conjunto {1, 2, ..., n} de tal modo que $a + c = b + d$. Mostre que o número de maneiras de fazermos tais escolhas é exatamente $n(n-2)(2n-5)/24$.

213) (Excalibur) Quantos subconjuntos de 3 elementos do conjunto X = {1, 2, 3, ..., 20} existem de modo que o produto dos 3 números no subconjunto seja divisível por 4?

214) (Suécia-86) De quantas maneiras 11 maçãs e 9 peras podem ser divididas entre 4 crianças de modo que cada criança receba cinco frutas? (As maçãs são idênticas, tal qual as peras)

215) (Noruega-96) Quantas contas de banco de 11 dígitos existem usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1's consecutivos?

216) (Grécia-96) Determine o número de funções $f: \{1, 2, ..., n\} \rightarrow \{1995, 1996\}$ que satisfaz a condição que $f(1) + f(2) + ... + f(n)$ é ímpar.

217) (China-86) Considere a equação $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10} = 3$. Quantas soluções inteiras não-negativas possui esta equação?

218) (ARML-99) De quantas maneiras é possível arranjar os números 21, 31, 41, 51, 61, 71 e 81 de modo que a soma de todos quatro números consecutivos é divisível por 3?

219) (China-90) Quantos subconjuntos $\{a_1, a_2, a_3\}$ de {1, 2, ..., 14} satisfazem $a_2 - a_1 \geq 3$ e $a_3 - a_2 \geq 3$?

220) (Baltic Way-95) De quantas maneiras é possível dividir o conjunto {1, 2, ..., 1995} em três subconjuntos dois a dois disjuntos tal que nenhum deles contém um par de números consecutivos?

221) (Vietnã-96) Determine o número de permutações do conjunto {1, 2, ..., n} tal que não apareçam três elementos de 1, 2, 3, 4 consecutivamente.

222) (Polônia-95) Determine o número de subconjuntos de {1, 2, 3, ..., 2n} em que a equação $x + y = 2n + 1$ não possua solução.

223) (Maio-07) Oito crianças, todas de alturas diferentes, devem formar uma fila ordenada do menor ao de maior altura. Diremos que a fila tem exatamente um erro se existe uma criança que está imediatamente de trás de outro mais alto que ele e todos os demais (salvo o primeiro da fila) estão imediatamente de trás de um mais baixo. De quantas maneiras as oito crianças podem formar uma fila com exatamente um erro?

224) (Maio-98) Com seis varetas se constrói uma peça como a da figura. As três varetas exteriores são iguais entre si.

As três varetas interiores são iguais entre si. Deseja-se pintar cada vareta de uma cor só de modo que em cada ponto de união, as três varetas que chegam tenham cores diferentes. As varetas só podem ser pintadas de azul, branco, vermelho ou verde. De quantas maneiras pode-se pintar a peça?

225) (International Talent Search) Uma empresa multinacional possui 250 empregados, cada qual falando várias línguas. Para cada par de empregados (A, B), existe uma língua falada por A e não por B, e existe uma língua falada por B e não por A. Ao menos quantas línguas devem ser faladas na empresa?

226) (Áustria/Polônia-99) Sejam n um inteiro positivo e M = {1, 2, ..., n}. Determine o número de maneiras de formar seis subconjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6 (não necessariamente disjuntos) de M, de modo que cada elemento de M pertença a 0, 3 ou 6 dos conjuntos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 e A_6.

227) (AIME-18) Um sapo está na origem de um sistema de eixos cartesianos. Do ponto (x, y) o sapo pode pular para qualquer um dos pontos: (x + 1, y), (x + 2, y), (x, y + 1) ou (x, y + 2). Determine o número de sequências distintas de pulos de modo que o sapo inicie no ponto (0, 0) e termine no ponto (4, 4).

228) (OBM-13) De quantos modos podemos distribuir 10 bolas brancas e 8 bolas vermelhas em cinco caixas iguais, de modo que em cada caixa haja pelo menos uma bola e que em cada caixa haja um número diferente de bolas brancas?
A) 330 B) 348 C) 512
D) 676 E) 900

229) (OBM-13) Quantos números de quatro algarismos distintos não têm 1 nas unidades, nem 2 nas dezenas, nem 3 nas centenas e nem 4 nos milhares?
A) Menos de 1000
B) Mais de 1000 e menos de 2000
C) Mais de 2000 e menos de 3000
D) Mais de 3000 e menos de 4000
E) Mais de 4000

230) (OBM-16) De quantas maneiras podemos escolher n casas de um tabuleiro $n \times n$, $n > 3$, sem escolher duas casas na mesma linha ou na mesma coluna, sabendo que os quatro cantos do tabuleiro não podem ser escolhidos?
A) $(n-2)(n-3)(n-2)!$ B) $(n-4)(n-1)!$
C) $(n^2-5n+2)(n-2)!$ D) $(n-2)(n-1)!$
E) $(n-2)(n-2)!$

231) (OBM-12) Um painel luminoso é formado por 10 círculos grandes. Dentro de cada círculo há quatro lâmpadas: uma amarela, uma verde, uma vermelha e uma azul. De quantos modos podemos acender o painel de modo que pelo menos uma lâmpada de cada cor fique acesa? Cada círculo pode ter de zero a quatro lâmpadas acesas, ou seja, é permitido duas lâmpadas acesas no mesmo círculo.
A) $(2^{10}-1)^4$ B) $(2^4-1)^{10}$ C) $2^{10}-1$
D) 2^4-1 E) $2^{10}-2^4$

232) (OBM-09) Esmeralda tem cinco livros sobre heráldica em uma estante. No final de semana, ela limpou a estante e, ao recolocar os livros, colocou dois deles no lugar onde estavam antes e os demais em lugares diferentes de onde estavam. De quantas maneiras ela pode ter feito isso?
A) 20 B) 25 C) 30 D) 34 E) 45

233) (OBM-15) Um subconjunto de 5 elementos do conjunto $\{1,2,3,\ldots,20\}$ é dito *largo* se ao colocar os seus elementos em ordem crescente tivermos a propriedade de que a diferença do segundo menos o primeiro é maior que 1, do terceiro para o segundo é maior que 2, do quarto para o terceiro é maior que 3 e do quinto para o quarto é maior que 4. Existem quantos subconjuntos largos?

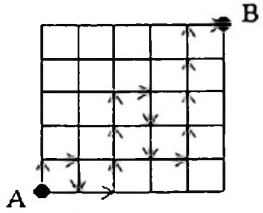
234) (OBM-10) Cada uma das oito casas de um retângulo de duas linhas e quatro colunas é pintada de uma entre três cores. Uma coluna é chamada de *corte* se as suas duas casas são da mesma cor. De quantas maneiras é possível pintar o retângulo de modo que haja exatamente um corte?

235) (OBM-11) Uma sequência de letras, com ou sem sentido, é dita *alternada* quando é formada alternadamente por consoantes e vogais. Por exemplo, EZEQAF, MATEMÁTICA, LEGAL e ANIMADA são palavras alternadas, mas DSOIUF, DINHEIRO e ORDINÁRIO não são. Quantos anagramas da palavra FELICIDADE (incluindo a palavra FELICIDADE) são sequências alternadas?

236) (OBM-10) Dizemos que um número inteiro positivo n é *abestado* se ao lermos da direita para esquerda obtivermos um inteiro maior que n. Por exemplo, 2009 é abestado porque 9002 é maior que 2009, por outro lado, 2010 não é abestado pois 0102, que é o número 102, é menor que 2010 e 3443 não é abestado pois quando lido da direita para esquerda é exatamente igual ao original. Quantos inteiros positivos de quatro algarismos são abestados?

237) (Índia Pre Regional-19) Cinco pessoas estão vestindo camisas com números 1, 2, 3, 4 e 5 e devem se sentar em cinco cadeiras ao longo de uma mesa circular. Determine de quantas maneiras isso pode ser feito se duas pessoas vestindo números consecutivos não podem sentar uma ao lado da outra.

238) (Mercosul-97) De quantas maneiras pode unir-se A com B movendo-se sobre a quadrícula se não está permitido passar duas vezes pelo mesmo lugar e nem mover-se para a esquerda? A figura mostra um caminho possível.



239) (OBM-10) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores

musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

240) (AIME-93) Seja S um conjunto com seis elementos. De quantas maneiras diferentes é possível selecionar dois subconjuntos de S, não necessariamente distintos, de modo que a união dos dois subconjuntos é S? Obs: A ordem da seleção não importa, ou seja, o par de subconjuntos {a, b}, {c, d, e, f} é igual ao par {c, d, e, f}, {a, b}.

241) (AIME-97) De quantas maneiras é possível preencher as casas de um tabuleiro 4×4 com 1 ou – 1 de forma que a soma dos números em cada linha e em cada coluna seja 0?

242) (OBM-05) Num tabuleiro quadrado 5×5, serão colocados três botões idênticos, cada um no centro de uma casa, determinando um triângulo. De quantas maneiras podemos colocar os botões formando um triângulo retângulo com catetos paralelos às bordas do tabuleiro?

243) (AIME-83) Os números 1447, 1005 e 1231 possuem algo em comum: cada um é um número de 4 dígitos iniciando com 1 e possuindo exatamente 2 dígitos iguais. Quantos destes números existem?

244) (AIME-92) Um número inteiro é chamado de "ascendente" se, em sua representação decimal, existe ao menos dois dígitos e cada dígito é menor que seu dígito à direita. Calcule quantos inteiros positivos são "ascendentes".

245) (AIME-93) Determine a quantidade de inteiros pares entre 4000 e 7000 que possuem quatro dígitos distintos.

246) (AIME-96) Duas casas de um tabuleiro 7×7 serão pintadas de amarelo e o restante do tabuleiro será pintado de verde. Duas pinturas são consideradas iguais se uma pode ser obtida a partir de outra rotacionando o tabuleiro. Quantas pinturas diferentes existem?

247) (AIME-04) Determine a quantidade de inteiros positivos menores que 10.000 que são formados por no máximo dois dígitos distintos.

248) (AHSME-19) Calcule a quantidade de sequências de 0's e 1's de comprimento 19, iniciando com 0, terminando com 0, não contendo dois 0's consecutivos nem contendo três 1's consecutivos.

249) (AHSME-17) Um número inteiro positivo é denominado de monótono se possui um dígito ou se seus dígitos, quando lidos da esquerda para a direita, formam uma sequência estritamente crescente ou estritamente decrescente. Por exemplo, 3, 23578 e 987620 são monótonos, enquanto que 88, 7434 e 23557 não são. Quantos números monótonos existem?

250) (AIME-09) Considere o conjunto A = {1, 2, 3, ..., 13, 14}. Calcule a quantidade de subconjuntos de A, com 5 elementos, apresentando ao menos 2 dos 5 elementos sendo números consecutivos.

251) (Math Prize-13) Afirma-se que um número inteiro positivo de 4 dígitos é *mixado* se ele possui 4 dígitos distintos, seu dígito mais à esquerda não é o maior nem o menor dos 4 dígitos e seu dígito mais à direita não é o menor dos 4 dígitos. Por exemplo, 2013 é *mixado*. Quantos inteiros positivos de 4 algarismos são *mixados*?

252) (Princeton-18) Existem 5 esferas em uma fila. Cada uma das esferas deve ser pintada de uma dentre 5 cores disponíveis, não ocorrendo 3 esferas consecutivas da mesma cor. Quantas maneiras diferentes existem de pintar as esferas?

253) (Princeton-18) Em uma eleição entre os candidatos A e B, durante a contagem dos votos, nenhum dos candidatos ficou à frente do outro por mais de 2 votos. Sabe-se que a votação terminou empatada em 6 a 6. Uma possibilidade de apurar os votos é:

AABBABBABABA.

Determine a quantidade total de formas de apurar a eleição.

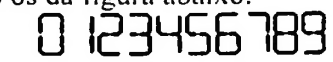
254) (Purple Comet-17) Determine o número de anagramas das letras da palavra MATHMEET que iniciam e terminam com a mesma letra, tal qual TAMEMHET.

255) (Índia Pre Regional-18) Determine o número de maneiras de distribuir 8 chocolates diferentes para 3 crianças de modo que cada criança receba ao menos um chocolate e que não existam duas crianças recebendo a mesma quantidade de chocolates.

256) (Índia Regional-16) Determine a quantidade total de números de 6 algarismos possuindo exatamente 3 algarismos pares e 3 algarismos ímpares.

257) (Índia Regional-15) Suponha que 28 objetos são colocados igualmente espaçados ao longo de uma circunferência. De quantas maneiras 3 objetos podem ser escolhidos de modo que entre eles não existam 2 adjacentes nem 2 diametralmente opostos?

258) (Maio-06) Um calendário digital exibe a data: dia, mês e ano, com 2 dígitos para o dia, 2 dígitos para o mês e 2 dígitos para o ano. Por exemplo, 01-01-01 corresponde a primeiro de janeiro de 2001 e 25-05-23 corresponde a 25 de maio de 2023. Em frente ao calendário há um espelho. Os dígitos do calendário são como os da figura abaixo:



Se 0, 1, 2, 5 e 8 se refletem, respectivamente, em 0, 1, 5, 2 e 8, e os outros dígitos perdem sentido ao se refletirem, determine quantos dias do século, ao se refletirem no espelho, correspondem também a uma data.

259) (Canadian Open Challenge-18) Determine o número de quíntuplas de inteiros $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ tais que

i) $x_i \geq i$ para todo $1 \leq i \leq 5$;

ii) $\sum_{i=1}^{5} x_i = 25$.

BINÔMIO DE NEWTON

6.1. NÚMEROS BINOMIAIS

Já foram apresentadas no capítulo de Contagem algumas fórmulas de envolvem fatoriais em sua definição, como Permutação Simples, Permutação com Repetição, Permutação Circular, Combinação Simples, Arranjos, etc. Algumas dessas fórmulas possuem relações importantes, quer seja envolvendo o termo geral, quer seja envolvendo a soma de alguns termos. Não há muita teoria por trás dos números binomiais, apenas as fórmulas principais de fatorial, arranjos e combinações:

Fatorial

Definição: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$, onde $0! = 1$

Termo recorrente: $n! = n.(n-1)!$

Permutação Circular de e Elementos

Fórmula: $PC_n = (n-1)!$

Permutação com Repetição de n elementos, sendo n_1 iguais, n_2 iguais, ...

Fórmula: $P_n^{n_1,n_2,\cdots} = \dfrac{n!}{n_1!.n_2!...}$

Combinação de n elementos tomados k a k

Fórmula: $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Arranjo de n elementos tomados k a k

Fórmula: $A_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$

Permutação Caótica de n Elementos

Fórmula: $D_n = n!\left(\dfrac{1}{0!} - \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + ... + \dfrac{(-1)^n}{n!}\right)$

Termo Recorrente: $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}$, com $D_1 = 0$ e $D_2 = 1$

Analise agora os exercícios resolvidos para entender melhor como abordar as questões que envolvem relações com os números binomiais.

Exercícios Resolvidos

1) (IME-06) Determine os valores de **x, y, z** e **r** que satisfazem o sistema

$$C_{r+y}^{r} = \log_y x$$

$$\log_y z = 4 + \log_x z$$

$$C_{r+y}^{y} = \log_x z + \log_z z$$

onde C_m^p representa a combinação de **m** elementos tomados **p** a **p** e $\log_c B$ representa o logaritmo de **B** na base **c**.

Solução:

$C_{r+y}^{r} = \log_y x$ (I) $\qquad \log_y z = 4 + \log_x z$ (II) $\qquad C_{r+y}^{y} = \log_x z + \log_z z$ (III)

Fazendo (II) – (III): $\log_y z - C_{r+y}^{y} = 3 \Rightarrow C_{r+y}^{y} = \log_y z - 3$ (IV)

Note que $C_{r+y}^{y} = C_{r+y}^{r}$ (binomiais complementares), logo substituindo (IV) em (I):

$$\log_y x = \log_y z - 3 \Rightarrow \log_y x = \log_y \left(z / y^3\right) \Leftrightarrow x = \frac{z}{y^3}$$

Substituindo $z = xy^3$ em (II):

$$\log_y \left(xy^3\right) = 4 + \log_x \left(xy^3\right) \Rightarrow 3 + \log_y x = 4 + 1 + 3\log_x y \Rightarrow -2 = 3\log_x y - \log_y x \Rightarrow$$

$$3.\left(\log_x y\right)^2 + 2.\left(\log_x y\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow \log_x y = -1 \Rightarrow$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ ou } \log_x y = \frac{1}{3} \Rightarrow x = y^3, x^2 = z \text{ e } y^6 = z.$$

Considerando $x = y^3$, então $C_{r+y}^{r} = 3$, isto é, $r + y = 3$ e $r = 1$, logo $y = 2$, ou $r + y = 3$ e $r = 2$, logo $y = 1$.

Se $y = 2$, então $x = 8$ e $Z = 64$, porém, se $y = 1$, então $x = 1$ e $z = 1$, que é um absurdo.

Considerando $x^{-1} = y$, então $C_{r+y}^{r} = -1$ (absurdo)

Portanto a solução é $x = 8$, $y = 2$ e $z = 64$

2) Calcule o valor de $S = 1!.5 + 2!.11 + ... + n!.(n^2 + 3n + 1)$.

Solução:

Perceba que o termo geral do somatório pode ser desenvolvido de modo a ficar mais simples:

$n!(n^2 + 3n + 1) = n![(n + 2)(n + 1) - 1] = (n + 2)(n + 1)n! - n! = (n + 2)! - n!$

Substituindo $n = 1, 2, 3, 4, ...$

$S = 3! - 1! + 4! - 2! + 5! - 3! + 6! - 4! + ... + (n + 1)! - (n - 1)! + (n + 2)! - n! \Rightarrow$

$S = (n + 1)! + (n + 2)! - 1! - 2! = (n + 1)! + (n + 2)(n + 1)! - 3 \Rightarrow$

$S = (n + 3)(n + 1)! - 3$

3) Considere o produto $P_n = 1! \times 2! \times 3! \times ... \times n!$ onde $n! = 1.2.3... n$ para todo n inteiro positivo. Demonstre que $\frac{P_{2020}}{1010!}$ é um quadrado perfeito.

Solução:

Note que $3! = 3.2!$, $5! = 5.4!$, $7! = 7.6!$, ..., $2019! = 2019.2018!$

Assim, pode-se afirmar que: $P_{2020} = (2!.4!.6!...2018!)^2.(3.5.7...2019).2020!$

Agora faça $2020! = 1.2.3.4.5...2019.2020 = (3.5.7...2019)(2.4.6.8...2020) =$

$= (3.5.7...2019)[(2.1)(2.2)(2.3)...(2.1010)] = 2^{1010}.(3.5.7...2019)^2.1010! \Rightarrow$

$P_{2020} = [2^{510}.(3.5.7...2019)]^2.1010! \Rightarrow \frac{P_{2020}}{1010!}$ é um quadrado perfeito

4) Calcule o valor de $S = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3 - 2k^2 - k + 1}{(k+1)!}$.

Solução:

Como um pouquinho de álgebra é possível encontrar uma expressão algébrica equivalente à $k^3 - 2k^2 - k + 1$ que será muito útil na determinação do somatório:

$k^3 - 2k^2 - k + 1 = (k^3 - k^2 - k + 1) - k^2 = (k^3 - k^2) - (k - 1) - k^2 =$

$= k^2(k - 1) - (k - 1) - k^2 = (k - 1)(k^2 - 1) - k^2 \Rightarrow$

$k^3 - 2k^2 - k + 1 = (k + 1)(k - 1)^2 - k^2$

Assim, o termo geral do somatório pode ser reescrito:

$$\frac{k^3 - 2k^2 - k + 1}{(k+1)!} = \frac{(k+1)(k-1)^2 - k^2}{(k+1)!} = \frac{(k+1)(k-1)^2}{(k+1)!} - \frac{k^2}{(k+1)!} =$$

$$= \frac{\cancel{(k+1)}(k-1)^2}{\cancel{(k+1)}k!} - \frac{k^2}{(k+1)!} = \frac{(k-1)^2}{k!} - \frac{k^2}{(k+1)!}$$

Substituindo $k = 1, 2, 3, ..., n$ segue que:

$$S = \frac{0^2}{1!} - \frac{1^2}{2!} + \frac{1^2}{2!} - \frac{2^2}{3!} + \frac{2^2}{3!} - \frac{3^2}{4!} + ... + \frac{\cancel{(n-1)^2}}{n!} - \frac{n^2}{(n+1)!} \Rightarrow S = -\frac{n^2}{(n+1)!}$$

5) (IME-14) Determine o(s) valor(es) de x, inteiro(s) e positivo(s), que satisfaz(em) a equação $x^2 = \sum_{y=1}^{x} \left[\prod_{z=0}^{y-1} (y - z) \right]$.

Solução:

Note que: $\prod_{z=0}^{y-1} (y - z) = y(y-1)(y-2)...2.1 = y!$

Assim: $x^2 = 1! + 2! + 3! + ... + x!$

Para $x = 1$ tem-se que $1^2 = 1!$, ou seja, $x = 1$ satisfaz a equação

Para $x = 2$ tem-se que $2^2 = 4 \neq 1! + 2! = 3$, ou seja, $x = 2$ não satisfaz a equação

Para $x = 3$ tem-se que $3^2 = 9 = 1! + 2! + 3! = 9$, ou seja, $x = 3$ satisfaz a equação

Para x = 4 tem-se que $4^2 = 16 \neq 1! + 2! + 3! + 4! = 33$, ou seja, x = 4 não satisfaz a equação

Note agora que para $x \geq 5$ tem-se que x! sempre termina em 0.

Assim, para $x \geq 5$ segue que o algarismo das unidades de $1! + 2! + 3! + ... + x!$ é 3, nunca podendo ser um quadrado perfeito.

Deste modo, x = 1 e x = 3 são os únicos inteiros positivos que satisfazem a equação

6) (Olimpíada da Austrália-18) Determine o número formado pelos últimos 3 dígitos da soma $2! + 4! + 6! + ... + 2018!$.

Solução:

Note que $16! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.16 = (1000).2^{12}.3^6.7^2.11.13$, ou seja, 16! termina em 3 zeros e qualquer fatorial maior que 16 também vai terminar em pelo menos 3 zeros.

Além disso, sabe-se que, numa soma, apenas os últimos 3 dígitos de cada elemento da soma definem os últimos 3 dígitos do resultado da soma.

Assim, as parcelas que influenciam nos 3 últimos dígitos são (com seus respectivos últimos 3 dígitos):

$2! = 2$, $4! = 24$, $6! = 720$, $8! = ...320$, $10! = ...800$, $12! = ...600$, $14! = ...200$

Somando apenas os 3 últimos dígitos dessas parcelas obtém-se:

$$S = 2! + 4! + 6! + 8! + 10! + 12! + 14! = ...666$$

Logo, os últimos 3 dígitos de $2! + 4! + 6! + ... + 2018!$ são 666.

7) Prove que se a e b são números naturais, então a!b! divide (a + b)!.

Solução:

Sabemos que a combinação de x elementos tomados y a y ($x \geq y$) é dada por $C_{x,y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$, onde $C_{x,y}$ é um valor inteiro positivo.

Assim, fazendo x = a + b e y = a, temos que $C_{a+b,a} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$, e como este valor é inteiro temos que a!b! divide (a + b)!

Este resultado também pode ser usado pra demonstrar um importante teorema da teoria dos números: "O produto de n inteiros consecutivos é divisível por n!".

Fazendo $P = (a + 1)(a + 2)...(a + n) = (a + n)!/a!$

Do fato que a!b! divide (a + b)!, fazendo b = n, segue que b! divide (a + n)!/a!, ou seja, n! divide (a + 1)(a + 2)...(a + n), que é o produto de n inteiros consecutivos.

6.2. O DESENVOLVIMENTO EM BINÔMIO DE NEWTON

Neste capítulo estudaremos as propriedades do desenvolvimento de $(x + y)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, como soma de parcelas, onde cada parcela é o produto de potências de x e y. Por ter sido estudado inicialmente por Isaac Newton e se tratar da potência de um binômio (dois termos algébricos), o nome desse desenvolvimento é *Binômio de Newton*. Posteriormente veremos que o Binômio de Newton possui uma importante participação no estudo das probabilidades.

Para alguns valores relativamente pequenos de n podemos determinar rapidamente o desenvolvimento em Binômio de Newton de $(x + y)^n$, $n \in \mathbb{N}$, apenas fazendo a multiplicação polinomial das parcelas:

i) $n = 0$: $(x + y)^0 = 1$

ii) $n = 1$: $(x + y)^1 = x + y$

iii) $n = 2$: $(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + xy + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2$

iv) $n = 3$: $(x + y)^3 = (x + y)(x^2 + 2xy + y^2) = x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3 =$
$= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

À medida que aumentamos o valor de n vai ficando cada mais demorado o cálculo na "força bruta" do desenvolvimento em Binômio de Newton de $(x + y)^n$. Vamos agora determinar a expressão geral. Para tanto, vamos escrever $(x + y)^n$ como o produto de n termos $(x + y)$:

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)(x+y)(x+y)...(x+y)}_{\text{n termos}}$$

Assim, para determinarmos cada parcela de $(x + y)^n$ devemos realizar a multiplicação dos n termos $(x + y)$, ou seja, cada parcela de $(x + y)^n$ é obtida escolhendo x ou y em cada um dos n termos $(x + y)$ e multiplicando estes elementos. Assim, nesta multiplicação surgirão parcelas do tipo x^2y^{n-2} ou $x^{n-9}y^9$, entre outras. Por outro lado, note que neste procedimento de multiplicação aparecerão parcelas iguais. Neste caso, devemos somar estas parcelas idênticas e o coeficiente de cada distinta parcela no somatório final vai ser exatamente igual à quantidade de maneiras de obter cada parcela na multiplicação dos n termos $(x + y)$. Assim, na obtenção de $x^{n-p}y^p$ ($p \in \mathbb{N}$, $p \leq n$) devemos escolher $n - p$ elementos x (dentre n no total) e p elementos y (dentre n no total). Note que para isto ocorrer basta indicarmos de quais termos $(x + y)$ vão sair os p elementos y (automaticamente os elementos x sairão dos demais $n - p$ termos). Claramente esta escolha pode ser feita de $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ maneiras, sendo este valor o coeficiente da parcela $x^{n-p}y^p$ no desenvolvimento em Binômio de Newton de $(x + y)^n$. Por este motivo, a combinação de n elementos tomados p a p também recebe o nome de coeficiente binomial.

Uma vez que podemos escolher desde nenhum elemento y até n elementos y na parcela, os coeficientes binomiais são: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n}$ e as parcelas finais do desenvolvimento são $\binom{n}{0}x^n, \binom{n}{1}x^{n-1}y, \binom{n}{2}x^{n-2}y^2, \ldots, \binom{n}{n}y^n$.

Desta forma, o desenvolvimento em Binômio de Newton de $(x + y)^n$ é igual a:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + \binom{n}{p}x^{n-p}y^p + \ldots + \binom{n}{n}y^n$$

Podemos observar alguns detalhes nesta expressão:

i) O número de parcelas distintas no binômio $(x + y)^n$ é sempre igual a $n + 1$;

ii) O termo geral de cada parcela do desenvolvimento em binômio de Newton de $(x + y)^n$ é igual a $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^{n-p}y^p$, $p \in \mathbb{N}$, $0 \le p \le n$.

iii) Se estivéssemos interessados no desenvolvimento em Binômio de Newton de $(x - y)^n$, basta escrevermos o desenvolvimento de $(x + (-y))^n$, cujo termo geral é $T_{p+1} = (-1)^p\binom{n}{p}x^{n-p}y^p$.

iv) Cada parcela se divide em parte literal e coeficiente. No desenvolvimento de $(x + y)^n$, considerando x e y variáveis, a parte literal do termo geral é $x^{n-p}y^p$ e o coeficiente é $\binom{n}{p}$. Entretanto, se x e/ou y possuírem números em suas expressões, estes números passam para o coeficiente em cada parcela. Por exemplo, no desenvolvimento de $(2x + 3)^n$, o termo geral pode ser calculado da seguinte maneira:

$$T_{p+1} = \binom{n}{p}(2x)^{n-p}(3)^p \Rightarrow T_{p+1} = (2)^{n-p}(3)^p\binom{n}{p}x^{n-p}$$

Neste caso, a parte literal do termo geral é igual a x^{n-p} e o coeficiente é igual a $(2)^{n-p}(3)^p\binom{n}{p}$.

v) Em qualquer desenvolvimento binomial a soma dos coeficientes é obtida fazendo as partes literais iguais a 1. Por exemplo, fazendo $x = y = 1$ no desenvolvimento binomial $(3x + 5y)^4$ encontramos que a soma dos coeficientes é igual a $(3 + 5)^4 = 8^4 = 2^{12}$. Por outro lado, no desenvolvimento binomial de $(x - y)^{10}$, fazendo $x = y = 1$ encontramos que a soma dos coeficientes vale $(1 - 1)^{10} = 0$.

vi) Em um Binômio de Newton algumas parcelas podem não possuir uma das variáveis. Neste caso elas são denominadas independentes desta variável. Por

exemplo, no desenvolvimento de $(x + y)^n$. a parcela $\binom{n}{n} y^n$ é independente da variável x.

vii) Em um desenvolvimento binomial os coeficientes binomiais aparecem simétricos em relação à(s) parcela(s) central(is). Em outras palavras, temos que $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$, fato já demonstrado no capítulo sobre Combinações e que recebe o nome de complementariedade dos números binomiais.

Exercícios Resolvidos

1) (AFA-00) Se, no desenvolvimento do binômio $(x + y)^{m+5}$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, o quociente entre os termos que ocupam as posições $(m + 3)$ e $(m + 1)$ é $\frac{2}{3}y^2x^{-2}$, então o valor de m é

a) par. b) primo. c) ímpar. d) múltiplo de 3.

Solução: Alternativa A

A posição $(m + 3)$ ocorre para $p = m + 2$ e a posição $(m + 1)$ ocorre para $p = m$. Portanto:

$$\frac{T_{m+3}}{T_{m+1}} = \frac{\binom{m+5}{m+2} x^{(m+5)-(m+2)} y^{m+2}}{\binom{m+5}{m} x^{(m+5)-(m)} y^{m}} = \frac{\binom{m+5}{m+2}}{\binom{m+5}{m}} x^{-2} y^2$$

Então, podemos escrever que: $\frac{2}{3} = \frac{\binom{m+5}{m+2}}{\binom{m+5}{m}} \Rightarrow 2\binom{m+5}{m} = 3\binom{m+5}{m+2} \Rightarrow$

$$\frac{2.(m+5).(m+4).(m+3).(m+2).(m+1)}{120} = \frac{3.(m+5).(m+4).(m+3)}{6} \Rightarrow$$

$(m + 2)(m + 1) = 30 \Rightarrow m^2 + 3m - 28 = 0 \Rightarrow (m + 7)(m - 4) = 0 \Rightarrow$

$m = 4 \Rightarrow$ m é par

2) (AFA-00) Os coeficientes do quinto, sexto e sétimo termos do desenvolvimento de $(1 + x)^n$ estão em progressão aritmética. Se $n \leq 13$, então o valor de $2n + 1$ é

a) 7 b) 13 c) 15 d) 27

Solução: Alternativa C

O termo geral do desenvolvimento de $(1 + x)^n$ é $T_{p+1} = \binom{n}{p}x^p$. Deste modo, os coeficientes do quinto, sexto e sétimos termos são $\binom{n}{4}$, $\binom{n}{5}$ e $\binom{n}{6}$, respectivamente.

Portanto, para estes termos estarem em progressão aritmética: $2\binom{n}{5} = \binom{n}{4} + \binom{n}{6} \Rightarrow$

$$2\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{120} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{720} \Rightarrow$$

$12(n-4) = 30 + (n-4)(n-5) \Rightarrow 12n - 48 = 30 + n^2 - 9n + 20 \Rightarrow$

$n^2 - 21n + 98 = 0 \Rightarrow (n-7)(n-14) = 0 \Rightarrow n = 7$ ou $n = 14$

Desde que $n \leq 13$, a única solução é $n = 7 \Rightarrow 2n + 1 = 15$.

3) (UFPE-00) Analise as afirmações seguintes acerca da expansão binomial de $(3x + 5)^{13}$.

1) Existem exatamente dois termos com coeficientes que não são divisíveis por 13.
2) A soma dos coeficientes é 2^{39}
3) O maior coeficiente é $3^7.5^8.11.13$
4) O menor coeficiente é 3^{13}
5) A soma dos coeficientes das potências de x com expoentes ímpares é $2^{38} - 2^{12}$

Solução: CCCCC

1) CERTO. O termo geral de $(3x + 5)^{13}$ é igual a:

$$T_{p+1} = \binom{13}{p}(3x)^{13-p}(5)^p = 3^{13-p}.5^5\binom{13}{p}x^{13-p},$$

fazendo com que os coeficientes sejam iguais a:

$$3^{13-p}.5^p\binom{13}{p} = 3^{13-p}.5^p\frac{13!}{p!(13-p)!} = 13\left(3^{13-p}.5^p\frac{12!}{p!(13-p)!}\right).$$

Desde que 13 é primo, cada coeficiente binomial não será divisível por 13 se p! ou $(13 - p)!$ forem divisíveis por 13. Como $0 \leq p \leq 13$, estes fatos ocorrem somente para $p = 13$ ou $p = 0$. Desta forma, existem exatamente dois termos (T_1 e T_{14}) com coeficientes que não são divisíveis por 13.

2) CERTO. A soma dos coeficientes pode ser obtida fazendo $x = 1$:
$S = (3 + 5)^{13} = 8^{13} = 2^{39}$.

3) CERTO. Seja $C_{p+1} = 3^{13-p}.5^p\binom{13}{p}$ a expressão geral dos coeficientes do termo geral T_{p+1}. Vamos resolver a inequação $C_{p+1} \geq C_p$:

$$3^{13-p}.5^p\binom{13}{p} \geq 3^{14-p}.5^{p-1}\binom{13}{p-1} \Rightarrow 5\frac{13!}{p!(13-p)!} \geq 3\frac{13!}{(p-1)!(14-p)!} \Rightarrow$$

$$5\frac{13!}{p(p-1)!(13-p)!}-3\frac{13!}{(p-1)!(14-p)(13-p)!}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{13!}{(p-1)!(13-p)!}\left[\frac{5}{p}-\frac{3}{14-p}\right]\geq 0 \Rightarrow \frac{13!}{(p-1)!(13-p)!}\frac{70-8p}{p(14-p)}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\frac{13!}{p!(14-p)!}(70-8p)\geq 0$$

Como $\frac{13!}{p!(14-p)!}>0$ temos que $70-8p\geq 0 \Rightarrow p\leq 8,75$

Como p é natural, a última inequação é equivalente a $p \leq 8$. Assim, desde $p = 0$ até $p = 8$ podemos afirmar que $C_{p+1} \geq C_p$, implicando que o maior dos coeficientes ocorre para $p = 8$. Deste modo. seu valor é

$$C_9 = 3^5.5^8\frac{13!}{8!.5!} = 3^5.5^8.\frac{13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5} = 3^5.5^8.3^2.11.13 = 3^7.5^8.11.13$$

4) CERTO. No item anterior demonstramos que de $p = 0$ até $p = 8$ os coeficientes binomiais aumentam. Analogamente, se resolvêssemos a inequação $C_{p-1} \geq C_p$, chegaríamos a solução $p \geq 8,75$, ou seja, $p \geq 9$. Assim, desde $p = 9$ até $p = 13$ teremos que os coeficientes binomiais decrescem. Desta maneira, os candidatos a menor coeficiente são os termos T_1 e T_{14}. Como $C_1 = 3^{13}$ e $C_{14} = 5^{13}$, então o menor coeficiente é 3^{13}.

5) CERTO. Observemos que:

$$(3x+5)^{13} = C_1.x^{13} + C_2.x^{12} + C_3.x^{11} + C_4.x^{10} + ... + C_{13}.x + C_{14}$$

Fazendo $x = 1$ obtemos: $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + ... + C_{13} + C_{14} = 2^{39}$

Fazendo $x = -1$ obtemos: $-C_1 + C_2 - C_3 + C_4 - ... - C_{13} + C_{14} = 2^{13}$

Subtraindo estas duas expressões:

$2(C_1 + C_3 + ... + C_{13}) = 2^{39} - 2^{13} \Rightarrow C_1 + C_3 + ... + C_{13} = 2^{38} - 2^{12}$

4) (Olimpíada de São Paulo-00) a) Escreva o termo geral do desenvolvimento de $\left(\sqrt{5}+\sqrt[3]{13}\right)^7$.

b) Determine os termos racionais no desenvolvimento do binômio anterior.

Solução:

a) $T_{p+1} = \binom{7}{p}(5^{1/2})^{7-p}(13^{1/3})^p = \binom{7}{p}5^{\frac{7-p}{2}}13^{\frac{p}{3}}$.

b) Para que T_{p+1} seja racional devemos ter $7 - p$ par e p múltiplo de 3. Para que $7 - p$ seja par temos $p = 1, 3, 5$ ou 7. Para que p seja múltiplo de 3 devemos ter $p = 0, 3$ ou 6. Portanto, a única possibilidade é $p = 3$. Assim, o único termo racional é

$$T_4 = \binom{7}{3}5^2 13^1 = 11375.$$

5) (ITA-90) Sejam os números reais α e x onde $0 < \alpha < \pi/2$ e $x \neq 0$. Se no desenvolvimento de $\left((\cos\alpha)x + \frac{\text{sen}\alpha}{x}\right)^8$ o termo independente de x vale 35/8, então o valor de α é:

a) $\pi/6$ b) $\pi/3$ c) $\pi/12$ d) $\pi/4$ e) nda

Solução: Alternativa D

O termo geral do desenvolvimento é:

$$T_{p+1} = \binom{8}{p}[(\cos\alpha)x]^{8-p}\left[\frac{\text{sen}\alpha}{x}\right]^p = \binom{8}{p}(\cos\alpha)^{8-p}(\text{sen}\alpha)^p x^{8-2p}.$$

O termo independente ocorre quando: $8 - 2p = 0 \Rightarrow p = 4$.

Deste modo: $T_5 = \frac{35}{8} \Rightarrow \binom{8}{4}(\cos\alpha)^4(\text{sen}\alpha)^4 = \frac{35}{8} \Rightarrow (\text{sen}\alpha.\cos\alpha)^4 = \frac{1}{16} \Rightarrow$

$\text{sen}\alpha.\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow 2.\text{sen}\,\alpha.\cos\alpha = 1 \Rightarrow \text{sen}\,2\alpha = 1 \overset{0<\alpha<\pi/2}{\Rightarrow} 2\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

) (ITA-94) No desenvolvimento de $A = \left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3}\right)^{10}$, a razão entre a parcela contendo o fator $a^{16}m^2$ e a parcela contendo o fator $a^{14}m^3$ é igual a 9/16. Se a e m são números reais positivos tais que $A = (m^2 + 4)^5$ então:

a) a.m = 2/3 b) a.m = 1/3 c) a + m = 5/2

d) a + m = 5 e) a – m = 5/2

Solução: Alternativa C

Termo geral:

$$T_{p+1} = \binom{10}{p}\left(\frac{3a^2}{2}\right)^{10-p}\left(\frac{2m}{3}\right)^p = \binom{10}{p}\frac{3^{10-p}.2^p}{2^{10-p}.3^p}a^{20-2p}.m^p = \binom{10}{p}\left(\frac{3}{2}\right)^{10-2p}a^{20-2p}.m^p$$

Portanto: $\frac{T_3}{T_4} = \frac{9}{16} = \frac{45}{120}\frac{3^6}{2^6}\frac{2^4}{3^4}\frac{a^{16}m^2}{a^{14}m^3} = \frac{27a^2}{32m} \Rightarrow 2m = 3a^2 \Rightarrow m = \frac{3a^2}{2}$

Substituindo em A: $\left(\frac{3a^2}{2} + \frac{2m}{3}\right)^{10} = \left(m + \frac{2m}{3}\right)^{10} = \left(\frac{5m}{3}\right)^{10} = \left(m^2 + 4\right)^5 \Rightarrow$

$\frac{5^2m^2}{3^2} = m^2 + 4 \Rightarrow 4 = m^2\left(\frac{5^2 - 3^2}{3^2}\right) = m^2\frac{4^2}{3^2} \Rightarrow m = 3/2 \Rightarrow a^2 = 1 \overset{a\geq 0}{\Rightarrow}$

$a = 1 \Rightarrow a + m = 1 + 3/2 = 5/2$

7) (ITA-97) Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{R}^*$ com $m \geq 10$ e $x \in \mathbb{R}^*$. Seja D o desenvolvimento do binômio $(a + b)^m$, ordenado segundo as potências crescentes de b. Quando $a = x^n$

e $b = x^{-n^2}$, o sexto termo de D fica independente de x. Quando $a = x$ e $b = x^{-1/n}$, o oitavo termo de D se torna independente de x. Então m é igual a

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

Solução: Alternativa B

Na situação inicial: $T_6 = \binom{m}{5}(x^n)^{m-5}(x^{-n^2})^5 = \binom{m}{5}x^{-5n^2+(m-5)n}$

Termo independente: $-5n^2 + (m-5)n = 0 \Rightarrow n(m-5-5n) = 0 \Rightarrow n = \frac{m-5}{5}$

Posteriormente: $T_8 = \binom{m}{7}(x)^{m-7}(x^{-1/n})^7 = \binom{m}{7}x^{-\frac{7}{n}+m-7}$

Termo independente: $-\frac{7}{n} + m - 7 = 0 \Rightarrow -\frac{35}{m-5} + m - 7 = 0 \Rightarrow$

$-35 + m^2 - 12m + 35 = 0 \Rightarrow m^2 - 12m = 0 \overset{m\geq 10}{\Rightarrow} m = 12$

8) (ITA-04) O termo independente de **x** no desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}} - \sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^{12}$ é:

a) $729\sqrt[3]{45}$ b) $972\sqrt[3]{15}$ c) $891\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$ d) $376\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$ e) $165\sqrt[3]{75}$

Solução: Alternativa E

O termo geral de um binômio $(a + b)^n$ é dado por $T_{k+1} = \binom{n}{k}a^{n-k}b^k$

$$T_{k+1} = \binom{12}{k}\left(\sqrt{\frac{3\sqrt[3]{x}}{5x}}\right)^{12-k}\left(-\sqrt[3]{\frac{5x}{3\sqrt{x}}}\right)^k \Rightarrow$$

$$T_{k+1} = \binom{12}{k}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{12-k}\left(-\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^k\left(x^{1/6-1/2}\right)^{12-k}(x^{1/3-1/6})^k \Rightarrow$$

$$T_{k+1} = \binom{12}{k}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{12-k}\left(-\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^k x^{-\frac{1}{3}(12-k)+\frac{k}{6}}$$

Para obtermos o termo independente, temos que ter: $-\frac{1}{3}(12-k)+\frac{1}{6}\cdot k = 0 \Rightarrow k = 8$

Substituindo $k = 8$, temos :

$$T_9 = \binom{12}{8}\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)^{12-8}\left(-\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^{8} \Rightarrow T_9 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{4\cdot 3\cdot 2}\cdot\frac{9}{25}\cdot\frac{25}{9}\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{5}{3}}\right)^{2} \Rightarrow$$

$$T_9 = 495\cdot\sqrt[3]{\frac{5^2}{3^2}} \Rightarrow T_9 = 495\cdot\sqrt[3]{\frac{5^2}{3^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \Rightarrow T_9 = 495\cdot\frac{\sqrt[3]{75}}{3} \Rightarrow T_9 = 165\sqrt[3]{75}$$

9) (IME-89) Determine o coeficiente de x^{-9} no desenvolvimento de:

$$\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^2\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^4}\right)^5$$

Solução:

Note que: $\left(x^2+\frac{1}{x^5}\right)^2\cdot\left(x^3+\frac{1}{x^4}\right)^5 = \left(\frac{x^7+1}{x^5}\right)^2\left(\frac{x^7+1}{x^4}\right)^5 = \frac{(x^7+1)^7}{x^{30}}$

Desta forma, o termo geral do desenvolvimento é $T_{p+1} = \frac{\binom{7}{p}(x^7)^{7-p}}{x^{30}} = \binom{7}{p}x^{19-7p}$

Assim: $19-7p=-9 \Rightarrow 7p=28 \Rightarrow p=4 \Rightarrow T_5 = \binom{7}{4}x^{-9} = 35x^{-9}$

10) (IME-97) Determine o termo máximo do desenvolvimento da expressão:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{65}$$

Solução:

O termo geral do desenvolvimento é $T_{p+1} = \binom{65}{p}\left(\frac{1}{3}\right)^p = \binom{65}{p}3^{-p}$.

Vamos agora resolver a inequação $T_{p+1} \geq T_p$:

$$\binom{65}{p}3^{-p} \geq \binom{65}{p-1}3^{-p+1} \Rightarrow \frac{65!}{p(p-1)!(65-p)!} \geq 3\frac{65!}{(p-1)!(66-p)(65-p)!} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} \geq \frac{3}{66-p} \Rightarrow \frac{1}{p}-\frac{3}{66-p} \geq 0 \Rightarrow \frac{66-4p}{p(66-p)} \geq 0$$

Como $p(66-p) > 0$, temos que $66-4p \geq 0 \Rightarrow p \leq 16{,}5$

Desta maneira, como p é inteiro, desde $p = 0$ até $p = 16$ temos que os coeficientes vão crescendo, fazendo com que o maior deles ocorra para $p = 16 \Rightarrow$

$$T_{max} = T_{17} = \binom{65}{16}3^{-16}.$$

11) (Olimpíada de São Paulo-02) Mostre que $46^{47} + 48^{47}$ é divisível por 47^2.

Solução:

Note que podemos escrever $46^{47} + 48^{47}$ como a soma de dois desenvolvimentos binomiais:

$$(47-1)^{47}+(47+1)^{47}=47^{47}-\binom{47}{1}47^{46}+\ldots+\binom{47}{46}47-1+47^{47}+\binom{47}{1}47^{46}+\ldots+\binom{47}{46}47+1 \Rightarrow$$

$$46^{47}+48^{47}=2\left[47^{47}+\binom{47}{2}47^{45}+\binom{47}{4}47^{43}+\binom{47}{6}47^{41}+\ldots+\binom{47}{44}47^{3}+\binom{47}{46}47\right]$$

Como $\binom{47}{46}=47$, então todos os termos binomiais de $46^{47} + 48^{47}$, que são da forma $2\binom{47}{2k}47^{47-2k}$, são divisíveis por 47^2, fazendo com que $46^{47} + 48^{47}$ seja divisível por 47^2.

12) (Olimpíada AIME-00) Os números inteiros positivos m e n são primos entre si. Os coeficientes de x^2 e x^3 na expansão de $(mx + n)^{2000}$ são iguais. Determine o valor de m + n.

Solução:

O termo geral de $(mx + n)^{2000}$ é:

$$T_{p+1}=\binom{2000}{p}(mx)^{2000-p}(n)^{p}=\binom{2000}{p}m^{2000-p}n^{p}x^{2000-p}.$$

Deste modo, temos que: $T_{1999}=\binom{2000}{1998}m^{2}n^{1998}x^{2}$ e $T_{1998}=\binom{2000}{1997}m^{3}n^{1997}x^{3}$.

Assim: $\binom{2000}{1998}m^{2}n^{1998}=\binom{2000}{1997}m^{3}n^{1997} \Rightarrow$

$$\frac{(2000)(1999)}{2}n=\frac{(2000)(1999)(1998)}{2.3}m \Rightarrow n=666.m$$

Como mdc (m, n) = 1 temos que n = 1 e m = 666 $\Rightarrow$ m + n = 667.

13) (IME-73) Prove, aplicando o Princípio da Indução, que se $n \in \mathbb{N}^*$ e $p \in \mathbb{Z}$- é um número primo, então $n^p - n$ é divisível por p.

Solução:

i) Para n = 1 temos que $1^p - 1 = 0$, que é divisível por qualquer primo p.

ii) Suponhamos que exista um natural n tal que $n^p - n$ é divisível por p.

iii) $(n+1)^{p}-(n+1)=\binom{p}{0}n^{p}+\binom{p}{1}n^{p-1}+\binom{p}{2}n^{p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}n+\binom{p}{p}-n-1 \Rightarrow$

$$(n+1)^p-(n+1)=(n^p-n)+\left[\binom{p}{1}n^{p-1}+\binom{p}{2}n^{p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}n\right]$$

Uma vez que $\binom{p}{k}=\frac{p!}{k!(p-k)!}=p\frac{(p-1)!}{k!(p-k)!}$ e p é primo, então para $1 \le k \le p-1$ temos que $\binom{p}{k}$ é divisível por p.

Desde que (n^p-n) é visível por p e $\binom{p}{1}n^{p-1}+\binom{p}{2}n^{p-2}+\ldots+\binom{p}{p-1}n$ é divisível por p, então temos que $(n+1)^p-(n+1)$ é divisível por p, que completa a indução.

14) (IME-82) Calcule o coeficiente do termo em x^3, no desenvolvimento de $(2x-3)^4(x+2)^5$.

Solução:

Esquematicamente podemos escrever:

$(2x-3)^4(x+2)^5=(C_1x^4+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5)(D_1x^5+D_2x^4+D_3x^3+D_4x^2+D_5x+D_6)$

Desta forma, o coeficiente do termo em x^3 é: $C_2D_6+C_3D_5+C_4D_4+C_5D_3$

Pelos termos gerais dos desenvolvimentos concluímos que:

$$C_{p+1}=(-1)^p\binom{4}{p}2^{4-p}3^p \text{ e } D_{p+1}=\binom{5}{p}2^p.$$

Assim, o coeficiente do termo em x^3 é igual a:

$$-\binom{4}{1}2^3.3.\binom{5}{5}2^5+\binom{4}{2}2^2.3^2.\binom{5}{4}2^4-\binom{4}{3}2.3^3.\binom{5}{3}2^3+\binom{4}{4}3^4.\binom{5}{2}2^2=168.$$

6.3. RELAÇÃO DE STIFEL

Se $n \in \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$, então $\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}$.

1ª Demonstração:

$$\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)!}+\frac{n!}{p!(n-p)!}=\frac{n!}{(p-1)!(n-p+1)(n-p)!}+\frac{n!}{(p)(p-1)!(n-p)!}=$$

$$=\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left[\frac{1}{n-p+1}+\frac{1}{p}\right]=\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}\left[\frac{n+1}{p(n-p+1)}\right]=\frac{(n+1)n!}{(p)(p-1)!(n-p+1)(n-p)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{p!(n-p+1)!}=\binom{n+1}{p}$$

2ª Demonstração:

Vamos lançar mão de um argumento combinatório para demonstrar a relação de Stifel. Suponha que você tem n + 1 objetos distintos para escolher p deles, sendo que dentre os n + 1 objetos distintos está o objeto x. Evidentemente você pode escolher os p objetos de $\binom{n+1}{p}$ maneiras. Outra maneira contar é escolhendo os p objetos considerando que o objeto x deve estar na escolha e depois escolher os p objetos considerando que o objeto x agora não será escolhido. Escolhendo p objetos, sendo um deles o objeto x, temos $\binom{n}{p-1}$ possibilidades. Para escolher p objetos, sem o objeto x ser escolhido, temos $\binom{n}{p}$ possibilidades. Como se tratam de duas maneiras diferentes de contar a mesma situação, temos que as quantidades calculadas por cada método de contagem devem ser iguais, ou seja: $\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}$.

6.4. TRIÂNGULO DE PASCAL

A relação de Stifel permite que se monte uma tabela relacionando os valores dos coeficientes binomiais. Como $\binom{n}{p-1}+\binom{n}{p}=\binom{n+1}{p}$, então se montarmos uma tabela em que na vertical apareçam consecutivamente os valores de n (iniciando de 0) e na horizontal apareçam consecutivamente os valores de p (também iniciando de 0), teremos que os números binomiais $\binom{n}{p-1}$ e $\binom{n}{p}$ são dois elementos consecutivos

em uma mesma linha da tabela, enquanto que o número binomial $\binom{n+1}{p}$ é o elemento da tabela exatamente abaixo de $\binom{n}{p}$. Esquematicamente:

$$\begin{matrix}\binom{n}{p-1} & + & \binom{n}{p} \\ & & \Downarrow \\ & & \binom{n+1}{p}\end{matrix}$$

Assim, podemos montar a seguinte tabela:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	$\binom{0}{0}$								
1	$\binom{1}{0}$	$\binom{1}{1}$							
2	$\binom{2}{0}$	$\binom{2}{1}$	$\binom{2}{2}$						
3	$\binom{3}{0}$	$\binom{3}{1}$	$\binom{3}{2}$	$\binom{3}{3}$					
4	$\binom{4}{0}$	$\binom{4}{1}$	$\binom{4}{2}$	$\binom{4}{3}$	$\binom{4}{4}$				
5	$\binom{5}{0}$	$\binom{5}{1}$	$\binom{5}{2}$	$\binom{5}{3}$	$\binom{5}{4}$	$\binom{5}{5}$			
6	$\binom{6}{0}$	$\binom{6}{1}$	$\binom{6}{2}$	$\binom{6}{3}$	$\binom{6}{4}$	$\binom{6}{5}$	$\binom{6}{6}$		
7	$\binom{7}{0}$	$\binom{7}{1}$	$\binom{7}{2}$	$\binom{7}{3}$	$\binom{7}{4}$	$\binom{7}{5}$	$\binom{7}{6}$	$\binom{7}{7}$	
8	$\binom{8}{0}$	$\binom{8}{1}$	$\binom{8}{2}$	$\binom{8}{3}$	$\binom{8}{4}$	$\binom{8}{5}$	$\binom{8}{6}$	$\binom{8}{7}$	$\binom{8}{8}$

Observe que a soma de dois números consecutivos em uma mesma linha é igual ao elemento da tabela imediatamente abaixo no último elemento da soma. Por exemplo, $\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=15+20=35=\binom{7}{3}$.

Substituindo os coeficientes binomiais pelos seus valores numéricos obtemos o seguinte triângulo:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Este triângulo é denominado de Triângulo de Pascal e os elementos na linha n (iniciando de n = 0) são iguais aos coeficientes binomiais $\binom{n}{p}$, $p \in IN$, $0 \leq p \leq n$.

Portanto, para determinar o desenvolvimento binomial $(x + y)^6$ é suficiente tomarmos como coeficientes das parcelas os números na linha n = 6 do Triângulo de Pascal. Assim: $(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$.

6.4.1. Propriedades do Triângulo de Pascal

6.4.1.1. Teorema das Linhas

A soma dos números binomiais em uma linha do Triângulo de Pascal é igual a uma potência de 2 cujo expoente é a ordem da linha.

Observe os casos seguintes:

Linha 0: 1 soma: 2^0
Linha 1: 1 1 soma: 2^1
Linha 2: 1 2 1 soma: 2^2
Linha 3: 1 3 3 1 soma: 2^3
Linha 4: 1 4 6 4 1 soma: 2^4
Linha 5: 1 5 10 10 5 1 soma: 2^5

Algebricamente podemos escrever esta propriedade como:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n,\ n \in IN$$

1ª Demonstração:

Sabemos que $(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + ... + \binom{n}{n}y^n$.

Fazendo x = 1 e y = 1 temos diretamente que:

$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}.1 + \binom{n}{2}1^{n-2}1^2 + ... + \binom{n}{n}1^n \Rightarrow$

$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$

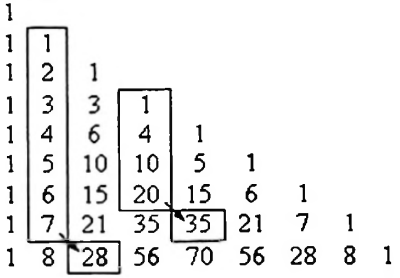
2ª Demonstração:

Vamos usar um argumento combinatório para demonstrar o Teorema das Linhas. Suponha que você possui uma urna com n objetos todos distintos. Suponha que você deseja calcular o número de maneiras de escolher uma quantidade qualquer de objetos. Se você quiser escolher nenhum objeto existem $\binom{n}{0}$ possibilidades, se você quiser escolher um objeto existem $\binom{n}{1}$ possibilidades, se você quiser escolher dois objetos existem $\binom{n}{2}$ possibilidades, assim por diante, até escolher n objetos, onde existem $\binom{n}{n}$ objetos. Assim, existem $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n}$ possibilidades de escolher alguma quantidade de objetos dentre n distintos. Uma outra forma de contar a mesma situação é analisar se cada objeto vai figurar ou não na escolha. Para o 1º objeto temos duas possibilidades: figura ou não na escolha. Para o 2º objeto temos também duas possibilidades, assim por diante, até o nº objeto, onde temos novamente duas possibilidades. Desta forma, o número de possibilidades é igual a $2.2...2 = 2^n$. Como temos duas maneiras de contar a mesma situação, então podemos afirmar que $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n} = 2^n$.

6.4.1.2. Teorema das Colunas

A soma dos números binomiais de uma mesma coluna, iniciando do primeiro elemento e terminando em um elemento qualquer de uma mesma coluna, é igual ao número binomial que fica diagonalmente abaixo, à direita, do último número binomial da soma.

Observe o esquema seguinte:



Esta propriedade pode ser expressa algebricamente por:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

1ª Demonstração:

Vamos escrever algumas relações de Stifel:

$$\binom{n+1}{n}+\binom{n+1}{n+1}=\binom{n+2}{n+1}$$

$$\binom{n+2}{n}+\binom{n+2}{n+1}=\binom{n+3}{n+1}$$

$$\binom{n+3}{n}+\binom{n+3}{n+1}=\binom{n+4}{n+1}$$

...

$$\binom{n+p-1}{n}+\binom{n+p-1}{n+1}=\binom{n+p}{n+1}$$

$$\binom{n+p}{n}+\binom{n+p}{n+1}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Somando todas estas expressões e cortando os termos iguais que aparecem nos dois lados da igualdade:

$$\binom{n+1}{n+1}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

Uma vez que $\binom{n+1}{n+1}=\binom{n}{n}=1$, temos:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\binom{n+3}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

2ª Demonstração:

Considere a seguinte progressão geométrica: $x(1+x)^n$, $x(1+x)^{n+1}$, ..., $x(1+x)^{n+p}$. Sabemos que a soma dos seus termos é igual a:

$$x(1+x)^n+x(1+x)^{n+1}+\ldots+x(1+x)^{n+p}=\frac{x(1+x)^n[(1+x)^{p+1}-1]}{(1+x)-1}=(1+x)^{n+p+1}-(1+x)^n$$

Igualando os coeficientes de x^{n+1} nos dois lados da igualdade acima:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$$

3ª Demonstração:

Considere o seguinte conjunto: A = {1, 2, 3, ..., n + p + 1}. Sabemos que existem exatamente $\binom{n+p+1}{n+1}$ subconjuntos de A com n + 1 elementos. Vamos organizar outra forma de contar de quantas maneiras podemos formar subconjuntos de A com n + 1 elementos. Seja M o maior elemento de cada um destes subconjuntos. Podemos observar que M varia desde n + 1 até n + p + 1. Analisemos caso a caso:

- M = n + 1: existem exatamente $\binom{n}{n}$ subconjuntos;
- M = n + 2: existem exatamente $\binom{n+1}{n}$ subconjuntos;
- M = n + 3: existem exatamente $\binom{n+2}{n}$ subconjuntos;

...

- M = n + p + 1: existem $\binom{n+p}{n+1}$ subconjuntos.

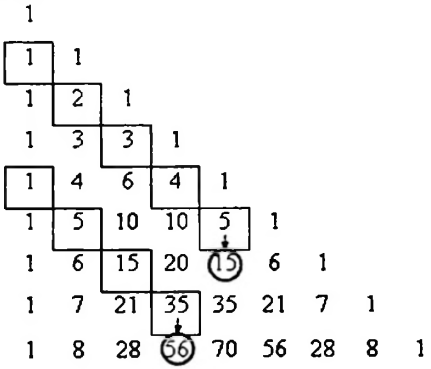
Logo, outro modo de contar o número de subconjuntos de A com exatamente n + 1 elementos é $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}$. Como se tratam de duas maneiras distintas de contar a mesma situação, temos que:

$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}.$$

6.4.1.3. Teorema das Diagonais

A soma dos números binomiais, situados na mesma diagonal, iniciando de um elemento na primeira coluna, é igual ao número binomial imediatamente abaixo do último elemento do somatório.

Observe o esquema abaixo:



Esta propriedade pode ser expressa algebricamente por:

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$$

1ª Demonstração:

Pelo Teorema das Colunas temos $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+\ldots+\binom{n+p}{n}=\binom{n+p+1}{n+1}$.

Substituindo cada uma destas parcelas número binomial complementar:

$$\binom{n}{n-n}+\binom{n+1}{n+1-n}+\binom{n+2}{n+2-n}+\ldots+\binom{n+p}{n+p-n}=\binom{n+p+1}{(n+p+1)-(n+1)} \Rightarrow$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\ldots+\binom{n+p}{p}=\binom{n+p+1}{p}$$

2ª Demonstração:

Considere a seguinte progressão geométrica: $(1+x)^n x^n$, $(1+x)^{n+1}x^{n-1}$, ..., $(1+x)^{2n}$, com n + 1 termos e razão igual a $\frac{1+x}{x}$, cuja soma dos elementos é igual a:

$$(1+x)^n x^n + (1+x)^{n+1} x^{n-1} + \ldots + (1+x)^{2n} = \frac{(1+x)^n x^n \left[\left(\frac{1+x}{x}\right)^{n+1} - 1\right]}{\frac{1+x}{x} - 1} =$$

$$= (1+x)^{2n+1} - (1+x)^n x^{n+1}$$

Igualando os coeficientes dos termos de x^n nos dois lados da igualdade acima temos diretamente que:

$$\binom{n}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \ldots + \binom{n+p}{p} = \binom{n+p+1}{p}$$

Exercícios Resolvidos

1) (FGV-05) Se $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \frac{n^2-n}{2}$, então n é igual a:

a) 4 b) 6 c) 9 d) 5 e) 8

Solução: Alternativa E

Pela relação de Stifel temos que $\binom{n-1}{5} + \binom{n-1}{6} = \binom{n}{6}$. Por outro lado, como $\frac{n^2-n}{2} = \binom{n}{2}$, então temos a equação $\binom{n}{6} = \binom{n}{2}$, que somente possui solução se os coeficientes binomiais forem complementares: n = 6 + 2 = 8.

2) (UECE-09) O quadro numérico a seguir é conhecido como o triângulo de Pascal-Tartaglia:

1ª linha: 1

2ª linha: 1 1

3ª linha: 1 2 1

4ª linha: 1 3 3 1

5ª linha: 1 4 6 4 1

6ª linha: 1 5 10 10 5 1

.....

e assim sucessivamente.

Observando a lógica construtiva do quadro anterior, podemos concluir que a soma do segundo elemento da 2009ª linha com o penúltimo elemento da linha imediatamente anterior é

A) 4015. B) 4017. C) 4019. D) 4021.

Solução: Alternativa A

Sabe-se que cada elemento da linha n do triângulo de Pascal é uma combinação do tipo $C_{n,k}$, onde k é a posição do elemento.

Assim, a soma pedida vale $C_{2009,1} + C_{2008,2007} = 2009 + 2008 = 4015$.

3) (AFA-99) O valor de m que satisfaz a expressão $\sum_{k=0}^{m} 3^k \binom{m}{k} = 1024$ é

a) 2. b) 3. c) 4. d) 5.

Solução: Alternativa D

Observe que $\sum_{k=0}^{m} 3^k \binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (1)^{m-k} (3)^k$, ou seja, podemos encarar a soma dada como um desenvolvimento em binômio de Newton. Assim:

$$\sum_{k=0}^{m} 3^k \binom{m}{k} = (1+3)^m = 4^m = 1024 = 4^5 \Rightarrow m = 5.$$

4) Demonstre que o coeficiente de x^m na expansão da expressão:

$$(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \ldots + (1+x)^n$$

é igual a $\binom{n+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}$.

Solução:

O coeficiente de x^m em $(1+x)^k + (1+x)^{k+1} + \ldots + (1+x)^n$ é igual à soma dos coeficientes de x^m em cada desenvolvimento $(1+x)^m$, $k \le m \le n$.

Portanto, o coeficiente de x^m é:

$$\binom{k}{m} + \binom{k+1}{m} + \binom{k+2}{m} + \ldots + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m}.$$

Pelo teorema das colunas podemos afirmar que:

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots + \binom{k-1}{m} + \binom{k}{m} + \binom{k+1}{m} + \binom{k+2}{m} + \ldots + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

$$\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots + \binom{k-1}{m} = \binom{k}{m+1}$$

Subtraindo estas duas expressões:

$$\binom{k}{m} + \binom{k+1}{m} + \binom{k+2}{m} + \ldots + \binom{n-1}{m} + \binom{n}{m} = \binom{n+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}$$

5) (IME-00) Determine o polinômio em n, com no máximo 4 termos, que representa o somatório dos quadrados dos n primeiros números naturais $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Solução:

Note que: $S = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 \Rightarrow$

$S = 1.(2-1) + 2.(3-1) + 3.(4-1) + ... + n.[(n+1)-1] \Rightarrow$

$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n+1) - (1 + 2 + 3 + ... + n) \Rightarrow$

$$S = 2\left[\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + ... + \frac{n(n+1)}{2}\right] - \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\binom{2}{2} + \binom{3}{2} + \binom{4}{2} + ... + \binom{n+1}{2}\right] - \frac{n(n+1)}{2}$$

Pelo Teorema das Colunas:

$$S = 2\binom{n+2}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)n}{3} - \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n}{6}[2n+4-3] \Rightarrow$$

$$S = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$$

6) Demonstrar a identidade: $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n} = n.2^{n-1}$

Solução:

Vamos desenvolver o termo geral do somatório:

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\frac{n(n-1)!}{k(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Portanto, podemos reescrever o somatório proposto da seguinte maneira:

$$S = n\binom{n-1}{0} + n\binom{n-1}{1} + n\binom{n-1}{2} + ... + n\binom{n-1}{n-1} = n\left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{2} + ... + \binom{n-1}{n-1}\right]$$

Pelo Teorema das Linhas temos que: $S = n.2^{n-1}$.

7) Verificar que, quando n é ímpar: $2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1}$

Solução:

Considere o seguinte desenvolvimento binomial:

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{n}x^n$$

Fazendo $x = 1$ e $x = -1$ obtemos (lembre-se que n é ímpar):

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \quad \text{e} \quad 0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - ... + \binom{n}{n-1} - \binom{n}{n}$$

Somando estas duas expressões:

$$2^n = 2\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}\right] \Rightarrow 2^{n-1} = \binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}.$$

8) Prove que: $1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) = (n+3)(n+2)(n+1)n/4$.

Solução:

$S = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + n(n+1)(n+2) =$

$$= 3!\left(\frac{1.2.3}{3!}+\frac{2.3.4}{3!}+\frac{3.4.5}{3!}+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\right) =$$

$$= 3!\left[\binom{3}{3}+\binom{4}{3}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{n+2}{3}\right]$$

Aplicando o Teorema das Colunas obtemos:

$$S = 3!\binom{n+3}{4} = 6\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{24} \Rightarrow S = \frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)}{4}$$

9) Calcule $\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k$.

Solução:

Vamos desenvolver o termo geral do somatório:

$$a_k = k(k-1)\binom{n}{k}2^k = k(k-1)\frac{n!}{k!(n-k)!}2^k = k(k-1)\frac{n(n-1)(n-2)!}{k(k-1)(k-2)!(n-k)!}4.2^{k-2} =$$

$$= 4n(n-1)\frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-k)!}2^{k-2} = 4n(n-1)\binom{n-2}{k-2}2^{k-2}$$

Desta forma, o somatório pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$S = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k = \sum_{k=0}^{n} 4n(n-1)\binom{n-2}{k-2}2^{k-2} = 4n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}2^{k-2}$$

Por outro lado: $\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}2^{k-2} = \sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}(1)^{n-k}(2)^{k-2} = (1+2)^{n-2} = 3^{n-2}$

Consequentemente: $S = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}2^k = 4n(n-1)3^{n-2}$

10) Demonstrar que: $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

1ª Solução:

Vamos lançar mão de um argumento combinatório para demonstrar a expressão. Suponha que você tem 2n objetos distintos e quer escolher n. Claramente esta escolha

pode ser feita de $\binom{2n}{n}$ maneiras. Separe agora aleatoriamente os 2n objetos em duas urnas, cada uma com n objetos. Neste caso, as escolhas dos n objetos podem ser feitas escolhendo 0 objetos da urna 1 e n objetos na urna 2 ou 1 objeto da urna 1 e $n-1$ objetos da urna 2 ou 2 objetos da urna 1 e $n-2$ objetos da urna 2, assim sucessivamente, até n objetos da urna 1 e 0 objetos da urna 2. Portanto, outra forma de contar o número de maneiras de escolher os n objetos é $\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$. Lembrando que $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, podemos reescrever esta última expressão como $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$.

Como se tratam de duas maneiras de contar a mesma situação, os dois números calculados são iguais, ou seja, podemos afirmar que:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$$

2ª Solução:

Considere a seguinte expressão polinomial: $(x+1)^{2n}=(x+1)^n(x+1)^n$.

Desenvolvendo em binômio de Newton:

$$\binom{2n}{0}x^{2n}+\binom{2n}{1}x^{2n-1}+\ldots+\binom{2n}{n}x^n+\ldots+\binom{2n}{2n}=\left[\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\right]\left[\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n}\right]$$

Repare que no lado esquerdo da igualdade o coeficiente de x^n é igual a $\binom{2n}{n}$. No lado direito da igualdade podemos obter uma parcela x^n multiplicando um termo $\binom{n}{k}x^{n-k}$ da 1ª expressão com um termo $\binom{n}{n-k}x^k$ da 2ª expressão. Deste modo, o coeficiente de x^n no lado direito da igualdade é igual a $\binom{n}{0}\binom{n}{n}+\binom{n}{1}\binom{n}{n-1}+\binom{n}{2}\binom{n}{n-2}+\ldots+\binom{n}{n}\binom{n}{0}$. Como $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, então esta última expressão é idêntica a $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2$. Como o coeficiente de x^n nos dois lados da igualdade há de ser o mesmo, concluímos que:

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\ldots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

11) (IME-93) Prove, por indução, que $(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + \ldots + C_n^n\, b^n$ para $n \in IN^*$.

Solução:

i) Para n = 1 temos que $(a+b)^1 = C_1^0 a^1 + C_1^1 b^1$

ii) Suponhamos que exista $n \in IN^*$ tal que $(a+b)^n = C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + \ldots + C_n^n\, b^n$

iii) Vamos agora desenvolver a expressão de $(a+b)^{n+1}$:

$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left(C_n^0\, a^n + C_n^1\, a^{n-1}\, b + \ldots + C_n^n\, b^n\right) \Rightarrow$

$(a+b)^{n+1} = C_n^0 a^{n+1} + \left(C_n^0 + C_n^1\right)a^n b + \left(C_n^1 + C_n^2\right)a^{n-1}b^2 + \ldots + \left(C_n^{n-1} + C_n^n\right)ab^n + C_n^n b^{n+1}$

Desde que $C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1$, $C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1$ e $C_n^p + C_n^{p+1} = C_{n+1}^{p+1}$ (relação de Stifel), então podemos afirmar que:

$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^0 a^{n+1} + C_{n+1}^1 a^n b + C_{n+1}^2 a^{n-1}b^2 + \ldots + C_{n+1}^n ab^n + C_{n+1}^{n+1} b^{n+1}$,

que completa a demonstração por indução.

12) (AIME-00) Determine o valor da soma $\dfrac{1}{2!.17!} + \dfrac{1}{3!.16!} + \ldots + \dfrac{1}{9!.10!}$.

Solução:

Vamos fazer algumas transformações no somatório de modo que apareçam coeficientes binomiais.

$$S = \frac{1}{2!.17!} + \frac{1}{3!.16!} + \ldots + \frac{1}{9!.10!} \Rightarrow$$

$$2.S = \frac{1}{2!.17!} + \frac{1}{3!.16!} + \ldots + \frac{1}{9!.10!} + \frac{1}{10!.9!} + \ldots + \frac{1}{16!.3!} + \frac{1}{17!.2!} \Rightarrow$$

$$2.19!.S = \frac{19!}{2!.17!} + \frac{19!}{3!.16!} + \ldots + \frac{19!}{9!.10!} + \frac{19!}{10!.9!} + \ldots + \frac{19!}{16!.3!} + \frac{19!}{17!.2!} \Rightarrow$$

$$2.19!.S = \binom{19}{2} + \binom{19}{3} + \ldots + \binom{19}{9} + \binom{19}{10} + \ldots + \binom{19}{16} + \binom{19}{17} \Rightarrow$$

$$2.19!.S + \binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{18} + \binom{19}{19} =$$

$$= \binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} + \binom{19}{3} + \ldots + \binom{19}{9} + \binom{19}{10} + \ldots + \binom{19}{16} + \binom{19}{17} + \binom{19}{18} + \binom{19}{19}$$

Portanto, pelo Teorema das Linhas: $2.19!.S + 40 = 2^{19} \Rightarrow S = \dfrac{2^{18} - 20}{19!}$

13) Calcule o valor da soma $\frac{\binom{n}{0}}{1}-\frac{\binom{n}{1}}{2}+\frac{\binom{n}{2}}{3}-\frac{\binom{n}{3}}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n\binom{n}{n}}{n+1}$.

Solução:

Vamos desenvolver o termo geral do somatório:

$$(-1)^p\frac{1}{p+1}\binom{n}{p}=(-1)^p\frac{1}{p+1}\frac{n!}{p!.(n-p)!}=(-1)^p\frac{1}{n+1}\frac{(n+1).n!}{(p+1).p!.(n-p)!}=$$

$$=(-1)^p\frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(p+1)!.(n-p)!}=(-1)^p\binom{n+1}{p+1}$$

Deste modo:

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{1}{p+1}\binom{n}{p}=\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{p+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\binom{n+1}{p+1}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}-\binom{n+1}{4}+\ldots+(-1)^n\binom{n+1}{n+1}\right]$$

Por outro lado:

$$0=(1-1)^{n+1}=1-\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}-\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{4}+\ldots-(-1)^n\binom{n+1}{n+1}\Rightarrow$$

$$\binom{n+1}{1}-\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}-\binom{n+1}{4}+\ldots+(-1)^n\binom{n+1}{n+1}=1\Rightarrow$$

$$\sum_{p=0}^{n}(-1)^p\frac{1}{p+1}\binom{n}{p}=\frac{1}{n+1}$$

14) Calcule o valor de $\sum_{k=0}^{n}\frac{2^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}$.

Solução:

Note que:

$$\frac{2^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\binom{n}{k}=\frac{2^{k+2}}{(k+1)(k+2)}\frac{n!}{k!(n-k)!}=2^{k+2}\frac{n!}{(k+2)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{2^{k+2}}{(n+1)(n+2)}\frac{(n+2)!}{(k+2)!(n-k)!}=\frac{2^{k+2}}{(n+1)(n+2)}\binom{n+2}{k+2}$$

Assim:

$$S=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=0}^{n}2^{k+2}\binom{n+2}{k+2}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\sum_{k=2}^{n}2^k\binom{n+2}{k}=$$

$$= \frac{1}{(n+1)(n+2)}[(2+1)^{n-2} - 1 - 2(n+2)] = \frac{3^{n+2} - (2n+5)}{(n+1)(n+2)}$$

15) Calcule o valor de $S = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \binom{n}{k}$.

Solução:

Desenvolvendo o termo geral:

$$S = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (k^2 + 2k + 1)\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} [k(k-1) + 3k + 1]\binom{n}{k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} + 3\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = S_1 + S_2 + S_3$$

Sabe-se que $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \Rightarrow S_3 = 2^n$

Derivando em x uma primeira vez: $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} \Rightarrow S_2 = n.2^{n-1}$

Derivando em x uma segunda vez:

$$n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}x^{k-2} \Rightarrow S_3 = n(n+1).2^{n-2}$$

Logo: $S = n(n-1).2^{n-2} + 3.n.2^{n-1} + 2^n = 2^{n-2}(n^2 - n + 6n + 4) \Rightarrow$

$S = (n^2 + 5n + 4).2^{n-2} \Rightarrow S = (n+1)(n+4).2^{n-2}$

16) (Olimpíada da Espanha-93) Observe o triângulo aritmético:

0 1 2 3 4 ..... 1991 1992 1993

1 3 5 7 ..... 3983 3985

4 8 12 7968

.....

onde cada número é a soma dos dois que estão imediatamente acima (cada fila possui um número a menos e na última somente existe um número). Demonstrar que o último número é múltiplo de 1993.

Solução:

Note que se representamos os elementos da primeira fila por $a_0, a_1, a_2, ..., a_{1994}$, os elementos da segunda serão $a_0 + a_1$, $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, ..., $a_{1993} + a_{1994}$, os da terceira serão: $a_0 + 2a_1 + a_1$, $a_1 + 2a_2 + a_3$, ..., $a_{1992} + 2a_{1993} + a_{1994}$, para a quarta: $a_0 + 3a_1 + 3a_1 + a_1$, $a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4$, ..., $a_{1991} + 3a_{1992} + 3a_{1993} + a_{1994}$, assim sucessivamente.

Observando o padrão apresentado pelas 4 primeiras filas, podemos conjecturar que o primeiro elemento da fila p, $p \geq 1$, será igual a:

$$b_{p,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \binom{p-1}{1}a_1 + \ldots\ldots + \binom{p-1}{p-1}a_{p-1}.$$

Vamos demonstrar isto por indução:

i) Para p = 1 temos que o primeiro elemento da 1ª fila é igual a $b_{1,0} = \binom{0}{0}a_0 = a_0$;

ii) Suponhamos que exista p tal que o primeiro elemento da fila p é igual a

$$b_{p,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \binom{p-1}{1}a_1 + \ldots + \binom{p-1}{p-1}a_{p-1}.$$

iii) Observe que pela construção do triângulo aritmético se o k-ésimo elemento da fila p é igual a $b_{p,k-1} = C_{k-1}a_{k-1} + C_k a_k + \ldots + C_{k+p-1}a_{k+p-1}$ então o (k + 1)-ésimo elemento da mesma fila p é igual a $b_{p,k-1} = C_{k-1}a_k + C_k a_{k+1} + \ldots + C_{k+p-1}a_{k+p}$.

Portanto, se o primeiro elemento da fila p é igual a $b_{p,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \binom{p-1}{1}a_1 + \ldots + \binom{p-1}{p-1}a_{p-1}$, então o segundo elemento desta fila é igual a $b_{p,1} = \binom{p-1}{0}a_1 + \binom{p-1}{1}a_2 + \ldots + \binom{p-1}{p}a_p$.

Assim, o primeiro elemento da fila (p + 1) será: $b_{p+1,0} = b_{p,0} + b_{p,1} \Rightarrow$

$$b_{p+1,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \binom{p-1}{1}a_1 + \ldots + \binom{p-1}{p-1}a_{p-1} + \binom{p-1}{0}a_1 + \binom{p-1}{1}a_2 + \ldots + \binom{p-1}{p-1}a_p \Rightarrow$$

$$b_{p+1,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \left[\binom{p-1}{1} + \binom{p-1}{0}\right]a_1 + \left[\binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{1}\right]a_2 + \ldots + \left[\binom{p-1}{p-1} + \binom{p-1}{p-2}\right]a_{p-1} + \binom{p-1}{p-1}a_p$$

Desde que $\binom{p-1}{0} = \binom{p}{0} = 1$, $\binom{p-1}{p-1} = \binom{p}{p} = 1$ e $\binom{p-1}{i} + \binom{p-1}{i-1} = \binom{p}{i}$ (relação de Stifel), para $1 \leq i \leq p-1$, então podemos afirmar que $b_{p+1,0} = \binom{p}{0}a_0 + \binom{p}{1}a_1 + \ldots + \binom{p}{p}a_p$, que concluiu a demonstração.

Repare agora que a última fila possui somente um elemento, que é igual a $b_{1994} = \binom{1993}{0}.0 \div \binom{1993}{1}.1 + \ldots\ldots + \binom{1993}{1993}.1993$. Como 1993 é primo, $\binom{1993}{k}$ é múltiplo de 1993 para todo k tal que $1 \leq k \leq 1992$ e portanto b_{1994} é múltiplo de 1993.

6.5. O DESENVOLVIMENTO MULTINOMIAL

Todo o procedimento desenvolvido para o Binômio de Newton pode ser generalizado para o caso do desenvolvimento de uma expressão algébrica da forma $(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n$. Evidentemente, as parcelas deste desenvolvimento serão da forma $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_r^{a_r}$ onde $a_1 + a_2 + ... + a_r = n$, com $a_i \in IN$. Mas como será a forma geral dos coeficientes? Vamos analisar um caso específico para depois generalizarmos. Seja o desenvolvimento $(x + y + z)^6$, onde estamos interessados em determinar o seu termo geral. Claramente, cada parcela é da forma $x^a y^b z^c$, onde $a + b + c = 6$, com $a, b, c \in IN$. Escrevendo $(x + y + z)^6$ como sendo a multiplicação de seis termos $(x + y + z)$:

$$(x + y + z)^6 = (x + y + z).(x + y + z).(x + y + z).(x + y + z).(x + y + z).(x + y + z)$$

Cada parcela de $(x + y + z)^6$ é obtida escolhendo x, y ou z em cada termo $(x + y + z)$ e multiplicando estes elementos escolhidos. O coeficiente de cada parcela é igual ao número de multiplicações distintas que podemos fazer resultando na mesma parcela literal. Assim, na obtenção da parcela literal x^3y^2z devemos escolher três elementos x, dois elementos y e um elemento z, um em cada termo $(x + y + z)$. Podemos organizar esta escolha da seguinte maneira: debaixo de cada um dos seis termos $(x + y + z)$ podemos escrever o elemento que vai sair na multiplicação de cada parcela. Por exemplo, na obtenção da parcela x^3y^2z poderemos ter:

$$\underset{x}{(x+y+z)}\ \underset{x}{(x+y+z)}\ \underset{x}{(x+y+z)}\ \underset{y}{(x+y+z)}\ \underset{y}{(x+y+z)}\ \underset{z}{(x+y+z)}$$

Desta maneira, o número de vezes que podemos obter a parcela literal x^3y^2z é igual à permutação simples dos elementos x x x y y z debaixo dos termos $(x + y + z)$. Como se trata de permutação com repetição, temos $\frac{6!}{3!.2!.1!}$ maneiras distintas de obter a parcela x^3y^2z na multiplicação dos seis termos $(x + y + z)$. Portanto, o coeficiente da parcela literal x^3y^2z é igual a $\frac{6!}{3!.2!.1!}$. Generalizando este procedimento, podemos afirmar que no desenvolvimento de $(x + y + z)^6$ o coeficiente de $x^a y^b z^c$ é igual a $\frac{6!}{a!.b!.c!}$. Escrevendo sob a forma de somatório:

$$(x + y + z)^6 = \sum_{a,b,c \in IN}^{a+b+c=6} \frac{6!}{a!.b!.c!} x^a y^b z^c$$

De um modo geral, o coeficiente de $x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_r^{a_r}$, com $a_1 + a_2 + ... + a_r = n$, no desenvolvimento multinomial $(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n$ é igual a $\frac{n!}{(a_1!)(a_2!)...(a_r!)}$. Sob forma de somatório, podemos escrever:

$$(x_1 + x_2 + ... + x_r)^n = \sum_{a_1,a_2,...,a_r \in \mathbb{N}}^{a_1+a_2+...+a_r=n} \frac{n!}{(a_1!)(a_2!)...(a_r!)} x_1^{a_1} x_2^{a_2} ... x_r^{a_r}.$$

Observe que o desenvolvimento do binômio de Newton é um caso particular do desenvolvimento multinomial, uma vez que podemos afirmar que $(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} x^{n-p} y^p = \sum_{a,b \in \mathbb{N}}^{a+b=n} \frac{n!}{a!b!} x^a y^b$.

Exercícios Resolvidos

1) (Mackenzie-74) O termo independente de x em $\left(1 + x + \frac{2}{x}\right)^3$ é:

a) 13 b) 10 c) 11 d) 12 e) 15

Solução: Alternativa A

Sabemos que $\left(1 + x + \frac{2}{x}\right)^3 = \sum_{a,b,c \in \mathbb{N}}^{a+b+c=3} \frac{3!}{a!b!c!} (1)^a (x)^b \left(\frac{2}{x}\right)^c = \sum_{a,b,c \in \mathbb{N}}^{a+b+c=3} \frac{3!}{a!b!c!} 2^c . x^{b-c}$

No caso de termo independente de x temos b = c. Vamos analisar os possíveis valores de b (ou c):

i) $b = c = 0 \Rightarrow 3 = a + b + c = a \Rightarrow$ coeficiente igual a $\frac{3!}{3!.0!.0!} 2^0 = 1$

ii) $b = c = 1 \Rightarrow 3 = a + b + c = a + 2 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow$ coeficiente igual a $\frac{3!}{1!.1!.1!} 2^1 = 12$

Desta maneira, o termo independente de x é igual a 1 + 12 = 13.

2) O coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(1 + x^2 - x^3)^9$ é:

a) $3\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$ b) $\binom{9}{3} + \binom{9}{4}$ c) $2\binom{9}{3} + 2\binom{9}{4}$ d) $\binom{9}{3} + 4\binom{9}{4}$ e) $\binom{9}{3} + 3\binom{9}{4}$

Solução: Alternativa A

Note que: $(1 + x^2 - x^3)^9 = \sum_{a,b,c \in \mathbb{N}}^{a+b+c=9} \frac{9!}{a!b!c!} (1)^a (x^2)^b (-x^3)^c = \sum_{a,b,c \in \mathbb{N}}^{a+b+c=9} \frac{9!}{a!b!c!} (-1)^c x^{2b+3c}$

Assim, a, b e c devem satisfazer: a + b + c = 9 e 2b + 3c = 8

Vamos analisar as possibilidades de soluções naturais do sistema formado pelas equações anteriores:

i) $b = 4$ e $c = 0 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow$ coeficiente igual a $\frac{9!}{5!.4!.0!} (-1)^0 = \binom{9}{4}$

ii) $b = 1$ e $c = 2 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow$ coeficiente igual a $\frac{9!}{6!.1!.2!}(-1)^2 = 3\frac{9!}{6!.3!} = 3\binom{9}{3}$

Portanto, o coeficiente de x^8 é igual a $3\binom{9}{3}+\binom{9}{4}$.

3) Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(x^3 + 2x^2 + x - 1)^4$.
Solução:
Obtendo o termo geral:

$$(x^3+2x^2+x-1)^4 = \sum_{a,b,c,d\in IN}^{a+b+c+d=4} \frac{4!}{a!.b!.c!.d!}(x^3)^a(2x^2)^b(x)^c(-1)^d =$$

$$= \sum_{a,b,c,d\in IN}^{a+b+c+d=4} (-1)^d 2^b \frac{4!}{a!.b!.c!.d!} x^{3a+2b+c}$$

Os valores de a, b, c e d devem satisfazer: $a + b + c + d = 4$ e $3a + 2b + c = 4$.
Vamos analisar todas as soluções naturais do sistema linear formado pelas duas equações anteriores:

i) se $c = 4 \Rightarrow a = b = d = 0 \Rightarrow$ coeficiente igual a $(-1)^0 2^0 \frac{4!}{0!.0!.4!.0!} = 1$

ii) se $a = 1 \Rightarrow c = 1$, $b = 0$ e $d = 2 \Rightarrow$ coeficiente igual a $(-1)^2 2^0 \frac{4!}{1!.0!.1!.2!} = 12$

iii) se $b = 2 \Rightarrow a = c = 0$ e $d = 2 \Rightarrow$ coeficiente igual a $(-1)^2 2^2 \frac{4!}{0!.2!.0!.2!} = 24$

iv) se $b = 1 \Rightarrow a = 0$, $c = 2$ e $d = 1 \Rightarrow$ coeficiente igual a $(-1)^1 2^1 \frac{4!}{0!.1!.2!.1!} = -24$

Como temos somente estes quatro casos de soluções naturais para o sistema linear $\begin{cases} a+b+c+d=4 \\ 3a+2b+c=4 \end{cases}$, então o coeficiente de x^4 é igual a $1 + 12 + 24 - 24 = 13$.

4) Calcule o número de termos do desenvolvimento de $(x + y + z)^5$.
Solução:

Sabemos que $(x+y+z)^5 = \sum_{a,b,c\in IN}^{a+b+c=5} \frac{5!}{a!.b!.c!} x^a y^b z^c$. Repare que para cada termo distinto (a, b, c) satisfazendo $a + b + c = 5$ (a, b, c $\in$ IN) teremos um termo distinto do desenvolvimento de $(x + y + z)^5$. Assim, o número de termos no desenvolvimento de $(x + y + z)^5$ é igual ao número de soluções naturais de $a + b + c = 5$, que vale $\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$.

5) (Olimpíada de São Paulo-99) Em Terra Brasilis ocorre um importante campeonato de futebol envolvendo 22 clubes.
Cada equipe enfrenta uma vez cada uma das demais, recebendo

- 5 pontos por vitória quando esta for por diferença superior a dois gols;
- 3 pontos por vitória quando esta for por diferença de um ou dois gols;
- 1 ponto por empate;
- 0 ponto por derrota.

a) De quantas maneiras distintas uma equipe pode pontuar em seus 21 jogos?
Observação: obter 1 ponto na primeira partida e 5 na segunda e obter 5 pontos na primeira partida e 1 na segunda são maneiras distintas de se pontuar nas duas primeiras partidas.
b) Mostre que o número de maneiras distintas de, ao final do campeonato, uma equipe totalizar k pontos, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao coeficiente de x^k no desenvolvimento de $\left(x^0+x^1+x^3+x^5\right)^{21}$.
c) Calcule a diferença entre o total de maneiras de um clube obter um número par de pontos e o total de maneiras de obter um número ímpar de pontos.
d) Encontre o total de maneiras de um clube obter um número ímpar de pontos.
Solução:
a) Como cada time joga 21 vezes e em cada jogo existem 4 maneiras de pontuar (0, 1, 3 ou 5 pontos) então existem 4^{21} maneiras distintas de cada time pontuar nos seus 21 jogos.
b) Inicialmente podemos observar que:

$$\left(x^0+x^1+x^3+x^5\right)^{21} = \sum_{a,b,c,d\in\mathbb{N}}^{a+b+c+d=21} \frac{21!}{a!.b!.c!.d!}(x^0)^a(x^1)^b(x^3)^c(x^5)^d =$$

$$= \sum_{a,b,c,d\in\mathbb{N}}^{a+b+c+d=21} \frac{21!}{a!.b!.c!.d!}.x^{b+3c+5d}$$

Portanto, para calcularmos o coeficiente de x^k devemos determinar as soluções naturais do sistema linear $\begin{cases} a+b+c+d=21 \\ b+3c+5d=k \end{cases}$ e para estas soluções (a, b, c, d) calcular a soma dos coeficientes $\frac{21!}{a!.b!.c!.d!}$.
Vamos agora calcular o número de maneiras de um time fazer k pontos no campeonato. Sejam:
a = nº de jogos em que o time foi derrotado (D);
b = nº de jogos em que o time empatou (E);
c = nº de jogos em que o time ganhou por um ou dois gols de vantagem (V_1);
d = nº de jogos em que o time ganhou por mais de dois gols de vantagem (V_2).
Como o time fez k pontos, devemos ter $0.a + 1.b + 3.c + 5.d = k$ (1).
Por outro lado, como o time jogou 21 vezes, então $a + b + c + d = 21$ (2).

Para cada solução natural do sistema formado pelas equações (1) e (2) devemos distribuir os resultados nos 21 jogos realizados. Esta distribuição dos resultados corresponde à permutação de a letras D, b letras E, c letras V_1 e d letras V_2 (onde a + b + c + d = 21). Como se trata de permutação com repetição, temos $\frac{21!}{a!.b!.c!.d!}$ possibilidades de distribuir os resultados nos 21 jogos, para cada solução natural (a, b, c, d) do sistema $\begin{cases} a+b+c+d=21 \\ b+3c+5d=k \end{cases}$. Assim, acabamos de demonstrar que o número de maneiras distintas de, ao final do campeonato, uma equipe totalizar k pontos, $k \in \mathbb{N}$, é igual ao coeficiente de x^k no desenvolvimento de $\left(x^0+x^1+x^3+x^5\right)^{21}$.

c) Perceba que podemos representar resumidamente o desenvolvimento binomial da seguinte maneira:

$\left(x^0+x^1+x^3+x^5\right)^{21} = \sum C_k x^k$, onde o coeficiente C_k indica o número de maneiras de um time fazer k pontos no campeonato. Se substituirmos x = – 1 na última expressão, os termos com expoente de x par se transformam em + C_k e os termos com expoente de x ímpar ficam da forma – C_k. Desta forma, substituindo x = – 1 obtemos:

$$\left((-1)^0+(-1)^1+(-1)^3+(-1)^5\right)^{21} = \sum C_{par} - \sum C_{impar} \Rightarrow$$

$$-2^{21} = \sum C_{par} - \sum C_{impar} \quad (3)$$

Deste modo, a diferença entre o total de maneiras de um clube obter um número par de pontos e o total de maneiras de obter um número ímpar de pontos é igual a -2^{21}.

d) Substituindo x = 1 no desenvolvimento:

$$\left((1)^0+(1)^1+(1)^3+(1)^5\right)^{21} = \sum C_{par} + \sum C_{impar} \Rightarrow 2^{42} = \sum C_{par} + \sum C_{impar} \quad (4)$$

Fazendo a subtração das equações (4) – (3) obtemos:

$$2^{42}+2^{21} = 2\left(\sum C_{impar}\right) \Rightarrow \sum C_{impar} = 2^{41}+2^{20}$$

6) Determine o termo independente de x e y na expansão $\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^{2020}$.

Solução:

Sabe-se que $\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^{2020} = \sum_{a+b+c+d=2020} \frac{2020!}{a!.b!.c!.d!} x^a.x^{-b}.y^c.y^{-d}$

Assim, para que exista um termo independente de x e y neste desenvolvimento deve-se ter a = b e c = d, com a + c = 1010. Deste modo, não há apenas um termo em que os coeficientes de x e y são nulos, são 1011 parcelas em que isso ocorre (desde a = 0

até a = 1010). O coeficiente final do termo independe é igual à soma de todos os coeficientes destes 1011 termos.

Do exposto, o termo independente vale $S=\sum_{k=0}^{1010}\frac{2020!}{k!.k!.(1010-k)!.(1010-k)!}$

É possível simplificar o termo geral desse somatório:

$$\frac{2020!}{k!.k!.(1010-k)!.(1010-k)!}=\frac{2020!.1010!.1010!}{1010!.1010!.k!.k!.(1010-k)!.(1010-k)!}=$$

$$=\frac{2020!}{1010!.1010!}\frac{1010!}{k!(1010-k)!}\frac{1010!}{k!(1010-k)!}=\binom{2020}{1010}\binom{1010}{k}^2$$

Desta forma: $S=\binom{2020}{1010}\sum_{k=0}^{2010}\binom{1010}{k}^2$

Considere a identidade algébrica: $(1+x)^{2020}=(1+x)^{1010}(1+x)^{1010}$.

Desenvolvendo em binômio de Newton os dois membros:

$$\binom{2020}{0}+\binom{2020}{1}x+\ldots+\binom{2020}{2019}+\binom{2020}{2020}x^{2020}=$$

$$=\left[\binom{1010}{0}+\binom{1010}{1}x+\ldots+\binom{1010}{1010}x^{1010}\right]\left[\binom{1010}{0}+\binom{1010}{1}x+\ldots+\binom{1010}{1010}x^{1010}\right]$$

Igualando os coeficientes de x^{1010} em ambas expressões se conclui que:

$$\sum_{k=0}^{2010}\binom{1010}{k}^2=\binom{2020}{1010}$$

Finalmente, pode-se afirmar que o termo independente de x e y na expansão em binômio de Newton de $\left(x+\frac{1}{x}+y+\frac{1}{y}\right)^{2020}$ vale $\binom{2020}{1010}^2$.

6.6. BINÔMIO DE NEWTON E NÚMEROS COMPLEXOS

Sabe-se que todo número complexo z de módulo unitário pode ser representado na forma trigonométrica como $z = \cos\theta + i.\text{sen}\,\theta$, onde θ é o argumento de z. Pela 1ª Lei de Moivre segue que $z^n = \cos n\theta + i.\text{sen}\,n\theta$. Por outro lado, utilizando a expansão em binômio de Newton, é possível encontrar outra forma de calcular o valor de z^n:

$$z^n = (\cos\theta + i.\text{sen}\,\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(i.\text{sen}\,\theta)^k = \sum_{k=0}^{n} i^k\binom{n}{k}(\cos\theta)^{n-k}(\text{sen}\,\theta)^k$$

Perceba que se k for par o termo de ordem k + 1 do desenvolvimento acima é real e se k é ímpar o respectivo termo é imaginário puro. Deste modo, pode-se escrever que:

$$\cos n\theta = \binom{n}{0}\cos^n\theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta.\text{sen}^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta.\text{sen}^4\theta - \binom{n}{6}\cos^{n-6}\theta.\text{sen}^6\theta + \ldots$$

$$\text{sen}\,n\theta = \binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta\,\text{sen}\,\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta.\text{sen}^3\theta + \binom{n}{5}\cos^{n-5}\theta.\text{sen}^5\theta - \binom{n}{7}\cos^{n-7}\theta.\text{sen}^7\theta + \ldots$$

Repare que os "..." não indicam que a soma é infinita. Como não é conhecido se n é par ou ímpar, não é possível indicar como é o último termo de cada somatório. Em uma questão numérica essa determinação não será problema.

Acompanhe os exercícios resolvidos para entender melhor a aplicação de binômio de Newton na Trigonometria.

Exercícios Resolvidos

1) Determine o valor de cos 3x.

Solução:

Seja $z = \cos x + i.\text{sen}\,x \Rightarrow z^3 = \cos 3x + i.\text{sen}\,3x \Rightarrow \cos 3x = \text{Re}(z^3)$

Logo: $\cos 3x = \text{Re}(\cos x + i.\text{sen}\,x)^3 = \cos^3 x - 3\cos x.\text{sen}^2 x =$

$= \cos^3 - 3\cos x(1 - \cos^2 x) = \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x = 4\cos^3 x - 3\cos x$

2) Determine a expressão de tg 45x em função de tg x.

Solução:

Seja $z = \cos x + i.\text{sen}\,x \Rightarrow z^{45} = (\cos x + i.\text{sen}\,x)^{45} = \cos 45x + i.\text{sen}\,45x$

$$\cos 45x = \binom{45}{0}\cos^{45} x - \binom{45}{2}\cos^{43} x.\text{sen}^2 x + \ldots + \binom{45}{44}\cos x.\text{sen}^{44} x$$

$$\text{sen}\,45x = \binom{45}{1}\cos^{44} x.\text{sen}\,x - \binom{45}{3}\cos^{42} x.\text{sen}^3 x + \ldots + \binom{45}{45}\text{sen}^{45} x$$

Assim:

$$tg45x = \frac{\binom{45}{1}\cos^{44}x.\operatorname{sen}x - \binom{45}{3}\cos^{42}x.\operatorname{sen}^3x + ... + \binom{45}{45}\operatorname{sen}^{45}x}{\binom{45}{0}\cos^{45}x - \binom{45}{2}\cos^{43}x.\operatorname{sen}^2x + ... + \binom{45}{44}\cos x.\operatorname{sen}^{44}x} \Rightarrow$$

$$tg45x = \frac{\binom{45}{1}tgx - \binom{45}{3}tg^3x + \binom{45}{5}tg^5x - \binom{45}{7}tg^7x + ... + \binom{45}{45}tg^{45}x}{\binom{45}{0} - \binom{45}{2}tg^2x + \binom{45}{4}tg^4x - \binom{45}{6}tg^6x + ... + \binom{45}{44}tg^{44}x}$$

3) Calcule o valor do seguinte somatório:

$$\binom{12n}{0}3^{6n} - \binom{12n}{2}3^{6n-1} + \binom{12n}{4}3^{6n-2} - \binom{12n}{6}3^{6n-3} + ... + \binom{12n}{12n}$$

Solução:

Considere o número complexo z de módulo unitário e argumento igual a $\frac{\pi}{6}$, ou seja,

$$z = \cos\frac{\pi}{6} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}.$$

Aplicando a 1ª Lei de Moivre tem-se que:

$$z^{12n} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i.\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right)^{12n} = \cos 2n\pi + i.\operatorname{sen} 2n\pi = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = 1 \text{ e } \operatorname{Im}(z) = 0$$

Por outro lado, pode-se expandir z^{12n} em binômio de Newton:

$$z^{12n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i.\frac{1}{2}\right)^{12n} = \sum_{k=0}^{12n}\binom{12n}{k}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12n-k}\left(\frac{i}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{12n}\frac{i^k}{2^{12n}}\binom{12n}{k}3^{6n-\frac{k}{2}}$$

Assim, a parte real de z é composta pela soma dos termos da expansão em binômio de Newton de z^{12n} em que k é par.

$$1 = \frac{1}{2^{12n}}\left[\binom{12n}{0}3^{6n} - \binom{12n}{2}3^{6n-1} + \binom{12n}{4}3^{6n-2} - \binom{12n}{6}3^{6n-3} + ... + \binom{12n}{12n}\right] \Rightarrow$$

$$\binom{12n}{0}3^{6n} - \binom{12n}{2}3^{6n-1} + \binom{12n}{4}3^{6n-2} - \binom{12n}{6}3^{6n-3} + ... + \binom{12n}{12n} = 2^{12n}$$

6.7. FUNÇÕES GERADORAS

O método das Funções Geradoras é um importante instrumento na resolução de problemas de contagem, tornando mais simples, mais segura e de mais fácil entendimento a determinação da resposta final. Existem dois tipos de Funções Geradoras: polinomiais e exponenciais. Neste livro apresentaremos apenas as Funções Geradoras Polinomiais, uma vez que as situações típicas da aplicação das Funções Geradoras Exponenciais podem ser resolvidas pela aplicação dos Números de Stirling de 2ª espécie, conteúdo já explorado no capítulo de Contagem.

6.7.1. Funções Geradoras Polinomiais

Para compreender melhor a aplicação de funções geradoras polinomiais em problemas de combinatória, considere a situação problema de determinar o número de soluções naturais da equação $a + b = 8$, com $0 \leq a \leq 5$ e $0 \leq b \leq 6$. Da álgebra, é conhecida a seguinte propriedade: $x^a.x^b = x^{a+b}$. Desta forma, nosso problema pode ser transformado em determinar o número de maneiras de multiplicar parcelas algébricas x^a e x^b de modo que $a + b = 8$, com as restrições $0 \leq a \leq 5$ e $0 \leq b \leq 6$. Note que esta quantidade de maneiras é igual ao coeficiente de x^8 no produto:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6).$$

Este produto é igual a:

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 6x^6 + 5x^7 + 4x^8 + 3x^9 + 2x^{10} + x^{11}$$

Assim, existem 4 pares ordenados de inteiros (a, b) de modo que $a + b = 8$, com $0 \leq a \leq 5$ e $0 \leq b \leq 6$, a saber: (2, 6), (3, 5), (4, 4) e (5, 3).

Vamos agora aplicar este método para resolver um problema mais complicado, que é determinar a quantidade de soluções naturais da equação $2a + 3b + 5c = 11$. Como todas variáveis são positivas deve-se ter $a \leq 5$, $b \leq 3$ e $c \leq 2$. Repare que este problema é equivalente a determinar os inteiros a, b e c de modo que $x^{2a}.x^{3b}.x^{5c} = x^{11}$, com $a \leq 5$, $b \leq 3$ e $c \leq 2$. Logo, esta quantidade é igual ao coeficiente de x^{11} no produto polinomial:

$$(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(1 + x^3 + x^6 + x^9)(1 + x^5 + x^{10}).$$

O resultado deste produto é:

$$1 + x^2 + x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 4x^{11} + 3x^{12} + 5x^{13} + 4x^{14} + 4x^{15} + \\ + 5x^{16} + 3x^{17} + 4x^{18} + 4x^{19} + 3x^{20} + 3x^{21} + 2x^{22} + 2x^{23} + 2x^{24} + x^{25} + x^{26} + x^{27} + x^{29}$$

Assim, existem 4 ternos ordenados de números naturais (a, b, c) de modo que $2a + 3b + 5c = 11$.

Neste momento o leitor deve estar achando que o método das funções geradoras realmente funciona, porém, à custa de muito algebrismo. O autor deste livro tem uma boa notícia: há como proceder de uma outra forma mais curta. Pra isso será necessário estender o conceito dos números binomiais para números negativos.

6.7.1.1. Teorema: Se n e p são números naturais, $\binom{-n}{p} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$.

Demonstração:

Se $n \geq 0$ e $p \geq 0$ sabe-se que $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-p+1)}{p!}$.

Substituindo – n no lugar de n segue que:

$$\binom{-n}{p} = \frac{-n(-n-1)(-n-2)...(-n-p+1)}{p!} = \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)...(n+p-1)}{p!} =$$

$$= \frac{(-1)^p n(n+1)(n+2)...(n+p-1)(n-1)!}{(n-1)!p!} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$$

Note que esta expressão não tem sentido combinatórico, apenas algébrico.

6.7.1.2. Teorema: O coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^n$ é $\binom{n+p-1}{p}$.

Demonstração:

Um artifício interessante em funções geradoras é utilizar expressões mais simples dos polinômios, usando para isso, quando possível, somas de PGs. Perceba que para $|x| < 1$ tem-se que $1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$. Apesar da validade desta identidade estar restrita aos casos em que $|x| < 1$, como o objetivo é encontrar valores de coeficientes e não valores numéricos do polinômio para um determinado x, pode-se adotar qualquer expressão algébrica equivalente (mesmo que válida apenas para um intervalo de x) à função geradora. Logo:

$$(1 + x + x^2 + x^3 + ...)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}$$

Estendendo o conceito de expansão em binômio de Newton para expoentes negativos, segue que:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-n}{p} (-x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^p \binom{n+p-1}{p} (-1)^p x^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n+p-1}{p} x^p$$

Por mais que não pareça natural a ideia de usar expoentes negativos em uma expansão em binômio de Newton, entretanto sua aplicação resolve mais facilmente uma série de problemas de contagem. Por exemplo, suponha que 4 dados comuns são lançados. De quantas maneiras é possível obter 15 pontos como soma dos números nas faces superiores dos dados? Como os números nos dados variam de 1 a 6, a

função geradora de cada dado é $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$. Como são jogados 4 dados, o número de maneiras de conseguir 15 pontos é igual ao coeficiente de x^{15} em:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^4(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)^4$$

Utilizando soma de PG se pode escrever que:

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4 = x^4\left(\frac{1-x^6}{1-x}\right)^4 = x^4(1-x^6)^4(1-x)^{-4}$$

Como $x^4(1 - x^6)^4 = x^{28} - 4x^{22} + 6x^{16} - 4x^{10} + x^4$ então o coeficiente de x^{15} na função geradora é determinado calculando os coeficientes de x^{11} e x^5 na expansão em binômio de Newton de $(1 - x)^{-4}$, que valem, respectivamente:

$$(-1)^{11}\binom{-4}{11} = \binom{4+11-1}{11} = \binom{14}{11} = 364 \quad \text{e} \quad (-1)^5\binom{-4}{5} = \binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56.$$

Portanto, o coeficiente de x^{15} em $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^4$ vale:

$$1 \times 364 + (-4) \times 56 = 140,$$

que é igual ao número de maneiras de arremessar 4 dados e obter 15 como soma dos pontos nas faces superiores dos dados.

Outra aplicação de funções geradoras polinomiais é, por exemplo, determinar a quantidade de números inteiros positivos de até 6 dígitos cuja soma dos dígitos seja igual a 21. Números de até 6 dígitos podem ser representados na forma $(abcdef)_{10}$, onde $0 \le a, b, c, d, e, f \le 9$. Assi, devemos encontrar a quantidade de soluções da equação $a + b + c + d + e + f = 21$ com as restrições $0 \le a, b, c, d, e, f \le 9$. A função geradora desta equação é

$$(1 + x + x^2 + \ldots + x^9)^6 = \left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^6 = (1-x^{10})^6(1-x)^{-6},$$

onde deve-se encontrar o coeficiente de x^{21} deste desenvolvimento.

Como $(1 - x^{10})^6 = x^{60} - 6x^{50} + 15x^{40} - 20x^{30} + 15x^{20} - 6x^{10} + 1$, é necessário determinar os coeficientes de x, x^{11} e x^{21} no desenvolvimento de $(1 - x)^{-6}$:

$$(-1)^1\binom{-6}{1} = \binom{6+1-1}{1} = \binom{6}{1} = 6, \quad (-1)^{11}\binom{-6}{11} = \binom{6+11-1}{11} = \binom{16}{11} = 4368 \quad \text{e}$$

$$(-1)^{21}\binom{-6}{21} = \binom{6+21-1}{21} = \binom{26}{21} = 65780$$

Portanto, o coeficiente de x^{21} de $(1 - x^{10})^6(1 - x)^{-6}$ vale:

$$1 \times 65780 + (-6) \times 4368 + 15 \times 6 = 39662,$$

que é igual a quantidade de números inteiros positivos de até 6 dígitos cuja soma dos dígitos seja igual a 21.

Exercícios de Vestibular

1) (Mackenzie-SP) Os 3 primeiros coeficientes no desenvolvimento de $(x^2 + 1/(2x))^n$ estão em progressão aritmética. O valor de n é:
a) 4 b) 6 c) 8 d) 10 e) 12

2) (Unifor-99) Sejam A e B, respectivamente, o quarto e o quinto termos do desenvolvimento do binômio $\left(2x + \frac{1}{x}\right)^n$ segundo as potências decrescentes de x. Se $\frac{A}{B} = x^2$, então o número natural n é igual a

3) (UFPB-99) Sabendo-se que o desenvolvimento de $(a+b+c)^n$ é a soma de todos os termos da forma $\frac{n!}{i!j!k!}a^i b^j c^k$, com $i+j+k=n$, então o coeficiente de $x^4y^3z^2$ no desenvolvimento de $(x+y+z)^9$ é igual a:
a) 10080 b) 3/8 c) 1
d) 9 e) 1260

4) (UFC-99) Sejam α e β números reais. Suponha que ao desenvolvermos $(\alpha x + \beta y)^5$, os coeficientes dos monômios x^4y e x^3y^2 sejam iguais a 240 e 720, respectivamente. Nestas condições, assinale a opção que contém o valor de α/β.
a) 1/2 b) 3/2 c) 1/3
d) 3 e) 2/3

5) (IME-94) Determine o termo independente de x de $\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{10}$

6) (UFPE-99) Qual o termo independente de x na expansão de $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^8$?

7) (Insper-04) Se n é um número natural não nulo, então:
$\binom{2n+1}{0}+\binom{2n+1}{1}+\binom{2n+1}{2}+\ldots+\binom{2n+1}{n-1}+\binom{2n+1}{n}$
é igual a:
a) 2^{2n} b) 2^{2n+1} c) 2^{2n-1}
d) 2^n e) 2^{n+1}

8) (Unifor-05) A soma
$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}3+\binom{n}{2}3^2+\ldots+\binom{n}{n-1}3^{n-1}+\binom{n}{n}3^n$
é igual a
a) n^n b) 4.n! c) 2^n d) 3^n e) 2^{2n}

9) (Unifor-03) Por uma das propriedades do Triângulo de Pascal, a soma $\binom{50}{20}+\binom{50}{21}+\binom{51}{22}+\binom{52}{23}$ é igual a
a) $\binom{53}{23}$ b) $\binom{52}{21}$ c) $\binom{52}{22}$
d) $\binom{51}{21}$ e) $\binom{51}{22}$

10) (Unifor-00) O valor da soma $\binom{7}{2}+\binom{8}{3}+\binom{9}{4}+\binom{10}{5}$ é:
a) 455 b) 462 c) 575 d) 584 e) 642

11) (Unifor-00) A soma

$$\binom{3}{0}+\binom{4}{1}+\binom{5}{2}+\ldots+\binom{12}{9}$$

é igual a:

a) $\binom{12}{10}$ b) $\binom{13}{9}$ c) $\binom{13}{10}$

d) $\binom{15}{9}$ e) $\binom{65}{10}$

12) (UECE-05) O número 30 aparece n vezes no triângulo de Pascal abaixo apresentado

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\end{array}$$

onde os pontinhos indicam que as linhas horizontais seguintes do triângulo seguem a lógica construtiva das linhas superiores. O número n é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

13) (ESPM-04) O desenvolvimento do binômio $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}\right)^{12}$ apresenta n termos com radical. O valor de n é:

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

14) (UFAL-03) Determine os termos racionais no desenvolvimento de $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\right)^{10}$.

15) (UECE-16) Se n é um número natural maior do que dois, ao ordenarmos o desenvolvimento de $\left[x^2+\frac{1}{2x}\right]^n$ segundo as potências decrescentes de x, verificamos que os coeficientes dos três primeiros termos estão em progressão aritmética. Nessas condições, o valor de n é

A) 8. B) 6. C) 4. D) 10.

16) (UECE-17) O coeficiente de x^6 no desenvolvimento de

$$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3\cdot\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3 \text{ é}$$

a) 18 b) 24 c) 34 d) 30

17) (UECE-18) Quando a expressão algébrica $E = (1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + (1 + x)^4 + \ldots + (1 + x)^{18}$ é apresentada na forma $E = a_0x^{18} + a_1x^{17} + a_2x^{16} + \ldots + a_{17}x + a_{18}$, o valor do coeficiente do termo do primeiro grau, isto é, a_{17} é igual a

A) 170. B) 172. C) 171. D) 169.

18) (UECE-19) O número inteiro n, maior que 3, para o qual os números $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$ e $\binom{n}{3}$ estão, nessa ordem, em progressão aritmética é

a) n = 6 b) n = 8 c) n = 5 d) n = 7

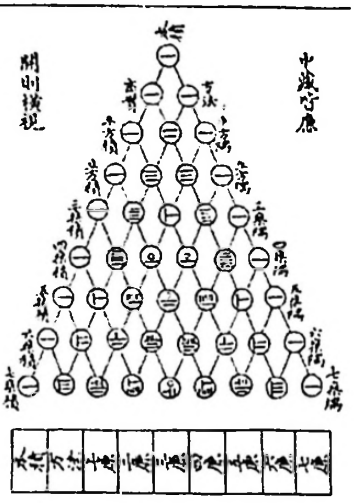
19) (UECE-20) O termo independente de x no desenvolvimento binomial de

$$\left(x.\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^3}\right)^{13} \text{ é:}$$

a) 725 b) 745 c) 715 d) 735

20) (UFF-10) Povos diferentes com escrita e símbolos diferentes podem descobrir um mesmo resultado matemático. Por exemplo, a figura abaixo ilustra o Triângulo de Yang Yui,

publicado na China em 1303, que é equivalente ao Triângulo de Pascal, proposto por Blaise Pascal 352 anos depois.



Na expressão algébrica
$(x + 1)^{100} = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_{99} \cdot x^{99} + a_{100} \cdot x^{100} = \sum_{n=0}^{100} a_n \cdot x^n$ o coeficiente a_2 de x^2 é igual a:
a) 2 b) 100 c) 4950 d) 9900 e) 2^{100}

21) (FGV-11) O padrão numérico apresentado chama-se triângulo de Pascal.

Linha 1 1
Linha 2 1 1
Linha 3 1 2 1
Linha 4 1 3 3 1
Linha 5 1 4 6 4 1
Linha 6 1 5 10 10 5 1
⋮ ⋮

Seja P o total de números nas primeiras n linhas do triângulo de Pascal que não são iguais a 1 (mas que possam se repetir), e Q o total de números 1 nas n primeiras linhas. Nessas condições, $\frac{P}{Q}$ é igual a

a) $\frac{n^2-3n+2}{2(n-2)}$. b) $\frac{n^2-3n+2}{2n-1}$.
c) $\frac{n^2-3n+2}{2(2n-1)}$ d) $\frac{n^2-2n+2}{4n-2}$.
e) $\frac{n^2-2n+2}{2n-1}$.

22) (Fuvest-05) No triângulo de Pascal

n = 0 1
n = 1 1 1
n = 2 1 2 1
n = 3 1 3 3 1
n = 4 1 4 6 4 1
. . . . . .

a soma dos elementos da linha n com os da linha n + 1 é
a) n(n + 1) b) $2^n \cdot 2^{n+1}$
c) $3 \cdot 2^n$ d) $2 \cdot 2^{n+1}$
e) $3^n \cdot 2^{n+1}$

23) (UEPG-09) No desenvolvimento do binômio $(ax + by)^5$, os coeficientes dos monômios x^2y^3 e xy^4 são, respectivamente, iguais a 720 e 240. A respeito do desenvolvimento desse binômio segundo potências decrescentes de x, sendo a e b números reais, assinale o que for correto.
01. a + b = 5
02. a é um número ímpar.
04. O último termo do desenvolvimento é $32y^5$
08. O segundo termo do desenvolvimento é $810x^4y$

16. O primeiro termo do desenvolvimento é $243x^5$

24) (FGV-14) No desenvolvimento do binômio $\left(\frac{x^2}{2}+Ax^{-1}\right)^7$ segundo a ordem decrescente de seus expoentes, o quinto termo é igual a $\frac{70x^B}{81}$, com A e B constantes racionais. Nessas condições, A + B é igual a

a) 4/3 ou 2 b) 3/4 ou 5/3
c) 1 ou 5/3 d) 4/3 ou 8/3
e) 2/3 ou 3

25) (FGV-17) O coeficiente de x^{12} na expansão de $(1 + x^4 + x^5)^{10}$ é igual a

a) 120. b) 90. c) 81.
d) 60. e) 54.

26) (UFRGS-14) Considere a configuração dos números dispostos nas colunas e linhas abaixo.

	coluna 0	coluna 1	coluna 2	coluna 3	coluna 4	coluna 5	coluna 6	coluna 7	...
linha 0	1								
linha 1	1	1							
linha 2	1	2	1						
linha 3	1	3	3	1					
linha 4	1	4	6	4	1				
linha 5	1	5	10	10	5	1			
linha 6	1	6	15	20	15	6	1		
linha 7	1	7	21	35	35	21	7	1	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

O número localizado na linha 15 e na coluna 13 é

(A) 15. (B) 91. (C) 105.
(D) 120. (E) 455.

27) (EsPCEx-17) Determine o valor numérico do polinômio $p(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 2017$ para $x = 89$.

a) 53 213 009. b) 57 138 236.
c) 61 342 008. d) 65 612 016.
e) 67 302 100.

28) (AFA-18) O menor dos possíveis coeficientes do termo em x^8, no desenvolvimento de $(2 + x^2 + 3x^3)^{10}$ é igual a

a) 11 240 c) 13 440
b) 12 420 d) 14 720

29) (EPCAR-02) Seja:

$$A_n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}(2^p 3^{n-p} - 4^p).$$

Então, para todo $n > 0$ tem-se $A_n =$

a) 0 c) n
b) $2^n 3^n - 4^n$ d) $\binom{n}{2}\binom{n}{3} - \binom{n}{4}$

30) (AFA-04) Sabendo-se que no desenvolvimento de $(1 + x)^{26}$ os coeficientes dos termos de ordem $(2r + 1)$ e $(r + 3)$ são iguais, pode-se afirmar que r é igual a

a) 8 ou 4 b) 8 ou 2
c) 4 ou 2 d) 2 ou 1

31) (Escola Naval-06) Os coeficientes dos três primeiros termos do desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^n$ coincidem com os três primeiros termos de uma progressão aritmética (PA). O valor do 11º termo da PA é:

a) 27 b) 29 c) 31 d) 33 e) 35

32) (ITA-63) Demonstrar a relação de Euler:

$$\binom{m+n}{p} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \binom{m}{2}\binom{n}{p-2} + \ldots + \binom{m}{p}\binom{n}{0}$$

33) (ITA-67) $\sum_{k=0}^{10} 2^k \binom{10}{k}$ é igual a:

a) 2^{10} b) $2^{10}-1$ c) $3^{10}-1$
d) $3^{10}+1$ e) 3^{10}

34) (ITA-67) Qual o coeficiente de x^{17} no desenvolvimento de $(1 + x^5 + x^7)^{20}$?

a) 0 b) 1210 c) 3000
d) 3420 e) 4000

35) (ITA-68) Sejam a e b dois números reais quaisquer e p um número primo. A igualdade $(a \pm b)^p = a^p \pm b^p$ é verificada se:

a) $a = b = 1$
b) a e b são primos entre si
c) b = P.A.
d) $x.p = 0$ para todo número real x
e) nenhuma das respostas acima

36) (ITA-69) A soma:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$$

é igual a:

a) $n.2^{n-1}$ b) 2^n c) $n2^n$
d) $(n+1)2^{n+1}$ e) $n.2^{n+1}$

37) (ITA-71) Seja n um número inteiro $n > 1$ e $x \in (0, \pi/2)$. Qual das afirmações abaixo é sempre verdadeira?

a) $(1 - \text{sen } x)^n \geq 1 - n \text{ sen } x$;
b) $(1 - \text{sen } x)^n \geq 1 - n \text{ sen } x$ para apenas n par;
c) $(1 - \text{sen } x)^n \leq 1 - n \text{ sen } x$;
d) $(1 - \text{sen } x)^n \leq 1 - n \cos x$;
e) N.d.r.a.

38) (ITA-73) O coeficiente de $a^{n+1-p}b^p$ no produto de:

$$a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \ldots + \binom{k}{p}a^{k-p}b^p + \ldots + b^k$$

por $(a + b)$, se $k = n$, vale:

a) $\binom{n}{p}$ b) $\binom{n+1}{p}$ c) $\binom{n-1}{p}$
d) $\binom{n+1}{p+1}$ e) nda

39) (ITA-73) Sejam $n \in N^*$, $p \in N$ onde $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $N^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Então $\sum_{p=0}^{n}(-1)^{p-n}(-1)^p(-1)^{n-p}\binom{n}{p}$ vale:

a) -1 b) 0 c) 1 d) 2 e) nda

40) (ITA-70) Considere o binômio $\left(\frac{1}{x} + ax^2\right)^{36}$. Esse binômio possui um certo termo T independente de x. Se elevarmos ax^2 a uma certa potência α, o termo independente do novo binômio será o quinto termo. Então:

a) T é o 12º termo e o valor de α é 4.
b) T é o 12º termo e o valor de α é 3.
c) T é o 13º termo e o valor de α é 3.
d) T é o 13º termo e o valor de α é 4.
e) T é o 13º termo e o valor de α é 5.

41) (ITA-84) O valor de m, tal que $\sum_{p=0}^{m}\binom{m}{p}2^p = 729$, é:

a) 14 b) 9 c) 6
d) 7 e) 8

42) (ITA-86) Os valores de $x \in \Re$, $x \neq \pi/2 + k\pi$, $k \in Z$ e de $n \in N$ para os quais a igualdade

$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(\sec x - tgx)^{n-i}\frac{1}{(\sec x + tgx)^{i}} = \frac{255}{(\sec x + tgx)^{n}}$$

se verifica são:

a) $\forall x \in \Re, x \in (-\pi/2, \pi/2)$ e $n = 5$.

b) $\forall x \in \Re, x \neq \pi/2 + k\pi, k \in Z \ \forall n \in N$.

c) $\forall x \in \Re, x \neq \pi/2 + k\pi, x \neq \pi/4 + k\pi, k \in Z$ e $n = 6$.

d) $\forall x \in \Re, x \neq \pi/2 + k\pi, k \in Z$ e $n = 8$.

e) Não existe $n \in N$ tal que a igualdade seja verdadeira.

43) (ITA-87) No desenvolvimento de $(x^2 + 3x)^{12}$, o coeficiente de x^{20} é:

a) $3^4 x\ 55$ b) $3^5 x\ 110$ c) $3^6 x\ 55$ d) $3 x\ 110$ e) 55

44) (ITA-88) No desenvolvimento de $(1 + 3x)^m$, a razão entre os coeficientes dos termos de terceiro e primeiros graus em x é $6(m - 1)$. O valor de m é:

a) 3 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

45) (ITA-89) Considere o desenvolvimento $(x + y)^{10} = A_1x^{10} + A_2x^9y + \ldots$, onde x e y são números reais. A oitava parcela do lado direito é igual a $\frac{405}{2}(\log_k 2)^3$, para algum $k > 1$, $x = \frac{2\log_2 k}{\sqrt{\log_k 2}}$ e $y = \frac{\sqrt{\log_k 2}}{2\log_2 k}$. Neste caso:

a) $k^2 = 2$ b) $k^2 = 3$ c) $k^3 = 2$ d) $k^3 = 7$ e) $k^3 = 5$

46) (ITA-89) Escreva e desenvolvimento do binômio $(tg^3x - \text{cosec}^6x)^m$, onde m é um número inteiro maior que zero, em termos de potências inteiras de sen x e cos x. Para determinados valores do expoente, este desenvolvimento possuirá uma parcela P, que não conterá a função sen x. Seja m o menor valor para o qual isto ocorre. Então $P = -64/9$ quando x for igual a:

a) $x = \pi/3 + 2k\pi$, k inteiro

b) $x = \pm\pi/3 + k\pi$, k inteiro

c) $c = \pi/4 + k\pi$, k inteiro

d) $x = \pm\pi/6 + 2k\pi$, k inteiro

e) não existe x satisfazendo a igualdade desejada.

47) (IME-65) Determinar a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x - y)^{11}$.

48) (IME-66) Determine os valores de x e de y, em função de n, na equação:

$$C_n^0.C_n^2 + C_n^1.C_n^3 + C_n^2.C_n^4 + \ldots + C_n^{n-2}.C_n^n = C_x^y$$

49) (IME-71) Calcule o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^5$.

50) (IME-72) Calcular o termo de maior grau no desenvolvimento de $\left(\sqrt{x} + y^2\right)^{10}$.

51) (IME-81) Prove a seguinte identidade: $\binom{n+1}{2m+1} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{m}\binom{k}{m}$, onde n e m são inteiros positivos e $\binom{n}{m} = \frac{n!}{(n-m)!m!}$ para $n \geq m$ e $\binom{n}{m} = 0$ para $n < m$.

52) (IME-84) Seja o desenvolvimento $\left(\frac{1}{5}x + \frac{2}{5}\right)^n$ onde n é um número inteiro positivo. Determine n sabendo-se que o

maior dos coeficientes é o do termo em x^{n-9}.

53) (IME-86) Sabendo-se que x é um número real, $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq \arccos x \leq \pi$ e n é um número inteiro positivo, mostre que a expressão $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ pode ser desenvolvida como um polinômio em x, de grau n, cujo coeficiente do termo de maior grau é igual a 2^{n-1}.

54) (IME-95) Determine a condição que o inteiro m deve satisfazer para que exista termo independente de x no desenvolvimento de $\left(x^4 - \frac{1}{x^8}\right)^m$.

5) (IME-90) Os coeficientes dos 5º, 6º e 7º termos do desenvolvimento $(x + 1)^n$ estão, nesta ordem em PA. Determine n.

56) (ITA-06) Determine o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^9$.

57) (ITA-14) Para os inteiros positivos k e n, com $k \leq n$, sabe-se que

$$\frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Então, o valor de

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$$

é igual a

A ( ) $2^n + 1$. B ( ) $2^{n+1} + 1$.

C ( ) $\frac{2^{n+1}+1}{n}$ D ( ) $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

E ( ) $\frac{2^n - 1}{n}$

58) (ITA-18) Sejam a e b números inteiros positivos. Se a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão 1/2 e o termo independente de $\left(ax - \frac{b}{\sqrt{x}}\right)^{12}$ é igual a 7920, então a + b é

A ( ) 2. B ( ) 3. C ( ) 4.
D ( ) 5. E ( ) 6.

59) (IME-13) Entre os números 3 e 192 insere-se igual número de termos de uma progressão aritmética e de uma progressão geométrica com razão r e q, respectivamente, onde r e q são números inteiros. O número 3 e o número 192 participam destas duas progressões. Sabe-se que o terceiro termo de $\left(1 + \frac{1}{q}\right)^8$, em potências crescentes de $\frac{1}{q}$, é $\frac{r}{9q}$. O segundo termo da progressão aritmética é

a) 12 b) 48 c) 66 d) 99 e) 129

60) (IME-14) Sabe-se que o valor do sexto termo da expansão em binômio de Newton de

$$\left(2^{\log_2 \sqrt{9(x-1)+7}} + \frac{1}{2^{5\log_2(3^{x-1}+1)}}\right)^7$$

é 84. O valor da soma dos possíveis valores de 0 é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

61) (IME-17) No desenvolvimento de $\left(x.\operatorname{sen} 2\beta + \frac{1}{x}\cos 2\beta\right)^{10}$ o valor do termo independente de x é igual a 63/256.

Considerando que b é um número real, com $0 < b < \pi/8$ e $x \neq 0$, o valor de b é:
(A) $\pi/9$ (B) $\pi/12$ (C) $\pi/16$
(D) $\pi/18$ (E) $\pi/24$

62) (IME-16) O valor da soma abaixo é:

$$\binom{2016}{5}+\binom{2017}{5}+\binom{2018}{5}+\binom{2019}{5}+\binom{2020}{5}+\binom{2016}{6}$$

a) $\binom{2020}{6}$ b) $\binom{2020}{7}$ c) $\binom{2021}{5}$
d) $\binom{2021}{6}$ e) $\binom{2022}{5}$

63) (ITA-92) A igualdade

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}7^n+\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}2^m=64$$

é válida para:
a) Quaisquer que sejam n e m naturais positivos.
b) Qualquer que seja n natural positivo e m = 3.
c) n = 13 e m = 6.
d) n ímpar e m par.
e) n.d.a.

64) (ITA-92) No desenvolvimento $(x + y)^6$, ordenado segundo as potências decrescentes de x, a soma do 2º termo com 1/10 do termo de maior coeficiente é igual a oito vezes a soma de todos os coeficientes. Se $x = (2)^{z+1}$ e $y = (1/4)^{z-1/2}$, então:
a) $z \in [0, 1]$ b) $z \in (20, 50)$
c) $z \in (-\infty, 0]$ d) $z \in [1, 15]$
e) n.d.a.

65) (ITA-95) Para cada $n \in N$, temos que:

$$1-\binom{4n}{2}+\binom{4n}{4}-\ldots-\binom{4n}{4n-2}+1$$

é igual a:
a) $(-1)^n 2^{2n}$. b) 2^{2n}. c) $(-1)^n 2^n$.
d) $(-1)^{n+1} 2^{2n}$. e) $(-1)^{n+1} 2^n$.

66) (ITA-00) Seja

$$f(x)=\sum_{n=0}^{20}\frac{20!}{n!(20-n)!}x^n$$

uma função real de variável real em que n! indica o fatorial de n. Considere as afirmações:
(I) $f(1) = 2$.
(II) $f(-1) = 0$.
(III) $f(-2) = 1$.
Podemos concluir que :
(A) Somente as afirmações I e II são verdadeiras.
(B) Somente as afirmações II e III são verdadeiras.
(C) Apenas a afirmação I é verdadeira.
(D) Apenas a afirmação II é verdadeira.
(E) Apenas a afirmação III é verdadeira.

67) (ITA-01) Sabendo que é de 1024 a soma dos coeficientes do polinômio em x e y, obtido pelo desenvolvimento do binômio $(x + y)^m$, temos que o número de arranjos sem repetição de *m* elementos, tomados 2 a 2, é:
a) 80 b) 90 c) 70 d) 100 e) 60

68) (ITA-02) Mostre que

$$\left(\frac{x}{y}+2+\frac{y}{x}\right)^4 > C_{8,4},$$

para quaisquer x e y reais positivos.
Obs.: $C_{n,p}$ denota a combinação de n elementos tomados p a q.

69) (ITA-03) Considere o conjunto S = {(a, b) ∈ IN × IN: a + b = 18}. A soma de todos os números da forma $\frac{18!}{a!b!}$, ∀ (a, b) ∈ S, é:

a) 8^6 b) 9! c) 9^6 d) 12^6 e) 12!

70) (ITA-91) Sejam

$$A=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^k \quad e \quad B=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}11^k$$

Se $\ln B - \ln A = \ln\frac{6561}{4}$ então n é igual a:

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) n.d.a

71) (IME-99) Calcule o valor de $(1{,}02)^{-10}$, com dois algarismos significativos, empregando a expansão do binômio de Newton.

72) (POLI/USP-67) Sendo:

$$a=\binom{n}{0}-\binom{n}{2}+\binom{n}{4}-\ldots,$$

$$b=\binom{n}{1}-\binom{n}{3}+\binom{n}{5}-\ldots,$$

provar que $a^2 + b^2 = 2^n$, a partir de $(1 + i)^n$.

73) (IME-92) Sejam $n, k \in Z^*$. Chama-se potência fatorial de ordem k do número n o inteiro $n^{\overline{k}}$ obtido através da função

$$n^{\overline{k}}=\begin{cases} n(n+1)\ldots(n+k-1) & \text{para } k>1 \\ n & \text{para } k=1 \end{cases}$$

Demonstre que:

$$(n+1)^{\overline{k+1}}-n^{\overline{k+1}}=(n+1)^{\overline{k}}(k+1).$$

74) (Escola Naval-98) Se

$$a_n=\frac{(n+1)!-n!}{n^2[(n-1)!+n!]}$$

então a_{1997} é:

a) 1997/1996 b) 1/1998 c) 1998!

d) 1997 e) 1

75) (UFPE-99) Para qual valor de p temos o maior termo na expansão de

$$\left(1+\frac{1}{5}\right)^{30}=\sum_{p=0}^{30}\binom{30}{p}\frac{1}{5^p}?$$

76) (IME-06) Sejam as somas S_0 e S_1 definidas por:

$S_0 = C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + C_n^9 + \ldots + C_n^{3[n/3]}$

$S_1 = C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + C_n^{10} + \ldots + C_n^{3[(n-1)/3]+1}$

Calcule os valores de S_0 e S_1 em função de n, sabendo que [r] representa o maior inteiro menor ou igual ao número r.

Sugestão: utilize o desenvolvimento em binômio de Newton de $\left(1+\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^n$.

77) (ITA-01) A respeito das combinações $a_n = \binom{2n}{n}$ e $b_n = \binom{2n}{n-1}$ temos que, para cada n = 1, 2, 3, ... , a diferença $a_n - b_n$ é igual a:

a) $\frac{n!}{n+1}a_n$ b) $\frac{2n}{n+1}a_n$ c) $\frac{n}{n+1}a_n$

d) $\frac{2}{n+1}a_n$ e) $\frac{1}{n+1}a_n$

78) (IME-67) Seja 64 a soma dos coeficientes numéricos do desenvolvimento de $(x + y)^m$, onde m é um número natural. Supondo-se a e b números positivos, o terceiro e o sétimo termos do desenvolvimento de $(a + b)^m$

segundo as potências decrescentes de b serão $T_3 = 60$ e $T_7 = 64$. Determine a e b.

Exercícios Gerais

79) Provar que: $S = \sum_{p=5}^{15} \binom{p}{5} = \binom{16}{6}$

80) Provar que: $S = \sum_{p=1}^{7} \binom{p+5}{5} = \binom{13}{7}$

81) Mostrar que o termo independente de x de $\left(\frac{1}{x} + \sqrt[4]{x}\right)^{15}$ é 455.

82) Determinar a, b e n sabendo que dois termos consecutivos do desenvolvimento de $(ax + by)^n$ são $4860x^4y^2$ e $4320x^3y^3$.

83) Demonstrar que o coeficiente de x^{n-1} no desenvolvimento de $(x + 2)^n.x^3$ é $2n(n - 1)$.

84) Demonstrar que o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(1 + x + x^2)^{10}$ é 1452.

85) Demonstrar que o coeficiente de x^4 no desenvolvimento de $(1 - x - x^2)(1 - x)^8$ é 98.

86) Prove que:
$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + ... + n(n + 1)(n + 2) =$
$= (n + 3)(n + 2)(n + 1)n/4$

87) Demonstrar que a soma dos quadrados dos n primeiros termos da progressão aritmética (2, 5, 8, 11, ...) é dada por $S = n(6n^2 + 3n - 1)/2$.

88) Se $(3x^2 - 2x - 1)^4 = a_8x^8 + a_7x^7 + ... + a_1x + a_0$, então determine $a_8 + a_6 + a_4 + a_2$.

89) Calcule a soma: $\sum_{p=1}^{n} \frac{2^{p+1}}{p+1}\binom{n}{p}$.

90) Provar que:
$$\binom{n+1}{p+1} - \binom{n+1}{p} = \binom{n}{p+1} - \binom{n}{p-1}$$

91) Empregando as propriedades do triângulo de Pascal, provar que:
$$\sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{i} + \sum_{i=0}^{p}\binom{n+i}{i+1} = \binom{n+p+2}{n+1} - 1$$

92) Mostrar que o coeficiente de x^3 no desenvolvimento de $(1 + 3x + 2x^2)^{10}$ é 3780.

93) Demonstrar que o termo em x^4 de $(a - bx - cx^2)(a + bx)^6$ é $-5a^3b^2(b^2 + 3ac)x^4$.

94) Demonstrar que o coeficiente de x^4 de:
$(1 + x^2) + (1 + x^2)^2 + (1 + x^2)^3 + ... +$
$+ (1 + x^2)^{20}$ é 1330.

95) Mostrar que o coeficiente de x^5 de $(1 + x + x^2)(1 - x)^{15}$ é -2093.

96) Demonstrar que, se os coeficientes de x^n nos desenvolvimentos de $(ax + b)^{2n}$ e $(bx + a)^{2n+1}$ são iguais, $a = \frac{n+1}{2n+1}$.

97) Demonstrar que o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1 + x + 2x^2 + ... + nx^n)^2$, $n \geq p$ é dado por $(p^3 + 11p)/6$.

98) De $(1 + x)^n = (1 + x)^2.(1 + x)^{n-2}$, deduza que:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-2}{r} + 2\binom{n-2}{r-1} + \binom{n-2}{r-2}$$

99) Verificar que, quando n é ímpar:

$$2^{n-1} = \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1}$$

100) Calcule o valor de $\sum_{p=1}^{n} (-1)^{p-1} \frac{\binom{n}{p}}{p+1}$.

101) Calcule o valor de:

$$\sum_{p=0}^{2k} (-1)^p \binom{n}{p}\binom{n}{2k-p}.$$

102) Prove que:

a) $\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$

b) $1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \ldots + (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^k \binom{n-1}{k}$

103) Prove que:

a) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} . \cos\frac{n\pi}{4}$

b) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \ldots = 2^{\frac{n}{2}} . \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}$

c) $1 + \binom{n}{4} + \binom{n}{8} + \binom{n}{12} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}\right)$

d) $\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{9} + \ldots = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{\frac{n}{2}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{4}\right)$

e) $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \ldots = \frac{2^n}{3^{\frac{n}{2}}} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$

104) Determine o coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(1 + x^2 - x^3)^9$.

105) Calcule o valor de:

$$\binom{2n}{0}^2 - \binom{2n}{1}^2 + \binom{2n}{2}^2 - \binom{2n}{3}^2 \ldots - \binom{2n}{2n-1}^2 + \binom{2n}{2n}^2$$

106) Na expansão, pela fórmula binomial, da expressão $\left(x\sqrt{x} + \frac{1}{x^4}\right)^n$ o coeficiente binomial do terceiro termo é 44 unidades maior que o segundo coeficiente. Determine o termo que não contem x.

107) Na expansão da expressão $\left(1 + x + \frac{6}{x}\right)^{10}$ determine o termo que não contem x.

108) Determine para qual valor de k, o (k + 1) ésimo termo da expansão, pela fórmula binomial, da expressão $\left(1 + \sqrt{3}\right)^{100}$ é simultaneamente maior que o precedente e subsequente termos da expansão.

109) a) Determine a condição sobre a qual a expansão de $(1 + a)^n$ em potências de a (onde n é um inteiro e $a \neq 0$) contem dois termos consecutivos iguais. b) Pode a expressão possuir três termos consecutivos iguais?

110) Prove que se cada coeficiente na expansão da expressão $x(1 + x)^n$ em potências de x é dividido pelo expoente

da correspondente potência, então a soma dos quocientes obtidos é igual a $\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

111) Determine o coeficiente de x^{28} no desenvolvimento de $(x+2)^{20}.(x^2-1)^5$.

112) Determine o coeficiente de x^n no desenvolvimento de $(1-x)^2(1+x)^n$.

113) Calcule o termo máximo e o termo mínimo do desenvolvimento de em binômio de Newton de $\left(1+\frac{1}{2}\right)^{120}$.

114) Calcule: $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}3^k$.

115) Determine o coeficiente de x^6 no desenvolvimento de:

$$\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^3\left(x^2+\frac{1}{2x}\right)^3.$$

116) Calcule o coeficiente de x^5 no desenvolvimento de $(4x^2-2x+3)^5$.

117) Calcule $\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}5^k$.

118) Demonstre que: $\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}^2=\frac{(2n-1)!}{(n-1)!^2}$.

119) Demonstrar a desigualdade:

$$\frac{2}{2!}+\frac{7}{3!}+\frac{14}{4!}+\frac{23}{5!}+\ldots+\frac{k^2-2}{k!}+\ldots+\frac{9998}{100!}<3$$

120) Calcule o valor da soma:

$$\sum_{n=1}^{1994}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}.$$

121) Encontre o valor da soma:

$$1.1!+2.2!+3.3!+\ldots+$$
$$+(n-1).(n-1)!+n.n!$$

122) Demonstrar que:

$$2.4.6.8\ldots(2n-2)2n=n!2^n.$$

123) Demonstrar a relação de Kronecker:

$$\binom{m}{p+1}\binom{n}{p+1}\geq(m-p)(n-p)$$

124) Demonstre que:

a) $\frac{(n!)^2}{(n-1)!}=(n+1)!-n!$

b) $\frac{(1!)^2}{0!}+\frac{(2!)^2}{1!}+\frac{(3!)^2}{2!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(n-1)!}=(n+1)!-1$

125) Demonstre que:

a) $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)!}$.

b) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}=1-\frac{1}{(n+1)!}$

PROBABILIDADE

7.1. INTRODUÇÃO

Desde que o homem passou a apostar dinheiro em jogos de azar ou participar de todo tipo de sorteio de prêmios (bingo, loterias, etc) existe o desejo de proceder da melhor forma possível nestes jogos com o intuito de aumentar as possibilidades de ganhar. Durante vários séculos matemáticos dedicaram parte de suas carreiras no objetivo de desenvolver uma teoria que desse suporte à análise das chances de um jogador ganhar em jogos de azar. Neste capítulo desenvolveremos a Teoria das Probabilidades que, apesar do objetivo inicial de analisar os jogos de azar, atualmente representa um papel importantíssimo em outras áreas das ciências, tais como a Genética, Administração e Economia.

7.2. RESULTADO E EXPERIMENTO ALEATÓRIO

É de conhecimento geral que quando jogamos um dado podemos esperar que na sua face superior apareçam os números 1, 2, 3, 4, 5 ou 6. Da mesma forma, se jogarmos uma moeda sabemos que podem aparecer na sua face superior cara ou coroa. A tudo que pode ocorrer quando realizamos determinado experimento chamamos de resultado. Repare que resultado não é um conjunto e sim um elemento de um conjunto formado por todos os possíveis resultados.

Experimentos aleatórios são experimentos que, quando realizados nas mesmas condições, não apresentam nenhuma previsibilidade quanto aos seus resultados. Assim, a variabilidade dos diferentes resultados de um experimento aleatório é creditada somente ao acaso. Por exemplo, quando sorteamos um número em um bingo, supondo que o método de sorteio é honesto, qualquer um dos números pode ser sorteado e não existe nenhum motivo que leve alguém a prever qual número será sorteado na próxima extração. Deste modo, o sorteio de um número em um bingo pode ser considerado um experimento aleatório. Da mesma forma, quando arremessamos uma moeda, qualquer um dos resultados, cara ou coroa, é possível. Portanto, o experimento de arremessar uma moeda honesta também pode ser considerado um experimento aleatório.

Você deve agora estar se perguntando quando que um experimento não é aleatório? Por exemplo, tome um cubo e escreva nas suas seis faces o número 1. Quando você arremessar o cubo o resultado do experimento (número na face superior do dado) é previsível: vai aparecer o número 1. Este é um exemplo de experimento não aleatório. Na verdade, qualquer experimento que apresente um único resultado possível é um experimento não aleatório.

Note que um experimento é considerado aleatório mesmo que um resultado tenha mais chances de ocorrer que outro. Por exemplo, o experimento "chove em determinado dia de fevereiro em Belém" é considerado aleatório, por mais que normalmente chova em 90% dos dias de fevereiro em Belém.

7.3. ESPAÇO AMOSTRAL

Espaço amostral é o conjunto formado por todos os resultados possíveis de um experimento aleatório. Representamos o conjunto espaço amostral pelo símbolo Ω. Observe os exemplos abaixo:

i) quando arremessamos um dado: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

ii) quando arremessamos duas moedas, onde A = cara e B = coroa: $\Omega = \{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$;

iii) quando tiramos uma carta de um baralho e anotamos o seu naipe: Ω = {paus, copas, espada, ouro};

iv) quando arremessamos uma moeda até que apareça cara pela primeira vez, onde A = cara e B = coroa: $\Omega = \{(A), (B, A), (B, B, A), (B, B, B, A), ...\}$

Dizemos que um espaço amostral é finito se $n(\Omega) = N$, onde $N \in \mathbb{N}^*$. Os exemplos i), ii) e iii) acima representam espaços amostrais finitos. Um espaço amostral é infinito quando Ω possuir infinitos elementos. O exemplo iv) representa um caso de espaço amostral infinito.

7.4. EVENTO

Evento é qualquer subconjunto do espaço amostral. Deste modo, quando arremessamos um dado, podemos definir como evento A o conjunto formado pelos números pares que podem aparecer na face superior do dado, ou seja, $A = \{2, 4, 6\}$. Observe que $A = \{2, 4, 6\}$ é um subconjunto de $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Outro exemplo de evento é sortear um número primo de uma urna que contém bolas numeradas de 1 a 10. Neste caso, o evento citado é o conjunto $A = \{2, 3, 5, 7\}$ e o espaço amostral é o conjunto $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Mais uma vez temos um caso em que A é subconjunto de Ω.

O conjunto $\varnothing$ é denominado de evento impossível e o próprio espaço amostral Ω é um evento, denominado de evento certo. Um exemplo de evento impossível no caso de arremessar um dado é o conjunto A formado pelos números maiores que 6 na face superior do dado. Um exemplo de evento certo, para este mesmo espaço amostral, é o conjunto A formado pelos números naturais de 1 a 6.

Os subconjuntos unitários de Ω são denominados de eventos elementares e são iguais aos resultados do experimento aleatório. No caso de arremessarmos um dado os eventos elementares são {1}, {2}, {3}, {4}, {5} e {6}. Por outro lado, quando arremessamos duas moedas, onde A = cara e B = coroa, e olhamos para as duas faces superiores, os eventos elementares são (A, A), (A, B), (B, A) e (B, B).

Afirmamos que um evento ocorre num experimento se um de seus elementos é o resultado. Por exemplo, no experimento de arremessar um dado, considere o evento $A = \{1, 2, 3, 6\}$. Se o resultado do experimento for 3, por exemplo, que pertence ao evento A, então é possível concluir que o evento A ocorreu no experimento. Caso o resultado do experimento fosse 4, por exemplo, afirma-se que o evento A não ocorreu.

7.4.1. Evento Complementar

Suponha que A é um evento associado ao espaço amostral Ω. Define-se evento complementar de A, simbolizado por A^C (lê-se "A complementar"), como o evento que ocorre se e somente se o evento A não ocorrer. Em linguagem de conjuntos temos que $A^C = \Omega - A$. Por exemplo, se retirarmos uma carta de um baralho e anotamos seu naipe, o espaço amostral é Ω = {paus, copas, espada, ouro}. Se definirmos o evento como A = {paus, copas, ouro}, o evento complementar é $A^C = \Omega - A$ = {espada}.

Perceba que, em um experimento, se um determinado evento A ocorre segue que seu complementar não ocorre e vice versa.

7.4.2. União de Dois Eventos

Suponha que A e B são dois eventos associados ao espaço amostral Ω. Definimos A ∪ B como um evento que ocorre se e somente se o evento A ocorrer ou o evento B ocorrer. Denominamos A ∪ B como a *união dos eventos A e B* ou como o *evento união de A e B*. Por exemplo, se arremessamos um dado e definimos os eventos A = {1, 6} e B = {3, 4, 6} então a união dos eventos A e B é igual ao evento A ∪ B = {1, 3, 4, 6}.

Note que $A \cup A^C = \Omega$. Este resultado tem especial importância no cálculo das probabilidades de um evento.

7.4.3. Eventos Mutuamente Exclusivos

Se A e B são dois eventos associados ao espaço amostral Ω, definimos A ∩ B como um evento que ocorre se e somente se o evento A e o evento B ocorrem. Chamamos A ∩ B de *interseção dos eventos A e B* ou *evento interseção de A e B*. Usando o mesmo exemplo do item anterior, se Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}, A = {1, 6} e B = {3, 4, 6}, então A ∩ B = {6}.

Se A ∩ B = ∅ afirmamos que os eventos A e B são mutuamente exclusivos. Repare que um evento e seu complementar são sempre mutuamente exclusivos.

7.5. FREQUÊNCIA RELATIVA

Em um experimento aleatório, independentemente da imprevisibilidade dos resultados e por maior que seja a quantidade de resultados que este possua, é possível identificar determinados eventos que costumam ocorrer mais que outros. Por exemplo, se você possui uma urna com nove bolas vermelhas e uma bola branca é razoável de considerar que em uma extração é mais fácil retirar uma bola vermelha do que uma bola branca. Entretanto, estas expressões "tal evento é mais fácil de ocorrer" ou "espera-se que o evento A ocorra entes que o evento B" são absolutamente subjetivas. Para encontrar uma forma de quantificar a ocorrência de um evento vamos definir *frequência relativa* de um evento da seguinte maneira: Seja $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ o espaço amostral associado a um experimento aleatório que é realizado, nas mesmas condições, N vezes. Se é observado que o evento elementar

$\{a_i\}$ ocorreu n_i vezes então a frequência relativa associada ao evento elementar $\{a_i\}$ é igual a $f_i = \frac{n_i}{N}$, para $1 \leq i \leq k$. Por exemplo, se arremessarmos uma moeda 50 vezes e observarmos que em 26 ocasiões o resultado foi cara, então a frequência relativa associada a este evento elementar é $f_{cara} = \frac{26}{50} = 0,52$.

As frequências relativas dos resultados de um experimento podem ser calculadas independentemente da quantidade de vezes que o experimento é realizado. Entretanto, para ter algum sentido prático, é interessante realizar o experimento um número grande de vezes.

7.5.1. Propriedades da Frequência Relativa

i) Uma vez que $0 \leq n_i \leq N$ e $N \geq 0$, então a frequência relativa f_i do evento elementar $\{a_i\}$ é um número real tal que $0 \leq f_i \leq 1$;

ii) A soma das frequências relativas de todos os eventos elementares associados a um espaço amostral é igual a 1. Podemos demonstrar isto a partir de:

$$f_1 + f_2 + ... + f_k = \frac{n_1}{N} + \frac{n_2}{N} + ... + \frac{n_k}{N} = \frac{n_1 + n_2 + ... + n_k}{N} = \frac{N}{N} = 1$$

iii) Se o evento A é igual à união de determinados eventos elementares então a frequência relativa de A é igual à soma das frequências relativas destes eventos elementares, ou seja: $f_A = \frac{\sum_{a_i \in A} n_i}{N} \sum_{a_i \in A} \frac{n_i}{N} = \sum_{a_i \in A} f_i$.

iv) Observa-se experimentalmente que se realizarmos um experimento aleatório um número relativamente grande de vezes, apesar da imprevisibilidade dos resultados, os valores das frequências relativas dos eventos elementares acabam por flutuar em torno de determinados valores que podem ser previstos antes mesmo da realização do experimento. Por exemplo, suponha que você arremesse um certo número de vezes uma moeda que visualmente aparenta ser simétrica e homogênea. Não há nenhum motivo especial, além do acaso, de acreditar que a face cunhada com cara deva sair mais vezes que a face cunhada com coroa. Portanto, espera-se que as quantidades de vezes que saiam cara e coroa sejam aproximadamente iguais, implicando em uma frequência relativa próxima de 0,5 para os dois eventos elementares (cara e coroa). Existe o registro de um matemático francês chamado Buffon que jogou uma moeda 4040 vezes e observou que em 2048 vezes saiu cara, implicando para este experimento uma frequência relativa $f_{cara} = 0,50643$. A lei dos grandes números (LGN) é um teorema fundamental da teoria da probabilidade, que descreve o resultado da realização da mesma experiência repetidas vezes. De acordo com a LGN, a frequência relativa dos resultados da realização da mesma experiência repetidas vezes tende a se aproximar do valor esperado à medida que mais tentativas se sucederem.

7.6. DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADES

Uma distribuição de probabilidades consiste em associar a cada evento elementar $\{a_i\}$ de um espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ o valor p_i, $i \leq i \leq k$, de modo que:

i) $0 \leq p_1 \leq 1, 0 \leq p_2 \leq 1, ..., 0 \leq p_k \leq 1$;

ii) $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

Cada valor de p_i, $i \leq i \leq k$, é denominado de probabilidade de ocorrer o evento elementar $\{a_i\}$.

Exercícios Resolvidos

1) (FGV-03) Uma fatia de pão com manteiga pode cair no chão de duas maneiras apenas:

• Com a manteiga para cima (evento A)

• Com a manteiga para baixo (evento B)

Uma possível distribuição de probabilidade para esses eventos é:

a) $P(A) = P(B) = 3/7$ b) $P(A) = 0$ e $P(B) = 5/7$

c) $P(A) = -0,3$ e $P(B) = 1,3$ d) $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,6$

e) $P(A) = 6/7$ e $P(B) = 0$

Solução: Alternativa D

Inicialmente podemos notar que, da forma como foram definidos, os eventos A e B são os eventos elementares associados ao espaço amostral Ω definido por arremessar uma fatia de pão. Deste modo, para que tenhamos uma distribuição de probabilidades em Ω, devemos ter $0 \leq P(A) \leq 1$, $0 \leq P(B) \leq 1$ e $P(A) + P(B) = 1$. Isto ocorre somente no caso em que $P(A) = 0,4$ e $P(B) = 0,6$.

2) Considere o experimento de arremessar um dado não honesto, numerado de 1 a 6, onde a probabilidade de sair cada face é diretamente proporcional ao número da própria face. Determine a probabilidade associada ao número 6.

Solução:

Seja p_i a probabilidade de sair o número i (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) quando o dado é jogado uma vez. Pelo texto base tem-se que:

$$\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_5}{5} = \frac{p_6}{6}$$

Usando uma conhecida propriedade de proporção segue que:

$$\frac{p_1}{1} = \frac{p_2}{2} = \frac{p_3}{3} = \frac{p_4}{4} = \frac{p_5}{5} = \frac{p_6}{6} = \frac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6}{1+2+3+4+5+6} = \frac{1}{21}$$

Assim: $\frac{p_6}{6} = \frac{1}{21} \Rightarrow p_6 = \frac{2}{7}$

7.6.1. Espaços Amostrais Equiprováveis

Como foi visto na propriedade iv) de frequência relativa, quando executamos um experimento aleatório um número relativamente grande de vezes, observa-se que os valores das frequências relativas dos eventos elementares tendem a estabilizar em torno de certos números. Assim, devido à simetria, se você arremessar um dado honesto uma grande quantidade N de vezes é de se esperar que a face com o número 3 apareça em aproximadamente 1/6 das vezes. Devido a estas observações experimentais, a análise da simetria existente e também ao bom senso, os matemáticos estipularam que se pode adaptar a determinados experimentos aleatórios um modelo matemático em que todos os eventos elementares possuem a mesma probabilidade de ocorrer. Dizemos, nestes casos, que o espaço amostral é equiprovável ou equiprobabilístico.

Em linguagem matemática, se $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ é um espaço amostral equiprovável, então $p_1 = p_2 = p_3 = ... = p_k$, onde a distribuição de probabilidades é denominada distribuição uniforme. Desde que $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = 1$, pode-se concluir que em um espaço amostral equiprovável, apresentando k eventos elementares, $p_1 = \frac{1}{k}$, $p_2 = \frac{1}{k}$, ... $p_k = \frac{1}{k}$.

Por exemplo, se escolhermos ao acaso uma carta de um baralho, como um baralho possui 52 cartas e, a princípio, podemos supor que cada carta possua a mesma possibilidade de ser retirada, então cada carta do baralho possui uma probabilidade $\frac{1}{52}$ de ser escolhida.

Perceba que os valores para os quais as frequências relativas dos eventos elementares tendem quando um experimento aleatório é realizado um grande número de vezes são exatamente as probabilidades associadas a estes eventos. Portanto, quando arremessamos uma moeda honesta e supomos, devido à simetria, que o espaço amostral deste experimento é equiprovável, podemos concluir que a probabilidade associada ao evento sair face cara é igual a 1/2, que é exatamente o valor em que a frequência relativa deste evento tende a estabilizar quando realizamos o experimento um grande número de vezes. Deste modo, a probabilidade de um evento elementar acontecer está associada à ocorrência esperada deste evento. Em outras palavras, a frequência relativa é o valor medido experimentalmente depois que um experimento aleatório é realizado, enquanto que a probabilidade é o que esperamos que ocorra antes que o experimento seja realizado. Assim, se um evento elementar possui 1/3 de probabilidade de ocorrer, espera-se que, se realizarmos o experimento um certo número de vezes, este evento elementar deva ocorrer em, muito aproximadamente, 1/3 das vezes.

7.6.2. Probabilidade de Ocorrer um Evento

Suponha que um experimento aleatório possua o espaço amostral $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ e uma distribuição de probabilidades $p_1, p_2, ... p_k$. Definimos probabilidade de ocorrência de um evento A como a soma das probabilidades dos elementos do conjunto A.

Em linguagem matemática: $p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i)$. Por exemplo, suponhamos que arremessamos um dado não viciado e estamos interessados em quantificar a probabilidade de sair um número múltiplo de 3. O espaço amostral deste experimento aleatório é $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Podemos supor, devido à simetria, que este experimento é equiprovável. Assim, $p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{6}$. Como o evento citado é igual a $A = \{3, 6\}$, então sua probabilidade é $p_A = p_3 + p_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$.

7.6.3. Probabilidades de Eventos em um Espaço Equiprovável

Consideremos um experimento aleatório que possua o espaço amostral equiprovável $\Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ e uma distribuição de probabilidades $p_1, p_2, ... p_k$. Uma vez que o espaço amostral é equiprovável então sabemos que $p_1 = \frac{1}{k}$, $p_2 = \frac{1}{k}$, ... $p_k = \frac{1}{k}$. Se um evento A é um conjunto formado de n elementos, então podemos afirmar que: $p(A) = \sum_{a_i \in A} p_i = \underbrace{\frac{1}{k} + \frac{1}{k} + ... + \frac{1}{k}}_{n \text{ vezes}} = \frac{n}{k}$

Como o número de elementos do conjunto Ω é k e o número de elementos do conjunto A é n, então podemos afirmar que, em um espaço amostral equiprovável, a probabilidade de ocorrer o evento A é igual a $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$.

Na utilização desta expressão para calcular a probabilidade de um evento deve-se ter o cuidado de considerar os dois conjuntos A e Ω simultaneamente ordenados ou não-ordenados. Por exemplo, suponha que exista uma urna com 10 bolas numeradas de 1 a 10. Você deve retirar duas bolas, sem reposição, da urna. Qual o valor da probabilidade de os números nas duas bolas serem pares? Repare que você pode considerar ou não a ordem com que as bolas são retiradas. Se for considerada a ordem, o espaço amostral é $\Omega = \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), ..., (9, 10), (10, 9)\}$ e o evento A, definido por escolher duas bolas com números pares, é da forma $A = \{(2, 4), (4, 2), (2, 6), (6, 2), ..., (8, 10), (10, 8)\}$. Assim, cada elemento de Ω é da forma (a_1, a_2), onde para cada um dos 10 valores de a_1 existem 9 valores de a_2. Deste modo, $n(\Omega) = 10.9 = 90$. Por outro lado, os elementos de A são da forma (b_1, b_2), onde para

cada um dos 5 valores de b_1 existem 4 valores de b_2. Portanto, temos que $n(A) = 5.4 = 20$. Consequentemente, a probabilidade de que os números nas duas bolas retiraras sejam pares é igual a $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}$. Contudo, poderíamos calcular este valor desconsiderando a ordem com que as bolas são retiradas. Isto seria equivalente e pegar com uma das mãos de uma vez só as duas bolas da urna. Neste caso, teremos $\Omega = \{(1, 2), (1, 3), ..., (9, 10)\}$ e $A = \{(2, 4), (2, 6), ..., (8, 10)\}$. Os elementos de Ω são da forma (a_1, a_2), onde devemos escolher dois valores de 1 a 10. Assim, $n(\Omega) = C_{10,2} = 45$. Os elementos de A são da forma (b_1, b_2), onde devemos escolher dois valores de 2, 4, 6, 8 e 10. Deste modo, temos que $n(A) = C_{5,2} = 10$. Portanto, desconsiderando a ordem com que as bolas são sorteadas, a probabilidade de que os números nas duas bolas retiraras sejam pares é igual a $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9}$.

Evidentemente, os valores encontrados para p(A) pelos dois métodos devem ser iguais. Porém, deve-se ter bastante cuidado de considerar ou não os elementos ordenados tanto em Ω quanto em A.

7.7. PROPRIEDADES DA PROBABILIDADE

i) A probabilidade do evento impossível é igual a zero: $p(\varnothing) = 0$;

Demonstração:

Sabemos que a probabilidade de ocorre um evento é igual à soma das probabilidades dos elementos deste evento. Quando um evento não possui elementos, claramente temos que a probabilidade associada à ocorrência deste evento é igual a zero.

ii) A probabilidade do evento certo é igual a um: $p(\Omega) = 1$;

Demonstração:

Sabemos que a probabilidade de ocorrer o evento A é igual a $p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i)$.

Quando $A = \Omega = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, temos que $p(\Omega) = p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

iii) Se $A \subset B$ então $p(A) \leq p(B)$;

Demonstração:

Se $A \subset B$ então podemos representar estes dois eventos da seguinte maneira:

$A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ e $B = \{a_1, a_2, ..., a_k, a_{k+1}, ..., a_r\}$, onde $k, r \in \mathbb{N}$, $r > k$.

Portanto: $p(A) = p(a_1) + p(a_2) + ... + p(a_k)$ e $p(B) = p(a_1) + p(a_2) + ... + p(a_r)$

Assim: $p(B) - p(A) = p(a_{k+1}) + ... + p(a_r)$

Desde que a probabilidade de um evento elementar qualquer E satisfaz $0 \leq p(E) \leq 1$, então temos que: $0 \leq p(a_{k+1}) + ... + p(a_r) \leq 1 \Rightarrow p(B) - p(A) \geq 0 \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.

iv) Se A é um evento, então $0 \leq p(A) \leq 1$;

Demonstração:

Se A é um evento então $\varnothing \subset A \subset \Omega \Rightarrow p(\varnothing) \leq p(A) \leq p(\Omega) \Rightarrow 0 \leq p(A) \leq 1$.

v) Se A e B são dois eventos, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
Demonstração:
Sabemos que: $p(A \cup B) = \sum_{a_i \in A \cup B} p_i$, $p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i)$ e $p(B) = \sum_{a_i \in B} p(a_i)$.
Note que no valor de $p(A) + p(B)$ contamos duas vezes os valores das probabilidades dos eventos elementares de $A \cap B$. Deste modo, para que possamos utilizar esta soma para representar o valor de $p(A \cup B)$, do valor de $p(A) + p(B)$ devemos subtrair uma vez o valor de $p(A \cap B)$. Portanto, podemos escrever que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

Em particular, se os eventos A e B são mutuamente exclusivos, ou seja, se $A \cap B = \varnothing$ (e consequentemente $p(A \cap B) = 0$), então segue que $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

vi) $p(A^C) = 1 - p(A)$;
Demonstração:
Desde que $A \cap A^C = \varnothing$ e $A \cup A^C = \Omega$:
$p(A \cup A^C) = p(A) + p(A^C) - p(A \cap A^C) \Rightarrow 1 = p(A) + p(A^C) - 0 \Rightarrow$
$p(A^C) = 1 - p(A)$

Exercícios Resolvidos

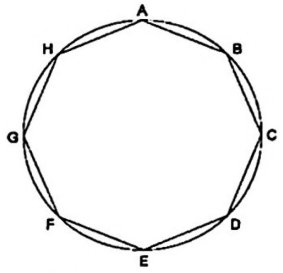
1) (PUC/SP-05) Aser, Bia, Cacá e Dedé fazem parte de um grupo de 8 pessoas que serão colocadas lado a lado para tirar uma única fotografia. Se os lugares em que eles ficarão posicionados forem aleatoriamente escolhidos, a probabilidade de que, nessa foto, Aser e Bia apareçam um ao lado do outro e Cacá e Dedé não apareçam um ao lado do outro será:
a) 5/28 b) 3/14 c) 7/28 d) 2/7 e) 9/28
Solução: Alternativa A
Claramente o espaço amostral deste experimento consiste em permutar livremente 8 pessoas, onde temos que $n(\Omega) = 8! = 40320$. Para o evento, observe o seguinte esquema, onde as letras indicam as 8 pessoas:

A	B	C	D	E	F	G	H

Vamos definir o evento X como o conjunto das permutações em que as letras A e B estão juntas e as letras C e D estão separadas. Para contar o número de elementos de A vamos utilizar o método indireto de contagem. Vamos calcular inicialmente o número de permutações dos 7 elementos acima e subtrair deste valor o número de permutações em que as letras C e D estão juntas (lembrando da permutação interna das letras C e D). Como além da sequência A-B também podemos ter B-A, no final devemos multiplicar tudo por 2. Assim, $n(X) = (7! - 6!.2!)2 = 7200$.

Logo: $p_X = \frac{n(X)}{n(\Omega)} = \frac{7200}{40320} = \frac{5}{28}$.

2) (PUC/SP-04) Na figura tem-se um octógono regular inscrito em uma circunferência.



Selecionando-se aleatoriamente três vértices desse octógono, a probabilidade de que eles determinem um triângulo retângulo é:

a) 9/14 b) 4/7 c) 3/7 d) 3/14 e) /17

Solução: Alternativa C

Definimos o espaço amostral como o conjunto de todos os ternos não ordenados de vértices a partir dos vértices do octógono. O evento A consiste em escolher 3 vértices de modo que o triângulo determinado seja retângulo. Claramente, temos $n(\Omega) = C_{8,3} = 56$. Sabemos que todo triângulo retângulo está inscrito em uma semi circunferência onde a hipotenusa coincide com o seu diâmetro. Desta forma, para selecionarmos um triângulo retângulo basta escolher um diâmetro (4 possibilidades) e um outro ponto (6 possibilidades). Assim: $n(A) = 4.6 = 24$.

Logo: $p_A = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

3) (UERJ-04) Numa sala existem cinco cadeiras numeradas de 1 a 5. Antônio, Bernardo, Carlos, Daniel e Eduardo devem se sentar nestas cadeiras. A probabilidade de que nem Carlos se sente na cadeira 3, nem Daniel na cadeira 4, equivale a:

a) 16% b) 54% c) 65% d) 96%

Solução: Alternativa C

Consideremos os seguintes eventos: A = permutações em que Carlos não está sentado na cadeira 3 e B = permutações em que Daniel não está sentado na cadeira 4.

Estes eventos estão associados ao espaço amostral que consiste nas permutações livres das 5 pessoas. Observemos que:

$$p_{(A^c)} = p_{(B^c)} = \frac{n(A^C)}{n(\Omega)} = \frac{4!}{5!} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad p_{(A)} = p_{(B)} = 1 - p_{(A^c)} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Por outro lado $p_{(A \cap B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{5! - 3!}{5!} = \frac{19}{20}$.

Assim: $p_{(A \cup B)} = p_{(A)} + p_{(B)} - p_{(A \cap B)} = \frac{4}{5} + \frac{4}{5} - \frac{19}{20} = \frac{13}{20} = 0,65 = 65\%$.

4) (UFRJ-05) N homens e N mulheres, $N \geq 1$, serão dispostos ao acaso numa fila. Seja p_N a probabilidade de que a primeira mulher na fila ocupe a segunda posição. Calcule p_N e determine a partir de que valor de N tem-se $p_N \leq 11/40$.

Solução:

Considere o seguinte evento: A = distribuições em que a 1ª pessoa na fila é um homem e a 2ª pessoa é uma mulher. Vamos organizar um esquema para calcular n(A):

Para a escolha do homem que vai ocupar o 1º lugar na fila existem N possibilidades, para a escolha da mulher que vai ocupar o 2º lugar na fila existem N possibilidades e para a permutação das demais $2N - 2$ pessoas existem $(2N - 2)!$ possibilidades. Assim: $n(A) = N^2.(2N - 2)!$.

Assim: $p_N = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{N^2(2N-2)!}{(2N)!} = \frac{N}{2(2N-1)}$

$$p_N \leq \frac{11}{40} \Rightarrow \frac{N}{2(2N-1)} \leq \frac{11}{40} \Rightarrow \frac{N}{2N-1} - \frac{11}{20} \leq 0 \Rightarrow \frac{-2N+11}{20(2N-1)} \leq 0$$

Resolvendo a inequação acima obtemos $N \leq 1/2$ ou $N \geq 11/2$. Como N é inteiro ≥ 1 então a solução da inequação se resume a $N \geq 6$.

5) (UFG-05) Um campeonato de futebol é organizado com 24 clubes, previamente definidos, divididos em seis grupos ou chaves (A, B, C, D, E, F). Cada grupo tem um cabeça-de-chave, que é um dos seis primeiros colocados no campeonato anterior, enquanto os demais integrantes são escolhidos por sorteio, de modo que, primeiro, monta-se o grupo A (que tem como cabeça-de-chave o primeiro colocado no campeonato anterior), depois o grupo B (que tem o segundo colocado como cabeça-de-chave) e assim por diante.

a) Uma vez montados os grupos A e B, de quantas maneiras diferentes o grupo C poderá ser montado?

b) Antes de iniciar o sorteio, qual a probabilidade de um clube X, que não é cabeça-de-chave, ficar no grupo B?

Solução:

a) Como os seis cabeças de chave já estão definidos e distribuídos pelas chaves então temos que dividir os demais 18 clubes nas 6 chaves. Uma vez montados os grupos A e B sobram ainda distribuir 12 clubes. Destes, 3 devem ser escolhidos para ficar no grupo C. Assim, existem $C_{12,3} = 220$ maneiras.

b) Sejam: Ω = distribuições dos 12 clubes que não são cabeças de chave nas 6 chaves; A = distribuições em que o clube X está no grupo B. Assim:

$$n(\Omega) = C_{18,3}.C_{15,3}.C_{12,3}.C_{9,3}.C_{6,3}.C_{3,3} = \frac{18!}{15!.3!}\frac{15!}{12!.3!}\frac{12!}{9!.3!}\frac{9!}{6!.3!}\frac{6!}{3!.3!} = \frac{18!}{(3!)^6}.$$

$$n(A) = C_{17,3}.C_{15,2}.C_{12,3}.C_{9,3}.C_{6,3}.C_{3,3} = \frac{17!}{14!.3!}\frac{15!}{13!.2!}\frac{12!}{9!.3!}\frac{9!}{6!.3!}\frac{6!}{3!.3!} = \frac{15.17!}{26.(3!)^5}.$$

Portanto: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\frac{15.17!}{26.(3!)^5}}{\frac{18!}{(3!)^6}} = \frac{5}{52}$.

6) (Unicamp-16) Uma moeda balanceada é lançada quatro vezes, obtendo-se cara exatamente três vezes. A probabilidade de que as caras tenham saído consecutivamente é igual a

a) 1/4. b) 3/8. c) 1/2. d) 3/4.

Solução: Alternativa C

O número de elementos do espaço amostral é tão pequeno que é mais prático enumerar os casos. Se A é cara e B coroa, tem-se as seguintes possibilidades:

AAAB AABA ABAA BAAA

Observa-se que, dos 4 elementos do espaço amostral, 2 possuem as caras juntas. Logo, a probabilidade pedida vale $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

7) Um jogador lança dois dados honestos enquanto seu adversário lança apenas um. Determine a probabilidade da soma dos pontos dos dois dados lançados pelo jogador ser igual aos pontos obtidos pelo dado lançado pelo adversário.

Solução:

O experimento consiste em montar ternos ordenados de números da forma (a, b, c), onde a é o número obtido pelo jogador e b e c, nesta ordem, os números obtidos pelo adversário.

Se a = 1 tem-se 0 possibilidades para b e c

Se a = 2 tem-se 1 possibilidade para b e c: (1, 1)

Se a = 3 tem-se 2 possibilidades para b e c: (1, 2), (2, 1)

Se a = 4 tem-se 3 possibilidades para b e c: (1, 3), (2, 2), (3, 1)

Se a = 5 tem-se 4 possibilidades para b e c: (1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)

Se a = 6 tem-se 5 possibilidades para b e c: (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)

Assim: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{0+1+2+3+4+5}{6.6.6} = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$

8) (ENEM-15) Uma competição esportiva envolveu 20 equipes com 10 atletas cada. Uma denúncia à organização dizia que um dos atletas havia utilizado substância

proibida. Os organizadores, então, decidiram fazer um exame antidoping. Foram propostos três modos diferentes para escolher os atletas que irão realizá-lo:
Modo I: sortear três atletas dentre todos os participantes;
Modo II: sortear primeiro uma das equipes e, desta, sortear três atletas;
Modo III: sortear primeiro três equipes e, então, sortear um atleta de cada uma dessas três equipes.
Considere que todos os atletas têm igual probabilidade de serem sorteados e que P(I), P(II) e P(III) sejam as probabilidades de o atleta que utilizou a substância proibida ser um dos escolhidos para o exame no caso de o sorteio ser feito pelo modo I, II ou III. Comparando-se essas probabilidades, obtém-se

a) $P(I) < P(III) < P(II)$ b) $P(II) < P(I) < P(III)$ c) $P(I) < P(II) = P(III)$
d) $P(I) = P(II) < P(III)$ e) $P(I) = P(II) = P(III)$

Solução: Alternativa E

Seja X o atleta dopado. Vamos calcular a probabilidade do atleta X ser pego no doping em cada modo de sorteio.

i) modo I: No evento, deve-se fixar o atleta X e escolher os outros 2 atletas dentre 99. No espaço amostral deve-se escolher 3 atletas dentre 200. Assim:

$$P(I) = \frac{\binom{199}{2}}{\binom{200}{3}} = \frac{\frac{199!}{2!\cancel{197!}}}{\frac{200!}{3!\cancel{197!}}} = \frac{\cancel{199!}.3.\cancel{2!}}{200.\cancel{199!}.\cancel{2!}} = \frac{3}{200} = 0,15 \Rightarrow P(I) = 15\%$$

ii) modo II: No evento, deve-se escolher o time do atleta X e depois escolher os outros 2 atletas dentre 9. No espaço amostral deve-se escolher 1 time, dentre 10, e depois escolher 3 atletas dentre 10. Assim:

$$P(II) = \frac{\binom{9}{2}}{20 \times \binom{10}{3}} = \frac{\frac{9!}{2!\cancel{7!}}}{20\frac{10!}{3!\cancel{7!}}} = \frac{\cancel{9!}.3.\cancel{2!}}{20.10.\cancel{9!}.\cancel{2!}} = \frac{3}{200} = 0,15 \Rightarrow P(II) = 15\%$$

iii) modo III: No evento, deve-se fixar o time do atleta X, escolher os outros dois times, entre 19, para depois escolher 1 atleta nestes 2 times. No espaço amostral deve-se escolher 3 times, dentre 20, e depois escolher 1 atleta desses 3 times. Assim:

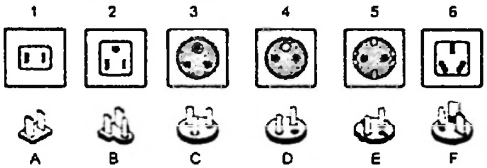
$$P(III) = \frac{\binom{19}{2} \times \cancel{10} \times \cancel{10}}{\binom{20}{3} \times \cancel{10} \times \cancel{10} \times 10} = \frac{\frac{19!}{2!\cancel{17!}}}{\frac{20!}{3!\cancel{17!}}10} = \frac{\cancel{19!}.3.\cancel{2!}}{20.\cancel{19!}.\cancel{2!}.10} = \frac{3}{200} = 0,15 \Rightarrow$$

$P(III) = 15\%$

Assim, conclui-se que $P(I) = P(II) = P(III)$

9) (Unifesp-20) A figura indica seis tipos de tomadas e os pinos projetados para nelas se encaixarem (1-A, 2-B, 3-C, 4-D, 5-E e 6-F). Além dessa correspondência, sabe-se que:

• O pino A também se encaixa na tomada 2.
• O pino D também se encaixa nas tomadas 3 e 5.
• O pino E também se encaixa nas tomadas 3 e 4.



a) Sorteando-se aleatoriamente um tipo de pino e um tipo de tomada, qual é a probabilidade de que o encaixe entre eles possa ser feito?
b) Sorteando-se aleatoriamente dois tipos de tomadas e dois tipos de pinos, qual é a probabilidade de que seja possível conectar um deles a uma tomada e o outro a outra?

Solução:

a) Como são 6 pinos e 6 tomadas é possível formar $6 \times 6 = 36$ pares ordenados (pino, tomada), que o número de elementos do espaço amostral.
Levando em consideração as compatibilidades dos pinos com as tomadas, o número de elementos do evento vale $1 \times 2 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 3 + 1 \times 3 + 1 \times 1 = 11$.

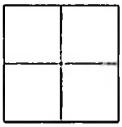
Assim, $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega_1)} = \dfrac{11}{36}$

b) Interpretando que os pinos são distintos e as tomadas também são distintas, existem no total $C_{6,2} \times C_{6,2} = 225$ possibilidades de escolher os dois pares.
Para a análise das compatibilidades, é necessário separar em vários casos:
Pinos A e B: (A1, C3) e (A2, C3) → 2 possibilidades
Pinos A e D: (A1, D3), (A1, D4), (A1, D5), (A2, D3), (A2, D4) e (A2, D5) → 6 possibilidades
Pinos A e E: (A1, E3), (A1, E4), (A1, E5), (A2, E3), (A2, E4) e (A2, E5) → 6 possibilidades
Pinos A e F: (A1, F6) e (A2, F6) → 2 possibilidades
Pinos B e C: (B2, C3) → 1 possibilidade
Pinos B e D: (B2, D3), (B2, D4) e (B2, D5) → 3 possibilidades
Pinos B e E: (B2, E3), (B2, E4) e (B2, E5) → 3 possibilidades
Pinos B e F: (B2, F6) → 1 possibilidade
Pinos C e D: (C3, D4) e (C3, D5) → 2 possibilidades
Pinos C e E: (C3, E4) e (C3, E5) → 2 possibilidades
Pinos D e E: (D3, E4) ou (D4, E3), (D4, E5) ou (D5, E4) e (D5, E3) ou (D3, E5) → 3 possibilidades
Pinos D e F: (D3, F6), (D4, F6) e (D5, F6) → 3 possibilidades

Pinos E e F: (E3, F6), (E4, F6) e (E5, F6) → 3 possibilidades

Logo, o número de casos do evento é 39. Assim: $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega_2)} = \frac{39}{225} = \frac{13}{75}$.

10) (IME-10)



Cada um dos quatro quadrados menores da figura acima é pintado aleatoriamente de verde, azul, amarelo ou vermelho. Qual é a probabilidade de que ao menos dois quadrados, que possuam um lado em comum, sejam pintados da mesma cor?

a) 1/2 b) 5/8 c) 7/16 d) 23/32 e) 43/64

Solução: Alternativa E

O número de elementos do espaço amostral é $n(\Omega) = 4.4.4.4 = 64$

Com relação ao evento, é necessário dividir a análise em três casos:

Usando uma cor: 4 possibilidades

Usando duas cores: $\binom{4}{2}.4 + 4.4.3 = 72$ possibilidades

Usando três cores: $\binom{4}{3}.3.4.2! = 96$ possibilidades

Então, segue que $p = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4 + 72 + 96}{4.4.4.4} = \frac{43}{64}$

11) (ITA-16) Numa certa brincadeira, um menino dispõe de uma caixa contendo quatro bolas, cada qual marcada com apenas uma destas letras: N, S, L e O. Ao retirar aleatoriamente uma bola, ele vê a letra correspondente e devolve a bola à caixa. Se essa letra for N, ele dá um passo na direção Norte; se S, em direção Sul, se L, na direção Leste e se O, na direção Oeste.

Qual a probabilidade de ele voltar para a posição inicial no sexto passo?

Solução:

De modo que o menino retorne à posição inicial a quantidade de bolas N deve ser igual ao de bolas S e a quantidade de bolas L deve ser igual ao de bolas O. Assim, existem as seguintes possibilidades:

i) NNNSSS: $\frac{6!}{3!.3!} = 20$ possibilidades

ii) LLLOOO: $\frac{6!}{3!.3!} = 20$ possibilidades

iii) NNSSLO: $\frac{6!}{2!.2!} = 180$ possibilidades

iv) NSLLOO: $\frac{6!}{2!.2!} = 180$ possibilidades

Assim: $p = \frac{20+20+180+180}{4^6} = \frac{25}{256}$

12) (IME-20) Considere os conjuntos A = {0, 1, 2, 3, 4} e B = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}. Seja F o conjunto de funções cujo domínio é A e cujo contradomínio é B. Escolhendo-se ao acaso uma função f de F, a probabilidade de f ser estritamente crescente ou ser injetora é:

a) 0,00252 b) 0,00462 c) 0,25200 d) 0,30240 e) 0,55440

Solução: Alternativa D

O número total de funções de A em B vale $n(\Omega) = 10\times10\times10\times10\times10 = 10^5$.

Para determinar uma função estritamente crescente basta escolher 5 elementos distintos em B. O menor elementos será f(0), o segundo menor f(1) e assim por diante. Assim, o número de funções estritamente crescentes é $n(C) = C_{10,5} = 252$

O número de funções injetoras é igual a $n(I) = 10.9.8.7.6 = 30240$

Entretanto, como todas as funções estritamente crescentes são injetoras, segue que $n(C \cup I) = n(I) = 30240$

Deste modo: $p(C \cup I) = \frac{n(I)}{n(\Omega)} = \frac{30240}{10^5} = 0,30240$

13) (IME-11) Uma pessoa lança um dado n vezes. Determine, em função de n, a probabilidade de que a sequência de resultados obtidos pelos lançamentos dos dados se inicie por 4 e que, em todos eles, a partir do segundo, o resultado seja maior ou igual ao lançamento anterior.

Solução:

$$4 \underbrace{_\ _\ _\ \cdots\ _\ _}_{n-1}$$

Claramente, o espaço amostral Ω possui 6^n elementos.

Com relação ao evento, os espaços devem ser preenchidos apenas pelos números 4, 5 ou 6, sempre escritos em ordem não-crescente. Note que para escrever uma certa quantidade de números 4, 5 e 6 em ordem não-decrescente, basta determinar a quantidade de tais números, uma vez que só existe uma maneira de colocá-los em ordem não decrescente. Assim, o problema se resume a determinar a quantidade de números 4, 5 e 6. Sejam:

x = quantidade de números 4

y = quantidade de números 5

z = quantidade de números 6

Logo, deve-se calcular o número de soluções naturais de $x + y + z = n - 1$

Sabe-se que este número é igual ao número de permutações dos elementos:

$$\bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \ldots\ \bullet\ \bullet\ |\ |$$

Assim, $n(A) = \frac{(n+1)!}{2!(n-1)!} = \frac{(n+1)n}{2} \Rightarrow p(A) = \frac{\frac{(n+1)n}{2}}{6^n} \Rightarrow p(A) = \frac{(n+1)n}{2.6^n}$

14) (Olimpíada da Holanda-92) Quatro dados não-viciados são jogados. Qual é a probabilidade que o produto dos números que aparecem nas faces superiores dos dados seja 36?

Solução:

Como existem 6 resultados em cada dado: $n(\Omega) = 6^4$.

Existem quatro diferentes possibilidades de o produto valer 36:

i) {1, 1, 6, 6}: ocorre em $\frac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras

ii) {2, 2, 3, 3}: ocorre em $\frac{4!}{2!2!} = 6$ maneiras

iii) {1, 4, 3, 3}: ocorre em $\frac{4!}{2!} = 12$ maneiras

iv) {1, 2, 3, 6}: ocorre em $4! = 24$ maneiras

Desta forma, a probabilidade de o produto ser 36 é $p = \frac{6+6+12+24}{6^4} = \frac{1}{27}$.

15) (AIME-98) Nove cartões numerados com 1, 2, 3, ... , 9 são aleatoriamente divididos entre três pessoas, cada um recebendo três cartões. Determine a probabilidade que a soma dos números dos cartões de cada pessoa seja um número ímpar.

Solução:

Seja A o evento que consiste em separar os 9 números em 3 ternos de modo que a soma dos números dos ternos seja ímpar. O espaço amostral é formado por todos os conjuntos de 3 ternos que podemos formar com nove primeiros inteiros positivos.

Para o cálculo de $n(\Omega)$ devemos inicialmente escolher os três números que ficarão com a primeira pessoa, depois escolher os três números que ficarão com a segunda pessoa e finalmente escolher os 3 números que ficarão com a terceira pessoa.

Assim, temos que $n(\Omega) = C_{9,3}.C_{6,3}.C_{3,3} = 84.20.1 = 1680$.

Como de 1 a 9 existem 5 inteiros ímpares e 4 pares a única possibilidade de que a soma 3 ternos de números seja ímpar é que um deles receba 3 números ímpares, outro receba um número ímpar e dois pares e o último receba também um número ímpar e dois pares.

Temos o seguinte esquema de distribuição dos números:

I	I	I		I	P	P		I	P	P

Deste modo, $n(A) = (C_{5,3})(C_{2,1}.C_{4,2})(C_{1,1}.C_{2,2}) = (10)(2.6)(1.1) = 120$.

Portanto: $p_A = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{120}{1680} = \frac{1}{14}$.

16) (Olimpíada da Bélgica-01) Em um programa de TV três homens escolhem, independentemente, suas mulheres favoritas entre três mulheres e, ao mesmo tempo, estas três mulheres escolhem seus homens favoritos. Se um homem e uma mulher escolhem um ao outro, então eles ganham uma viagem. Qual a probabilidade que o programa distribua três viagens?

a) 0,2% b) 0,8% c) 2,5% d) 4,0% e) 16,7%

Solução: Alternativa B

Sejam os homens dados pelas letras A, B e C e as mulheres dadas pelas letras a, b e c. Vamos organizar o espaço amostral de modo que seus elementos sejam da forma $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$, onde:

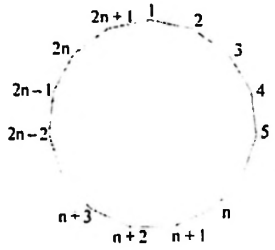
x_1 = mulher escolhida pelo homem A; x_2 = mulher escolhida pelo homem B; x_3 = mulher escolhida pelo homem C; x_4 = homem escolhido pela mulher a; x_5 = homem escolhido pela mulher b; x_6 = homem escolhido pela mulher c. Como cada x_i possui 3 possibilidades de escolha, então $n(\Omega) = 3^6$.

Seja A o evento pedido no enunciado. As três passagens serão distribuídas nos casos em que as letras da sequência x_1-x_2-x_3 sejam todas distintas e sejam as minúsculas das letras da sequência x_4-x_5-x_6. Por exemplo, se as escolhas dos homens, nesta ordem, sejam b-a-c, então as escolhas das mulheres devem ser, nesta ordem, B-A-C. Portanto, uma vez definida a sequência x_1-x_2-x_3 (com letras distintas), a sequência x_4-x_5-x_6 já está definida.

Concluímos, então, que $n(A) = 3!$. $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{3!}{3^6} \cong 0{,}8\%$

17) (USAMO-73) Três vértices distintos são escolhidos aleatoriamente dos vértices de polígono regular de $2n + 1$ lados. Se todos as escolhas são igualmente possíveis, qual a probabilidade que o centro do dado polígono pertença ao interior do triângulo determinado pelos três pontos escolhidos aleatoriamente.

Solução:



Fixemos o vértice 1 e analisemos a escolha dos outros dois vértices do triângulo. Tome dois vértices consecutivos do polígono (por exemplo, os vértices 1 e 2) como dois vértices do triângulo. Repare que neste caso temos somente uma possibilidade para escolher o outro vértice (neste caso o vértice $n + 2$) de modo que este triângulo possua o centro do polígono. Se escolhermos os vértices 1 e 3, notemos que existem duas possibilidades (vértices $n + 2$ e $n + 3$) para a escolha do terceiro vértice do triângulo. Se escolhermos os vértices 1 e 4, notemos que existem três possibilidades (vértices $n + 2$, $n + 3$ e $n + 4$) para a escolha do terceiro vértice do triângulo. E assim por diante. Assim, o número de casos favoráveis é:

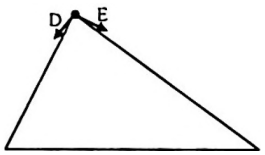
$$n(A) = 1 + 2 + 3 + ... + n = n(n + 1)/2$$

Como estamos fixando um vértice (no caso o vértice 1) e estamos escolhendo os outros dois, então o número de casos totais é $\binom{2n}{2}$.

Portanto, a probabilidade requerida é: $p = \dfrac{n(n+1)}{2\binom{2n}{2}} = \dfrac{n+1}{2(2n-1)}$

18) (AIME-03) Uma formiga move-se sobre os lados de um triângulo. Estando a formiga em um vértice, existe 50% de probabilidade da formiga se dirigir para cada um dos outros dois vértices no próximo movimento. Qual é a probabilidade que depois de 10 movimentos a formiga esteja no vértice inicial?

Solução:



Suponha que quando a formiga está em um vértice e vai decidir em que direção seguir, ela fica virada de frente para o interior do triângulo. Assim, terá que definir se vai para a sua direita (D) ou esquerda (E), como está indicado na figura ao lado. Desta forma, qualquer sequência de 10 letras, onde cada letra pode ser D ou E, representa um caminho diferente.

Como para cada uma das letras existem duas possibilidades de escolha, o número total de caminhos da formiga é igual a $2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 2^{10}$.

Seja x a quantidade de letras D em um caminho e y a quantidade de letras E. Desde que o número de lados da figura é 3, para que a formiga percorra 10 lados e no final esteja no mesmo vértice inicial a subtração x – y deve ser múltiplo de 3. Como x + y = 10, existem 3 possibilidades:

i) x = 5 e y = 5: todos os caminhos são representados pelas permutações de DDDDDEEEEE. Assim, neste caso existem $\dfrac{10!}{5!.5!}$ possibilidades.

ii) x = 8 e y = 2: todos os caminhos são representados pelas permutações de DDDDDDDDEE. Assim, neste caso existem $\dfrac{10!}{8!.2!}$ possibilidades.

iii) x = 2 e y = 8: todos os caminhos são representados pelas permutações de DDEEEEEEEE. Assim, neste caso existem $\dfrac{10!}{2!.8!}$ possibilidades.

Desta forma: $p = \dfrac{\dfrac{10!}{5!.5!} + \dfrac{10!}{8!.2!} + \dfrac{10!}{8!.2!}}{2^{10}} = \dfrac{171}{512}$.

19) (OBM-02) Jogamos 10 dados comuns (com 6 faces equiprováveis numeradas de 1 a 6). Calcule a probabilidade de que a soma dos 10 resultados seja igual a 20.

Solução:

Considere que x_i = número que aparece na face superior do dado i, i = 1, 2, ..., 10. Portanto, podemos definir o evento proposto sendo formado pelas soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 20$, onde $1 \leq x_i \leq 6$, i = 1, 2, ..., 10. O espaço amostral é formado por todos os valores que pode assumir a sequência (x_1, x_2, ..., x_{10}). Como para cada x_i, $1 \leq i \leq 10$, temos 6 valores possíveis, segue diretamente que $n(\Omega) = 6^{10}$.

Para o cálculo de n(A) vamos utilizar o método indireto de contagem. Sabemos que o número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 20$ é igual a $C_{19,9}$. Vamos agora descontar deste valor o número de soluções em que alguma(s) variável(is) seja(m) maior(es) que 6. Na verdade, como o valor mínimo de cada x_i é 1, se duas variáveis forem maiores que 6, então $x_1 + x_2 + ... + x_{10} \geq 7 + 7 + 8.1 = 22$, que é um absurdo. Assim, no máximo uma das variáveis pode ser maior que 6. Suponhamos, somente para efeito de análise, que $x_1 \geq 7$. Assim temos que $x_2 + x_3 + ... + x_{10} \leq 13$. No capítulo sobre combinações vimos duas maneiras de calcular o número de soluções inteiras positivas da expressão anterior. Vamos analisar caso a caso:

- $x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 13$ possui $C_{12,8}$ soluções inteiras positivas.
- $x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 12$ possui $C_{11,8}$ soluções inteiras positivas.
- $x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 11$ possui $C_{10,8}$ soluções inteiras positivas.
- $x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 10$ possui $C_{9,8}$ soluções inteiras positivas.
- $x_2 + x_3 + ... + x_{10} = 9$ possui $C_{8,8}$ soluções inteiras positivas.

Aplicando o teorema das colunas (consulte o capítulo sobre Binômio de Newton), temos que a expressão linear $x_2 + x_3 + ... + x_{10} \leq 13$ apresenta $C_{8,8} + C_{9,8} + C_{10,8} + C_{11,8} + C_{12,8} = C_{13,9}$ soluções inteiras positivas.

Como a escolha de x_1 sendo a variável maior ou igual a sete foi completamente aleatória, qualquer uma das dez variáveis poderia ter sido escolhida. Deste modo, o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + x_2 + ... + x_{10} = 20$, onde exatamente uma das variáveis é maior ou igual a sete, vale $10.C_{13,9}$.

Portanto: $p_A = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{C_{19,9} - 10.C_{13,9}}{6^{10}} = \dfrac{92378 - 7150}{60466176} = \dfrac{21307}{15116544} \cong 0,0014.$

20) Considere todos os pares **(b, c)** de inteiros tais que $|b| \leq 4$ e $|c| \leq 4$. Escolhendo-se, ao acaso, um desses pares **(b, c)**, determine a probabilidade de a equação $x^2 + 2bx + c = 0$ possuir raízes distintas positivas.

Solução:

O espaço amostral Ω é formado por todos pares (b, c) de inteiros tais que $|b| \leq 4$ e $|c| \leq 4$, ou seja, $\Omega = \{(4, 4), (4, 3), (3, 4), (3, 3), ..., (-4, -3), (-4, -4)\}$. Como para b existem 9 possibilidades e para c existem 9 possibilidades, então $n(\Omega) = 9.9 = 81$.

A equação $x^2 + 2bx + c = 0$ possui raízes distintas se seu discriminante é maior que zero: $4b^2 - 4c > 0 \Rightarrow b^2 > c$

Por outro lado, as raízes da equação são positivas se:

$$\frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4c}}{2} = -b \pm \sqrt{b^2 - c} > 0 \Rightarrow -b - \sqrt{b^2 - c} > 0 \text{ e } -b + \sqrt{b^2 - c} > 0.$$

Como $\sqrt{b^2 - c} > 0$, então teremos $-b - \sqrt{b^2 - c} > 0$ somente se $b < 0$.

Além disso: $-b - \sqrt{b^2 - c} > 0 \Rightarrow -b > \sqrt{b^2 - c} \Rightarrow b^2 > b^2 - c \Rightarrow c > 0$.

Assim, os pares (b, c) pertencentes à Ω que fazem a equação $x^2 + 2bx + c = 0$ possuir raízes distintas e positivas (evento A) são os que satisfazem $b < 0$, $c > 0$ e $b^2 > c$.

Enumerando: A = {(- 4, 4), (- 4, 3), (- 4, 2), (- 4, 1), (- 3, 4), (- 3, 3), (- 3, 2), (- 3, 1), (- 2, 3), (- 2, 2), (- 2, 1)}.

Consequentemente: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{11}{81}$.

21) (Olimpíada de Santa Catarina-15) Sejam n e k números naturais, com $k \leq n$, e seja X um conjunto com n elementos. Escolhendo aleatoriamente dois subconjuntos A e B de X, calcule a probabilidade de a intersecção entre A e B possuir k elementos.

Solução:

Como X possui 2^n subconjuntos, existem $2^n \times 2^n = 4^n$ possibilidades para escolher A e B, ou seja, $n(\Omega) = 4^n$.

Vamos agora calcular o número de elementos do evento. Há $\binom{k}{n}$ maneiras de escolher os k elementos de $A \cap B$. Cada um dos demais $n - k$ elementos de X tem possíveis 3 destinos, a saber:

i) apenas em A;

ii) apenas em B;

iii) nem em A e nem em B.

Assim, há 3^{n-k} formas de escolher os destinos dos $n - k$ elementos que não foram escolhidos para $A \cap B$.

Portanto: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{\binom{n}{k} 3^{n-k}}{4^n}$.

7.8. PROBABILIDADE CONDICIONAL

Observe o seguinte problema: Quando arremessamos um dado não viciado, sabendo que o número na face superior do dado é par, qual a probabilidade que seja múltiplo de 3? Inicialmente vamos definir os seguintes eventos: A = conjuntos dos múltiplos de 3 que podem aparecer em um dado e B = conjunto dos números pares que podem aparecer em um dado. Assim, A = {3, 6} e B = {2, 4, 6}. O espaço amostral do experimento que se baseia em arremessar um dado é Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}. Entretanto, podemos lembrar que a definição de espaço amostral é o conjunto de todos os resultados de um experimento. Como é informado que o número sorteado é par, então os resultados 1, 3 e 5 são impossíveis. Portanto, para o cálculo de p(A | B) devemos considerar o espaço amostral Ω' = {2, 4, 6}, que coincide com o evento B. Perceba que dentro deste espaço amostral o único que nos interessa é {6}, que nada mais é que a interseção dos eventos A e B. Como dos 3 resultados possíveis apenas um interessa, podemos afirmar que $p(A \mid B) = \frac{1}{3}$.

Vamos agora voltar ao caso geral. Considere que um experimento aleatório foi realizado um número N muito grande de vezes, observando-se que o evento A ocorreu N_A vezes, que o evento B ocorreu N_B vezes e que os eventos A e B ocorreram simultaneamente $N_{A \cap B}$ vezes. Realiza-se mais uma vez o experimento. Pergunta-se: Qual a probabilidade que ocorra o evento A sabendo que o evento B ocorreu? O nome que se dá para este tipo de probabilidade é *probabilidade condicional* e é representada por p(A | B) (lê-se "probabilidade de A dado B"). Note que a informação da ocorrência do evento B faz com que todos os possíveis resultados sejam elementos de B, ou seja, neste caso de probabilidade condicional, devemos considerar como espaço amostral o evento B. Da mesma forma, todos elementos de A que podem ocorrer devem estar dentro de B, fazendo com que estejamos interessados nos elementos do evento $A \cap B$. Portanto, a frequência relativa do evento A | B é igual a $f_{(A|B)} = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}$.

Dividindo o numerador e o denominador por N:

$$f_{(A|B)} = \frac{\frac{N(A \cap B)}{N}}{\frac{N(B)}{N}} = \frac{f_{(A \cap B)}}{f_{(B)}}.$$

Como o experimento foi realizado um grande número de vezes, então as frequências relativas de ocorrência dos eventos são aproximadamente iguais às suas respectivas probabilidades. Assim, podemos afirmar que $p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$.

7.8.1. Independência de Eventos

Suponha que você arremessa simultaneamente uma moeda e um dado e pede-se a probabilidade de aparecer o número 2 no dado sabendo que na moeda apareceu cara. Note que se trata de uma questão de probabilidade condicional, porém neste caso a informação fornecida não influencia em nada na probabilidade pedida, uma vez que é razoável considerar que o resultado da moeda em nada interfere no resultado do dado. A isto damos o nome de *eventos independentes*. Se A = sair o número 2 na moeda e B = sair cara na moeda, temos que A | B = A (A dado B é igual a A), pois o evento B não possui nenhuma influência na ocorrência do evento A. Portanto, sempre que dois eventos não vazios A e B são independentes temos que p(A | B) = p(A). Substituindo na equação da probabilidade condicional:

$p(A \cap B) = p(A \mid B).p(B) \Rightarrow \mathbf{p(A \cap B) = p(A).p(B)}$, quando A e B são eventos independentes.

Por outro lado, se $p(A \cap B) = p(A).p(B)$, então os eventos não vazios A e B são independentes:

i) $p(A \cap B) = p(A \mid B).p(B) \Rightarrow p(A).p(B) = p(A \mid B).p(B) \overset{p(B)>0}{\Rightarrow} p(A) = p(A \mid B)$

ii) $p(A \cap B) = p(B \mid A).p(A) \Rightarrow p(A).p(B) = p(B \mid A).p(A) \overset{p(A)>0}{\Rightarrow} p(B) = p(B \mid A)$

Portanto, podemos concluir que:

$p(A \cap B) = p(A).p(B)$, se e somente os eventos não vazios A e B são independentes.

7.8.2. Teorema da Probabilidade Total

Os eventos $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição do espaço amostral Ω se:

i) $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todo $i \neq i$, $1 \leq i, j \leq n$;

ii) $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$;

iii) $0 < p(A_i) \leq 1$, para todo i tal que $1 \leq i \leq n$.

Suponha que $A_1, A_2, ..., A_n$ formam uma partição do espaço amostra Ω. Se B é um evento de Ω, podemos afirmar que $B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)$. Uma vez que todos os eventos $B \cap A_i$, $1 \leq i \leq n$, são mutuamente exclusivos então:

$$P(B) = P[(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup ... \cup (B \cap A_n)] = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + ... + P(B \cap A_n) \quad (*)$$

Pela expressão da probabilidade condicional, para cada i tal que $1 \leq i \leq n$, podemos escrever que $P(B \cap A_i) = P(A_i).P(B \mid A_i)$. Substituindo em (*) obtemos:

$$\mathbf{P(B) = P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + ... + P(A_n).P(B \mid A_n)}$$

Vamos aplicar esta expressão em um exemplo. Suponha que uma determinada peça é manufaturada por 3 fábricas: A, B e C. Sabe-se que A produz o dobro de peças que B e que B e C produzem o mesmo número de peças. Sabe-se ainda que 2% das peças produzidas por A e por B são defeituosas, enquanto que 4% das produzidas por C são defeituosas. Todas as peças produzidas são misturadas e colocadas em um

depósito. Se do depósito for retirada uma peça ao acaso, qual a probabilidade de que ela seja defeituosa? Na resolução desta questão vamos considerar o espaço amostral formado por todas peças e os seguintes eventos: A_1 = conjunto das peças produzidas pela máquina A, A_2 = conjunto das peças produzidas pela máquina B, A_3 = conjunto das peças produzidas pela máquina C, B = conjunto das peças defeituosas. Podemos observar que A_1, A_2 e A_3 formam uma partição de Ω, uma vez que toda peça foi fabricada por exatamente uma das máquinas e todas as máquinas foram utilizadas. Assim, pelo teorema da probabilidade total:

$$P(B) = P(A_1).P(B \mid A_1) + P(A_2).P(B \mid A_2) + P(A_3).P(B \mid A_3) \Rightarrow$$

$$P(B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{50} + \frac{1}{4}.\frac{1}{50} + \frac{1}{4}.\frac{1}{25} = \frac{1}{40} = 0,025 = 2,5\%$$

Exercícios Resolvidos

1) Prove que se dois eventos A e B são independentes, então seus complementares também são eventos independentes.

Solução:

$A^C \cap B^C = (A \cup B)^C \Rightarrow p(A^C \cap B^C) = p[(A \cup B)^C] = 1 - p(A \cup B) \Rightarrow$

$p(A^C \cap B^C) = 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B)$

Se A e B são independentes, então $p(A \cap B) = p(A).p(B)$:

$p(A^C \cap B^C) = 1 - p(A) - p(B) + p(A).p(B) = (1 - p(A))(1 - p(B)) = p(A^C).p(B^C)$, que prova que A^C e B^C são eventos independentes.

2) Em um conhecido reality show, 10 participantes vão disputar uma prova cujo vencedor será declarado o líder do programa naquela semana. A prova tem regras bem simples: 1) cada participante escolhe um número de 1 a 10 de dentro de uma urna, que indica a ordem com que cada um vai jogar; 2) numa cesta há 10 chaves de carro, onde apenas uma liga um determinado carro; 3) cada participante, na sua vez, escolhe uma distinta chave e tenta ligar o carro; 4) ganha a prova o participante que ligar o carro. Determine qual participante tem maior probabilidade de ganhar.

Solução:

Essa situação problema é muito discutida atualmente, principalmente em função da grande popularidade dos reality shows. Ao contrário do que maioria acredita, todos têm a mesma chance de ganhar esse tipo de prova. Vamos provar!

A probabilidade de o 1º participante ganhar é igual à probabilidade de ele escolher exatamente a chave que abre o carro. Como existem 10 chaves na cesta: $p_1 = \frac{1}{10}$.

Para que o 2° participante ganhe é necessário que o 1° escolha uma chave errada (9 entre 10 disponíveis) e depois o 2° escolha exatamente a única chave que abre o carro, entre 9 disponíveis: $p_2 = \frac{9}{10}.\frac{1}{9} = \frac{1}{10}$.

Para que o 3° participante ganhe é necessário que o 1° escolha uma chave errada (9 entre 10 disponíveis), o 2° escolha uma chave errada (8 entre 9 disponíveis) e depois o 3° escolha a chave que abre o carro, entre 8 disponíveis: $p_3 = \frac{9}{10}.\frac{8}{9}.\frac{1}{8} = \frac{1}{10}$.

Assim, a probabilidade do participante k ganhar vale:

$$p_k = \frac{9}{10}.\frac{8}{9}.\ldots.\frac{11-k}{12-k}.\frac{1}{11-k} = \frac{1}{10},\ k = 3, 4, \ldots, 10$$

Portanto, todos os participantes têm a mesma chance de ganhar.

3) (Fuvest-98) Num torneio de tênis, no qual todas as partidas são eliminatórias, estão inscritos **8** jogadores. Para definir a primeira rodada do torneio realiza-se um sorteio casual que divide os **8** jogadores em **4** grupos de **2** jogadores cada um.

a) De quantas maneiras diferentes pode ser constituída a tabela de jogos da primeira rodada?

b) No torneio estão inscritos quatro amigos **A**, **B**, **C** e **D**. Nenhum deles gostaria de enfrentar um dos outros logo na primeira rodada do torneio. Qual é a probabilidade de que esse desejo seja satisfeito?

c) Sabendo que pelo menos um dos jogos da primeira rodada envolve **2** dos **4** amigos, qual é a probabilidade condicional de que **A** e **B** se enfrentem na primeira rodada?

Solução:

a) Para a escolha do 1° par existem $C_{8,2}$ possibilidades, para a escolha do 2° par existem $C_{6,2}$ possibilidades, para a escolha do 3° par existem $C_{4,2}$ possibilidades e para a escolha do 4° par existem $C_{2,2}$ possibilidades. Desta forma, o número de sequências de jogos é igual a $C_{8,2}.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}$. Entretanto, a sequência dos 4 jogos não interessa, implicando que o número de maneiras de construir a 1ª rodada é $\frac{C_{8,2}.C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2}}{4!} = 105$.

b) O oponente de A pode ser escolhido de 4 maneiras, o oponente de B pode ser escolhido de 3 maneiras, o oponente de C pode ser escolhido de 2 maneiras e o oponente de D pode ser escolhido de 1 maneira. Assim, $p = \frac{4.3.2.1}{105} = \frac{8}{35}$.

c) Sejam X = jogos da 1ª rodada com A e B se enfrentando; Y = 4 jogos da 1ª rodada com menos um par de amigos se enfrentando. Deste modo:

$$p(X \mid Y) = \frac{p(X \cap Y)}{p(Y)} = \frac{\frac{(C_{6,2}.C_{4,2}.C_{2,2})/(3!)}{105}}{1 - \frac{8}{35}} = \frac{5}{27}.$$

4) (FGV-05) Em uma comunidade, 80% dos compradores de carros usados são bons compradores. Sabe-se que a probabilidade de um bom pagador obter cartão de crédito é de 70%, enquanto que é de apenas 40% a probabilidade de um mau pagador obter cartão de crédito. Selecionando-se ao acaso um comprador de carro usado dessa comunidade, a probabilidade de que ele tenha cartão de crédito é de:
a) 56% b) 64% c) 70% d) 32% e) 100%
Solução: Alternativa B
Considere os seguintes eventos:
A = bons compradores de carros; B = maus compradores de carros; C = bons compradores com cartão de crédito; D = maus compradores com cartão de crédito.
Como os eventos A e C são independentes:
$p(A \cap C) = p(A).p(C) = (0,80)(0,70) = 0,56$.
Como os eventos B e D são independentes:
$p(B \cap D) = p(B).p(D) = (0,20)(0,40) = 0,08$.
Como $(A \cap C) \cap (B \cap D) = \varnothing$, então:
$p[(A \cap C) \cap (B \cap D)] = p(A \cap C) + p(B \cap D) = 0,56 + 0,08 = 0,64 = 64\%$.

5) (FGV-04) Uma caixa contém duas moedas honestas e uma com duas caras. Uma moeda é selecionada ao acaso e lançada duas vezes. Se ocorrem duas caras, a probabilidade de a moeda ter duas caras é:
a) 1/2 b) 1/3 c) 1/6 d) 1/4 e) 2/3
Solução: Alternativa E
Considere os eventos:
A = a moeda escolhida possui duas caras; B = ocorrem duas caras em dois lançamentos de uma moeda;
C = a moeda escolhida é honesta.
O evento $A \cap B$ consiste em escolher a moeda que possui duas caras e, ao lançar a moeda duas vezes, ocorrerem duas caras. Para tanto basta calcular a probabilidade de escolher a moeda com duas caras. Como existem 3 moedas e somente 1 com duas caras, temos que $p(A \cap B) = 1/3$.
Desde que $B = (A \cap B) \cup (C \cap B)$ e que $(A \cap B) \cap (C \cap B) = \varnothing$, então:
$p(B) = p[(A \cap B) \cup (C \cap B)] = p(A \cap B) + p(C \cap B) \Rightarrow$
$p(B) = p(A).p(B \mid A) + p(C).p(B \mid C) \Rightarrow p(B) = (1/3)(1) + (2/3)(1/4) = 1/2$.
Portanto: $p(A \mid B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{1/3}{1/2} = \dfrac{2}{3}$.

6) (FGV-03) Uma Escola comprou computadores de 3 fabricantes: A, B e C. Trinta por cento foram comprados de A, trinta por cento de B, e o restante de C. A probabilidade de um computador fabricado por A apresentar algum tipo de problema, nos próximos 30 meses, é 0,1. As mesmas probabilidades dos fabricantes B e C são respectivamente 0,15 e 0,2.

a) Qual a probabilidade de que um computador escolhido ao acaso, seja fabricado por A e apresente algum problema nos próximos 30 meses?
b) Se um computador apresentar algum problema nos próximos 30 meses, qual a probabilidade de que tenha sido fabricado por A?

Solução:

Considere os seguintes eventos: A = conjunto dos computadores comprados do fabricante A; B = conjunto dos computadores comprados de B; C = conjunto dos computadores comprados de C; D = A = conjunto dos computadores com defeito.

a) $p(A \cap D) = p(A).p(D \mid A) = (0,3)(0,1) = 0,03$.

b) Pelo teorema da probabilidade total:

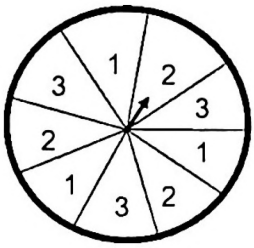
$p(D) = p(A).p(D \mid A) + p(B).p(D \mid B) + p(C).p(D \mid C) =$

$= (0,3)(0,1) + (0,3)(0,15) + (0,4)(0,2) = 0,155.$

Assim: $p(A \mid D) = \dfrac{p(A \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,03}{0,155} = \dfrac{6}{31} = 19,35\%$

7) (UFU-00) Um conhecido jogo, presente em muitas festas populares, é a roleta da sorte, na qual gira-se o ponteiro e anota-se o número que este aponta ao parar (ver figura). Após duas rodadas, qual a probabilidade de que a soma dos dois números obtidos seja igual a 5?

Obs: Considere que área de todos os setores circulares em que os números estão inseridos é a mesma.



a) 4/9 b) 4/27 c) 2/27 d) 2/9

Solução: Alternativa D

Existem duas maneiras de obter soma 5:

i) na 1ª rodada sair o número 2 e na 2ª rodada sair o número 3:

$p_A = p_{1-2} \cdot p_{2-3} = \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9}$.

ii) na 1ª rodada sair o número 3 e na 2ª rodada sair o número 2:

$p_B = p_{1-3} \cdot p_{2-2} = \dfrac{3}{9} \cdot \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{9}$.

Como ocorre a situação (i) ou a situação (ii), e as situações são mutuamente exclusivas, então:

$p_{\text{soma 5}} = p_A + p_B = 1/9 + 1/9 = 2/9$.

8) (UFRJ-05) Um novo exame para detectar certa doença foi testado em trezentas pessoas, sendo duzentas sadias e cem portadoras da tal doença. Após o teste verificou-se que, dos laudos referentes a pessoas sadias, cento e setenta resultaram negativos e, dos laudos referentes a pessoas portadoras da doença, noventa resultaram positivos.

a) Sorteando ao acaso um desses trezentos laudos, calcule a probabilidade de que ele seja positivo.

b) Sorteado um dos trezentos laudos, verificou-se que ele era positivo. Determine a probabilidade de que a pessoa correspondente ao laudo sorteado tenha realmente a doença.

Solução:

Pelos dados do enunciado, das 200 pessoas sadias, 170 deram resultado negativo e 30 deram positivo, enquanto que das 100 pessoas infectadas, 10 deram resultado negativo e 90 deram positivo. Deste modo, no teste 180 pessoas deram resultado negativo e 120 deram positivo.

Considere os eventos: A = conjunto dos laudos positivos; B = conjunto das pessoas que realmente possuem a doença.

a) $p(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)} = \dfrac{120}{300} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

b) $p(B \mid A) = \dfrac{n(B \cap A)}{n(A)} = \dfrac{90}{120} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

9) (UNB-01) Se duas bolas são retiradas ao acaso, sem reposição, de uma caixa contendo somente bolas pretas e vermelhas, a probabilidade de que sejam ambas vermelhas é 1/3. Recolocando essas bolas na caixa, se três bolas são retiradas ao acaso, também sem reposição, a probabilidade de que todas sejam vermelhas é 1/6. Nessas condições, calcule a quantidade de bolas que há nessa caixa.

Solução:

Suponha que a quantidade de bolas na caixa seja igual a n e destas x sejam vermelhas. Assim, a probabilidade da primeira bola extraída ser vermelha é igual a $\dfrac{x}{n}$ e a probabilidade da segunda bola extraída ser vermelha é igual a $\dfrac{x-1}{n-1}$. Como os eventos são independentes então $\dfrac{x}{n}.\dfrac{x-1}{n-1} = \dfrac{1}{3}$ (1).

Analogamente, a probabilidade de que nas três primeiras extrações saiam três bolas vermelhas é igual a $\dfrac{x}{n}.\dfrac{x-1}{n-1}.\dfrac{x-2}{n-2} = \dfrac{1}{6}$ (2).

Dividindo as duas expressões obtemos:

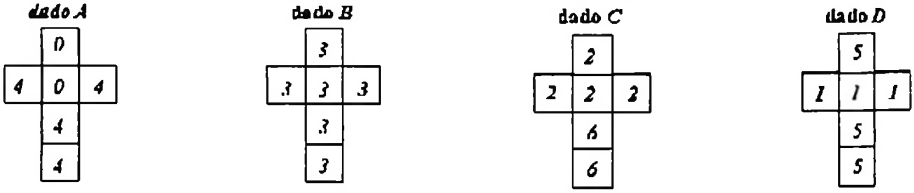
$$\frac{x-2}{n-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 4 = n - 2 \Rightarrow n = 2x - 2.$$

Substituindo em (1): $\frac{x}{2x-2}.\frac{x-1}{2x-3}=\frac{1}{3} \Rightarrow 3x^2-3x=4x^2-10x+6 \Rightarrow$

$x^2-7x+6=0 \Rightarrow (x-1)(x-6)=0 \Rightarrow x=1$ (não convém) ou $x=6$.

Desde que $x=6 \Rightarrow n=2.6-2=10$.

10) (UNB/PAS-98) As figuras ao lado representam a planificação de quatro dados que possuem impressos em suas faces os números mostrados nos quadradinhos. Após o lançamento de qualquer um desses dados, a probabilidade de uma das faces ficar voltada para cima é a mesma para todas as faces do mesmo dado. Em um jogo envolvendo esses dados, que consiste de um lançamento simultâneo de todos eles, a pontuação de uma jogada é a soma dos números mostrados nas faces dos dados voltadas para cima, quando esses param de se movimentar. Entre todas as pontuações possíveis de uma jogada, escolha uma pontuação cuja probabilidade de ocorrência seja a maior possível. Calcule a probabilidade de ocorrência dessa pontuação.



Solução:

Uma vez que no dado A a maior probabilidade é de sair 4, no dado B é de sair 3, no dado C é de sair 2 e no dado D é de sair 1 ou 5, as somas com mais probabilidades de ocorrência são 4 + 3 + 2 + 1 = 10 ou 4 + 3 + 2 + 5 = 14. O valor de cada uma destas probabilidades vale:

$$P_{\text{soma 10 ou 14}} = P_{A-4}.P_{B-3}.P_{C-2}.P_{D-1ou5} = \frac{4}{6}.\frac{6}{6}.\frac{4}{6}.\frac{3}{6}=\frac{2}{9}.$$

11) (Escola Naval-18) Pedro está pensando em enviar uma carta para sua mãe, no interior do Pará, para comunicar o falecimento do seu pai no Rio de Janeiro. A probabilidade de que Pedro escreva a carta é 0,8. A probabilidade de que o correio não perca a carta é 0,9. A probabilidade de que o carteiro entregue a carta é de 0,9. Sabendo-se que a mãe de Pedro não recebeu a carta, qual é a probabilidade condicional de que Pedro não a tenha escrito?

a) 25/44 b) 2/5 c) 49/87 d) 73/121 e) 38/88

Solução: Alternativa A

Considere os seguintes eventos:

A = Pedro escreveu a carta

B = o correio não perdeu a carta

C = o carteiro entregou a carta

D = a mãe de Pedro recebeu a carta

Note que $D = A \cap B \cap C \Rightarrow p(D) = p(A).p(B).p(C) = 0,8.0,9.0,9 = 0,648$

Assim, a probabilidade da mãe de Pedro não receber a carta vale:

$$p(D^C) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}648 = 0{,}352$$

Como $D = A \cap B \cap C$, então $D \subset A$ e assim segue que $A^C \cap D^C = A^C$

Logo: $p(A^C \mid D^C) = \dfrac{p(A^C \cap D^C)}{p(D^C)} = \dfrac{p(A^C)}{p(D^C)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}352} = \dfrac{\frac{25}{125}}{\frac{44}{125}} = \dfrac{25}{44}$

12) (ITA-04) Uma caixa branca contém **5 bolas verdes** e **3 azuis**, e uma caixa contém **3 bolas verdes** e **2 azuis**. Pretende-se retirar uma bola de uma das caixas. Para tanto, 2 dados são atirados. Se a soma resultante dos dois dados for menor que **4**, retira-se uma bola da caixa branca. Nos demais caso, retira-se uma bola da caixa preta. Qual é a probabilidade de se retirar uma bola verde?

Solução:

Sejam p_1 a probabilidade de sair a bola verde na urna 1 e p_2 a probabilidade de sair a bola verde na urna 2.

Seja x o valor que aparece no 1º dado e y o valor que aparece no 2º dado.

Como existem 6 valores para x e 6 valores para y, existem 36 maneiras de escrevermos a soma x + y, levando em consideração a ordem dos termos (3 + 4 é diferente de 4 + 3).

Para $x + y < 4$ temos as possibilidades: 1 + 1, 1 + 2 e 2 + 1, ou seja, 3 casos.

Portanto, a probabilidade de a soma dos números nos dados ser menor que 4 é igual a $\dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ e sair soma maior que ou igual a 4 probabilidade de $1 - \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$.

Desta forma:

$$p_1 = p_{\text{soma} < 4} \cdot p_{\text{verde urna 1}} = \frac{1}{12}\frac{5}{8} = \frac{5}{96} \quad \text{e} \quad p_2 = p_{\text{soma} \geq 4} \cdot p_{\text{verde urna 2}} = \frac{11}{12}\frac{3}{5} = \frac{11}{20}.$$

Como a bola verde sai da urna 1 ou da urna 2: $p_{\text{verde}} = p_1 + p_2 = \dfrac{5}{96} + \dfrac{11}{20} = \dfrac{289}{480}$

13) (ITA-05) São dados dois cartões, sendo que um deles tem ambos os lados na cor vermelha, enquanto o outro tem um lado na cor vermelha e o outro lado na cor azul. Um dos cartões é escolhido ao acaso e colocado sobre uma mesa. Se a cor exposta é vermelha, calcule a probabilidade de o cartão escolhido ter a outra cor também vermelha.

1ª Solução:

Numeremos as faces, colocando os números 1 e 2 no cartão todo vermelho (um número em cada face) e os números 3 e 4 no cartão que possui uma face vermelha (número 3) e outra face azul (número 4).

Analisemos todas as possibilidades de um cartão ficar com a face vermelha exposta:

I) Face exposta: 1; Face oposta: 2

II) Face exposta: 2; Face oposta: 1
III) Face exposta: 3; Face oposta: 4
Deste modo, das três possibilidades de face exposta vermelha, em duas delas a face oposta é vermelha, ou seja, $p = \frac{2}{3}$.

2ª Solução:
evento A = a face oposta é vermelha; evento B = a face exposta é vermelha

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{2}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{3}$$

14) (ITA-17) Um atirador dispõe de três alvos para acertar. O primeiro deste encontra-se a 30m de distância; o segundo, a 40m; o terceiro alvo, a 60m. sabendo que a probabilidade de o atirador acertar o alvo é inversamente proporcional ao quadrado da distância e que a probabilidade de ele acertar o primeiro alvo é de 2/3. então a probabilidade de acertar ao menos um dos alvos é

A) $\frac{120}{160}$. B) $\frac{119}{154}$. C) $\frac{110}{144}$. D) $\frac{105}{135}$. E) $\frac{119}{144}$.

Solução: Alternativa E
Como as probabilidades são inversamente proporcionais ao quadrado da distância, segue que: $30^2p_1 = 40^2p_2 = 60^2p_3 \Rightarrow 9p_1 = 16p_2 = 36p_3$
Como $p_1 = \frac{2}{3}$ segue que $p_2 = \frac{3}{8}$ e $p_3 = \frac{1}{6}$
Nesta questão é mais prático trabalhar com o complementar, desde que o evento "acertar ao menos um dos alvos" é complementar do evento "errar todos os alvos".
As probabilidades de errar os alvos são:

$$p_{\bar{1}} = 1 - p_1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}, \quad p_{\bar{2}} = 1 - p_2 = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8} \quad \text{e} \quad p_{\bar{3}} = 1 - p_3 = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Assim: $p = 1 - p_{\bar{1}} \cdot p_{\bar{2}} \cdot p_{\bar{3}} = 1 - \frac{1}{3}\frac{5}{8}\frac{6}{6} = \frac{119}{144}$

15) (ITA-13) Seja p uma probabilidade sobre um espaço amostral finito Ω. Se A e B são eventos de Ω tais que $p(A) = \frac{1}{2}$, $p(B) = \frac{1}{3}$ e $p(A \cap B) = \frac{1}{4}$, as probabilidades dos eventos $A \setminus B$, $A \cup B$ e $A^C \cap B^C$ são, respectivamente,

A) $\frac{1}{4}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$ B) $\frac{1}{6}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{6}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$

D) $\frac{1}{3}, \frac{5}{6}$ e $\frac{1}{3}$ E) $\frac{1}{4}, \frac{7}{12}$ e $\frac{3}{4}$

Solução: Alternativa E

Como $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$ e $(A \cap B) \subset A$, segue que:

$$p(A \setminus B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Das propriedades da probabilidade:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{6+4-3}{12} = \frac{7}{12}$$

Por propriedades da teoria dos conjuntos, se sabe que $A^C \cup B^C = (A \cap B)^C$:

Logo: $p(A^C \cup B^C) = p[(A \cap B)^C] = 1 - p(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

16) Em uma urna existe uma bola com número 1, duas bolas com número 2, três bolas com número 3, ..., *n* bolas com número n. Duas bolas são aleatoriamente extraídas. Determine a probabilidade de as duas bolas possuírem o mesmo número.

Solução:

Se o número das duas bolas é k, então a probabilidade é:

$$\frac{k}{1+2+3+...+n} \frac{k-1}{(1+2+3+...+n)-1} = \frac{4k(k-1)}{n(n+1)(n-1)(n+2)}$$

Logo, variando k desde 1 até n:

$$p = \sum_{k=1}^{n} \frac{4k(k-1)}{n(n+1)(n-1)(n+2)} = \frac{4}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \Rightarrow$$

$$p = \frac{4}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \left[\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \right) - \left(\sum_{k=1}^{n} k \right) \right] \Rightarrow$$

$$p = \frac{4}{n(n+1)(n-1)(n+2)} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \right] \Rightarrow$$

$$p = \frac{4}{(n-1)(n+2)} \left[\frac{(2n+1)}{6} - \frac{1}{2} \right] = \frac{4(2n+1-3)}{6(n-1)(n+2)} = \frac{8(n-1)}{6(n-1)(n+2)} = \frac{4}{3(n+2)},$$

para $n \geq 2$.

17) (OBM-01) Uma rifa foi organizada entre os 30 alunos da turma do Pedro. Para tal, 30 bolinhas numeradas de 1 a 30 foram colocadas em uma urna. Uma delas foi, então, retirada da urna. No entanto, a bola caiu no chão e se perdeu e uma segunda bola teve que ser sorteada entre as 29 restantes. Qual a probabilidade de que o número de Pedro tenha sido o sorteado desta segunda vez?

a) 1/29 b) 1/30 c) 1/31 d) 1/60 e) 2/31

Solução: Alternativa B

Para que Pedro seja sorteado na segunda vez o número de Pedro não ter sido o primeiro sorteado (sobram 29 possibilidades para o 1º sorteio) e deve então ser

sorteado na segunda extração (1 possibilidade). Assim, como os sorteios são independentes: $p = \frac{29}{30}.\frac{1}{29} = \frac{1}{30}$.

18) (Canadá Open Challenge-97) Dois cubos possuem suas faces pintadas de vermelho ou azul. O primeiro cubo possui cinco faces vermelhas e uma face azul. Quando os dois cubos são jogados simultaneamente, a probabilidade de que a cor da face superior mostrada seja a mesma é 1/2. Quantas faces vermelhas existem no segundo cubo?

Solução:

Seja x a quantidade de faces vermelhas no segundo cubo. Como os lançamentos são independentes, a probabilidade de as duas faces superiores sejam vermelhas é $p_v = \frac{5}{6}.\frac{x}{6} = \frac{5x}{36}$. Analogamente, a probabilidade de que as duas faces superiores sejam azuis é: $p_{azul} = \frac{1}{6}.\frac{(6-x)}{6} = \frac{6-x}{36}$.

Portanto: $\frac{5x}{36} + \frac{6-x}{36} = \frac{1}{2} \Rightarrow 6 + 4x = 18 \Rightarrow x = 3$.

19) (Problema de Monty Hall) Em um programa de auditório, o apresentador convida um participante escolhido da plateia a escolher uma de três portas inicialmente fechadas. Segundo o apresentador atrás de uma das portas há um prêmio, enquanto que nas outras duas não há nada. Depois que o participante escolher uma das portas o apresentador então abre uma das portas mostrando que atrás desta porta não há prêmio. Sobram duas portas: uma com o prêmio e a outra não. O apresentador pergunta para o participante se ele prefere ficar na porta que está ou mudar de porta. Determine qual decisão (ficar na mesma porta ou mudar de porta) fará com que o participante tenha maior probabilidade de ganhar.

Solução:

Este problema, um dos mais controvertidos de toda a matemática, leva o nome de Monty Hall, apresentador do programa de Let's Make a Deal, exibido nos Estados Unidos, que foi o criador deste jogo televisivo, posteriormente copiado em vários países, inclusive no Brasil. A ideia inicial de qualquer pessoa que lê rapidamente as regras do jogo é que, como sobram duas portas e em uma delas está o prêmio, a probabilidade de ganhar ficando na mesma porta ou mudando é de 50%. Entretanto isto não é verdade. Vamos expor duas análises distintas que mostrarão que a probabilidade de ganhar mudando de porta é o dobro da probabilidade de ganhar ficando na mesma porta.

1ª Análise:

Suponhamos que as portas sejam identificadas pelas letras A, B e C e que o prêmio está atrás da porta A.

Observe a simulação:

1º caso:

porta A (prêmio)	porta B	porta C	porta aberta pelo apresentador	resultado
participante			B ou C	ganha se ficar na mesma porta

2º caso:

porta A (prêmio)	porta B	porta C	porta aberta pelo apresentador	resultado
	participante		C	ganha se mudar de porta

3º caso:

porta A (prêmio)	porta B	porta C	porta aberta pelo apresentador	resultado
		participante	B	ganha se mudar de porta

Desta forma, em dois dos três casos possíveis o participante ganha se mudar de porta. Assim, a probabilidade de ganhar o prêmio mudando de porta é igual a 2/3, enquanto que a de ganhar ficando na mesma porta é igual a 1/3.

2ª Análise:

No início do jogo, cada porta possui a probabilidade de 1/3 de possuir o prêmio. Suponhamos que o participante escolha a porta A. Portanto, mantendo-se nesta porta até o final, o participante possui 1/3 de probabilidade de ganhar o prêmio, mesmo após o apresentador abrir uma das outras portas sem prêmio. Antes do apresentador abrir uma das portas a probabilidade do prêmio estar atrás da porta B ou da porta C é igual a 2/3. Suponhamos que o apresentador abre a porta B e descobre que está vazia. A probabilidade de o carro estar atrás da porta B ou da porta C ainda é de 2/3, mas sabemos que a probabilidade de o carro estar atrás da porta B é igual 0, já que temos certeza de que ele não está lá. Portanto, a probabilidade de o carro estar atrás da porta C é agora igual a 2/3. A soma das probabilidades ainda é igual a 1: sendo 1/3 para A, 0 para B e 2/3 para C.

Ainda não se convenceu que mudar de porta é melhor? Suponha uma situação extrema, em que existam 1000 portas e em apenas uma delas há um prêmio. Você escolher uma das portas e o apresentador vai abrindo 998 portas, todas sem prêmio, até que sobrem apenas duas portas: a que você escolheu e uma outra, a única que o apresentador não abriu. O que é mais provável, que você tenha acertado de primeira exatamente a única das 1000 portas que tinha um prêmio ou que o apresentador (sabedor de onde está o prêmio) tenha deixado de abrir somente a porta sem o prêmio? Não há nem o que questionar! Ficar na mesma porta significa que você acertou a porta com prêmio logo de cara, ou seja, probabilidade de 1/1000. Mudar de porta significa uma probabilidade de 999/1000 de ganhar o prêmio. Toda vez que o apresentador abre uma porta sem prêmio, a probabilidade de ganhar mudando de porta continua sendo 999/1000, apenas essa probabilidade vai se acumulando nas portas que ainda não foram abertas pelo apresentador.

7.9. TEOREMA DA PROBABILIDADE BINOMIAL

Um experimento para ser classificado como binomial deve satisfazer às seguintes condições:

i) É possível particionar o espaço amostral em dois eventos não vazios A e B, de modo que $A \cup B = \Omega$ e $A \cap B = \varnothing$. Assim, podemos assumir que $p(A) = p$ e $p(B) = 1 - p$. Normalmente denominamos o evento A de sucesso e B de fracasso;

ii) O experimento aleatório é realizado um certo número n de vezes, sob as mesmas condições, ou seja, os resultados sempre possuem as mesmas probabilidades de ocorrer em cada vez que o experimento é realizado;

iii) Pode-se considerar que os experimentos são independentes, ou seja, os resultados dos experimentos já realizados não influenciam nos resultados subsequentes.

Como estamos considerando somente dois eventos em Ω, A e B, então a sequência dos resultados dos n experimentos pode ser representada por uma sequência de n letras, cada uma podendo ser A ou B. Assim, o número de maneiras do evento A ocorrer exatamente k vezes nos n experimentos é igual ao número de permutações de $\underbrace{AAA...AA}_{k \text{ vezes}}\underbrace{BBB...BB}_{n-k \text{ vezes}}$. Como se trata de permutação com repetição este número é igual a $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$. Como o evento A possui probabilidade p de ocorrer e o evento B possui probabilidade igual a $1 - p$ de ocorrer, então a probabilidade de ocorrência de cada uma destas sequências é igual a $p^k(1-p)^{n-k}$. Como existem $\binom{n}{k}$ sequências, então a probabilidade de que o evento A ocorra exatamente k vezes, quando o experimento é realizado n vezes, é igual a:

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

O motivo pelo qual esse tipo de experimento é chamado de binomial é devido ao formato de sua expressão, que lembra o termo geral de um binômio de Newton. Perceba que $[(1-p)+p]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k$. Assim, cada parcela deste desenvolvimento em binômio de Newton é igual à probabilidade de ocorrer o evento A exatamente k vezes e o evento B exatamente $n - k$ vezes. Por exemplo, a parcela $\binom{9}{3}(1-p)^6 p^3$ é igual à probabilidade do evento A (de probabilidade p) ocorrer 3 vezes e o evento B (de probabilidade $1 - p$) ocorrer 6 vezes, quando o experimento é realizado 9 vezes.

Note também que $[(1-p)+p]^n = 1$, implicando que a soma de todas as parcelas do desenvolvimento em binômio de Newton é igual a 1, concordando perfeitamente

com o fato que a soma das probabilidades de todos os possíveis resultados de um experimento é igual a 1.

Por exemplo, suponhamos que um dado é jogado oito vezes e estamos interessados em calcular a probabilidade que o número 2 apareça exatamente duas vezes. Uma vez que $p_2 = \frac{1}{6}$, temos $1 - p_2 = \frac{5}{6}$ e então podemos calcular a probabilidade pedida por $\binom{8}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^6 \cong 0,2605$.

Exercícios Resolvidos

1) (FGV-01) Em uma eleição para a prefeitura de uma cidade, 30% dos eleitores são favoráveis a um certo candidato A. Se uma pesquisa eleitoral for feita sorteando-se 10 pessoas (sorteio com reposição) entre os eleitores, qual a probabilidade de que, nessa amostra:

a) todos sejam favoráveis ao candidato A;

b) haja exatamente 3 eleitores favoráveis ao candidato A.

Solução:

a) Pelo Teorema da Probabilidade Binomial, a probabilidade que exatamente 10 dentre as 10 pessoas sejam favoráveis é $\binom{10}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^{10}\left(\frac{7}{10}\right)^0 \cong 0.0000059$

b) A probabilidade pedida é igual a $\binom{10}{3}\left(\frac{3}{10}\right)^3\left(\frac{7}{10}\right)^7 \cong 0,267$

2) (UERJ-05) Uma pesquisa realizada em um hospital indicou que a probabilidade de um paciente morrer no prazo de um mês, após determinada operação de câncer, é igual a 20%. Se três pacientes são submetidos a essa operação, calcule a probabilidade de, nesse prazo:

a) todos sobreviverem;

b) apenas dois sobreviverem.

Solução:

a) Se a probabilidade de uma pessoa morrer é de 20%, então a probabilidade de sobreviver é de 80%. Assim, a probabilidade de exatamente três sobreviverem é $\binom{3}{3}(0,8)^3(0,2)^0 = 0,512$.

b) A probabilidade de exatamente dois sobreviverem é $\binom{3}{2}(0,8)^2(0,2)^1 = 0,384$.

3) (Mackenzie-04) Um candidato faz uma prova de múltipla escolha com 10 questões, cada uma com 5 alternativas. Ele resolve e assinala a alternativa correta de 4 questões, escolhendo, arbitrariamente, uma alternativa para cada uma das outras 6 questões. A probabilidade de ele acertar exatamente 8 questões na prova é:

a) $36/5^4$ b) $34/5^3$ c) $42/5^6$ d) $48/5^5$ e) $45/6^5$

Solução: Alternativa D

A probabilidade de acertar oito questões na prova é igual a probabilidade de acertar exatamente 4 das 6 questões que ele "chutou". Como a probabilidade de acertar uma questão no "chute" é igual a 1/5, então a probabilidade de acertar exatamente 4 das 6 questões no "chute" vale $\binom{6}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{48}{5^5}$.

4) (UNB-02) Para ganhar na loteria LOTOGOL, da Caixa Econômica Federal (CAIXA), ilustrada na cartela ao lado, o apostador deve acertar o número de gols marcados por cada um dos dois times participantes em 5 jogos de futebol. Mais precisamente, o apostador deve acertar se cada time marcará 0, 1, 2, 3 ou mais de 3 gols. Para cada jogo, o apostador pode marcar 5^2 resultados diferentes. Consequentemente, o número de possíveis apostas diferentes existentes na LOTOGOL é 25^5 (= 9.765.625). Supondo que os 9.765.625 resultados diferentes sejam igualmente prováveis, julgue os itens seguintes, considerando um apostador que preencha uma única cartela de aposta.

(1) A probabilidade de o apostador acertar os resultados dos 5 jogos é igual a $1/5^{10}$.

(2) É mais provável o apostador obter 20 caras ao lançar ao acaso 20 vezes uma moeda não viciada, do que acertar os resultados dos 5 jogos.

(3) A probabilidade de o apostador acertar os resultados de somente 4 jogos é igual a 120 vezes a probabilidade de ele acertar os resultados dos 5 jogos.

(4) A probabilidade de o apostador acertar os resultados de apenas 3 jogos é igual a 5.760 vezes a probabilidade de ele acertar os resultados dos 5 jogos.

Solução: VVVV

(1) VERDADEIRO. Podemos observar que a probabilidade de acertar o resultado de um jogo é igual a 1/5. Portanto, a probabilidade de acertar os resultados dos cinco jogos é igual a $\binom{5}{5}\left(\frac{1}{25}\right)^5\left(\frac{24}{25}\right)^0 = \frac{1}{5^{10}}$.

(2) VERDADEIRO. Como a probabilidade de sair cara quando jogamos uma moeda é igual a 1/2, então a probabilidade de sair exatamente 20 caras quando jogamos uma moeda 20 vezes é igual a $\binom{20}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^{20}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{2^{20}}$.

Por outro lado: $2^2 < 5 \Rightarrow (2^2)^{10} < 5^{10} \Rightarrow 2^{20} < 5^{10} \Rightarrow \frac{1}{2^{20}} > \frac{1}{5^{10}}$.

(3) VERDADEIRO. A probabilidade de o apostador acertar o resultado de exatamente 4 jogos é igual a $\binom{5}{4}\left(\frac{1}{25}\right)^4\left(\frac{24}{25}\right)^1 = \frac{24}{5^9}$. Observe agora que $\frac{24}{5^9} = \frac{120}{5^{10}}$.

(4) VERDADEIRO. A probabilidade de o apostador acertar o resultado de exatamente 4 jogos é igual a $\binom{5}{3}\left(\frac{1}{25}\right)^3\left(\frac{24}{25}\right)^2 = \frac{1152}{5^9}$. Observe agora que $\frac{1152}{5^9} = \frac{5760}{5^{10}}$.

5) (ITA-09) Um determinado concurso é realizado em duas etapas. Ao longo dos últimos anos, 20% dos candidatos do concurso têm conseguido da primeira etapa nota superior ou igual â nota mínima necessária para poder participar da segunda etapa. Se tomarmos 6 candidatos dentre os muitos inscritos, qual é a probabilidade de no mínimo 4 deles conseguirem nota para participar da segunda etapa?

Solução:

Note que o experimento é binomial e cada parcela do desenvolvimento em binômio de Newton de $(0,2+0,8)^6 = \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}(0,2)^{6-k}(0,8)^k$ pode ser interpretada como a probabilidade de exatamente k candidatos serem aprovados para a 2ª etapa.

Assim, a probabilidade de que pelo menos 4 candidatos sejam aprovados vale:

$$p = \binom{6}{4}(0,2)^4(0,8)^2 + \binom{6}{5}(0,2)^5(0,8) + \binom{6}{6}(0,2)^6(0,8)^0 \Rightarrow$$

$p = 0,01536 + 0,001536 + 0,000064 \Rightarrow p = 0,01694$

6) (Olimpíada da Bélgica-02) Seja p_1 a probabilidade de obter um 6 quando um dado é lançado, p_2 a probabilidade de obter exatamente um 6 quando dois dados são lançados e p_3 a probabilidade de obter exatamente dois 6's quando três dados são lançados. Assinale a alternativa correta.

a) $p_1 < p_3 < p_2$ b) $p_3 < p_1 < p_2$ c) $p_2 < p_1 < p_3$ d) $p_2 < p_3 < p_1$ e) $p_3 < p_2 < p_1$

Solução: Alternativa B

Claramente, $p_1 = \frac{1}{6} = 0,1666....$ Pelo Teorema Binomial das Probabilidades:

$$p_2 = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{18} = 0,2777... \text{ e } p_3 = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72} = 0,069444....$$

Portanto: $p_3 < p_1 < p_2$.

7) (OBM-02) Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

Solução:

Digamos que sejam lançados ao mesmo tempo n dados. A probabilidade de se obter exatamente um 2 é igual a $p_n = \binom{n}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{n.5^{n-1}}{6^n}$.

Vamos agora resolver a inequação $p_n \geq p_{n-1}$:

$$\frac{n.5^{n-1}}{6^n} \geq \frac{(n-1).5^{n-2}}{6^{n-1}} \Rightarrow \frac{5n}{6} \geq n-1 \Rightarrow \frac{n}{6} \leq 1 \Rightarrow n \leq 6.$$

Portanto, a inequação $p_n \geq p_{n-1}$ é válida para todo inteiro n tal que $2 \leq n \leq 6$.

Por outro lado, podemos observar que $p_6 = p_5 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 > p_4$.

Assim, sobre a ordem dos valores de p_n podemos afirmar que:

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < p_5 = p_6 > p_7 > p_8 > p_9 \ldots$$

Deste modo, os maiores valores de p_n ocorrem para n = 5 ou 6.

3) (AIME-89) Uma moeda possui probabilidade p de sair cara. Se a moeda é jogada 5 vezes, sabe-se que a probabilidade que sair exatamente duas caras é a mesma probabilidade de sair exatamente uma cara. Determine a probabilidade que saia exatamente três caras em cinco jogadas da moeda.

Solução:

Quando jogamos uma mesma moeda cinco vezes, a probabilidade de sair cara exatamente k vezes ($0 \leq k \leq 5$) é igual a $p_k = \binom{5}{k}(p_{cara})^k(1-p_{cara})^{5-k}$.

Pelo enunciado:

$$p_2 = p_1 \Rightarrow \binom{5}{2}p^2(1-p)^3 = \binom{5}{1}p(1-p)^4 \overset{\substack{p\neq 0 \\ p\neq 1}}{\Rightarrow} 2p = 1-p \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Portanto, a probabilidade de sair três caras em cinco lançamentos é igual a:

$$p_3 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{40}{243}$$

7.10. ALGUMAS ESTRATÉGIAS EM PROBABILIDADE

7.10.1. Simetria

Em determinados experimentos, com espaço amostral equiprobabilístico, é possível identificar eventos que possuem a mesma probabilidade de ocorrer. Neste caso, esses eventos podem ser considerados simétricos em relação ao espaço amostral. Por exemplo, suponha o experimento do sorteio de dois números distintos em uma rifa. É razoável considerar que a probabilidade do primeiro número sorteado ser maior que o segundo número sorteado é igual à probabilidade do primeiro número sorteado ser menor que o segundo número sorteado:

$$p(n_1 > n_2) = p(n_1 < n_2)$$

Considere agora outro exemplo, onde deve-se distribuir 10 cartas de baralho a duas pessoas, com cada pessoa recebendo 5 cartas. Por simetria é natural considerar que a probabilidade que uma determinada carta, digamos o rei de copas, vá para uma das pessoas é igual à probabilidade de a mesma carta ir para a outra pessoas.

Observe os exemplos seguintes para compreender melhor como essa técnica da simetria pode ser aplicada para resolver de forma mais direta alguns complicados problemas de probabilidade.

Exercícios Resolvidos

1) Ana, Bruna e Carla devem ser posicionadas de forma aleatória em uma fila juntas a outras 5 pessoas. Determine a probabilidade que Bruna esteja entre Ana e Carla, não necessariamente em posições consecutivas.

Solução:

Designemos as pessoas pelas suas iniciais: A, B e C.

Note que, independentemente das posições das outras 5 pessoas na fila, existem apenas 6 posições relativas entre A, B e C:

ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Perceba que destas 6 posições relativas em 2 tem-se B entre A e C: ABC e CBA.

Por simetria, pode-se considerar que todas as 6 posições relativas entre as pessoas A, B e C são igualmente prováveis. Se p é a probabilidade de ocorrer cada uma das 6 posições relativas entre A, B e C, segue que:

$$6p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{6}$$

Como nos interessam apenas duas destas posições relativas:

$$p(\text{B entre A e C}) = p_{ABC} + p_{CBA} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

2) Em uma urna existem 100 bolas, numeradas de 1 a 100. Retira-se aleatoriamente uma bola da urna e anota-se seu número. Coloca-se de volta esta bola na urna e retira-se aleatoriamente outra bola, anotando também seu número. Qual a probabilidade que o segundo número seja maior que o primeiro?

Solução:

Sejam x o número da primeira bola e y o número da segunda bola sorteada. Podemos notar que para cada caso em que $y > x$ existe um caso simétrico em que $y < x$, bastando para isso fazer a troca entre os valores de x e y. Por exemplo, se $x = 4$ e $y = 25$ (que satisfaz o enunciado), temos o caso contrário ($x = 25$ e $y = 4$) que não satisfaz. Assim, para cada caso em que $y < x$, existe exatamente um caso que não satisfaz o enunciado, e vice-versa. Portanto, podemos afirmar que a probabilidade de ocorrer $y > x$ é igual à probabilidade de ocorrer $y < x$.

Uma vez que somente podem ocorrer três situações: $y > x$, $y = x$ e $y < x$, e estas situações são mutuamente exclusivas, então temos que:

$$p(y > x) + p(y = x) + p(y < x) = 1 \Rightarrow 2.p(y > x) + p(y = x) = 1.$$

Claramente: $p(y = x) = \dfrac{n(y = x)}{n(\Omega)} = \dfrac{100}{100.100} = \dfrac{1}{100}$.

ssim: $2.p(y > x) + \dfrac{1}{100} = 1 \Rightarrow p(y > x) = \dfrac{99}{200}$.

3) (AIME-01) Em um torneio o clube X joga contra cada um dos outros seis times uma única vez. Para cada joga existe uma igual probabilidade de vencer, perder ou empatar. Determine a probabilidade que X termine o torneio com mais vitórias que derrotas.

Solução:

Perceba que para cada possibilidade do clube X de acabar o torneio com mais vitórias que derrotas existe uma outra possibilidade, obtida trocando o número de vitórias com o número derrotas, em que o time acaba com mais derrotas que vitórias. Por exemplo, a partir da campanha 3 vitórias, 2 empates e 1 derrota temos exatamente uma outra campanha (1 vitória, 2 empates e 3 derrotas) em que o clube X teve mais derrotas que vitórias. Consequentemente, podemos concluir que a probabilidade do clube X acabar o torneio com mais vitórias que derrotas é igual à probabilidade de acabar com mais derrotas que vitórias. Além destas duas possibilidades, existe também a possibilidades de acabar o torneio com um igual número de vitórias e derrotas:

$$p_{\text{vitórias>derrotas}} + p_{\text{vitórias=derrotas}} + p_{\text{vitórias<derrotas}} = 1 \Rightarrow 2.p_{\text{vitórias>derrotas}} + p_{\text{vitórias=derrotas}} = 1.$$

Em cada um dos seis jogos há 3 resultados possíveis (vitória, empate ou derrota):

$$n(\Omega) = 3^6 = 729.$$

Vamos agora calcular o valor de $p_{\text{vitórias=derrotas}}$. Separemos a análise em casos:

i) campanha: 3 vitórias (V) e 3 derrotas (D) $\Rightarrow$ o número de campanhas é igual ao número de permutações das letras VVVDDD: $n_1 = \frac{6!}{3!.3!} = 20$.

ii) campanha: 2 vitórias (V), 2 derrotas (D) e 2 empates (E) $\Rightarrow$ o número de campanhas é igual ao número de permutações das letras VVDDEE: $n_2 = \frac{6!}{2!.2!.2!} = 90$

iii) campanha: 1 vitória (V), 1 derrota (D) e 4 empates (E) $\Rightarrow$ o número de campanhas é igual ao número de permutações das letras VDEEEE: $n_3 = \frac{6!}{4!} = 30$

iv) campanha: 6 empates (E) $\Rightarrow$ o número de campanhas é igual ao número de permutações das letras EEEEEE: $n_4 = 1$.

Assim: $p_{\text{vitórias=derrotas}} = \frac{20+90+30+1}{729} = \frac{47}{243}$.

Portanto: $2.p_{\text{vitórias>derrotas}} + p_{\text{vitórias=derrotas}} = 1 \Rightarrow 2.p_{\text{vitórias>derrotas}} + \frac{47}{243} = 1 \Rightarrow$

$p_{\text{vitórias>derrotas}} = \frac{98}{243}$

7.10.2. Comparar os Valores Relativos de Apenas Dois Resultados

O método que será descrito agora pode ser aplicado em experimentos onde estamos interessados na posição relativa de dois elementos específicos. A técnica se baseia em colocar um dos elementos em uma posição aleatória da distribuição e analisar as possibilidades de posição do outro elemento.

Leia com atenção os exercícios resolvidos para entender a aplicação deste método.

Exercícios Resolvidos

1) Uma professora vai dividir aleatoriamente 10 alunos em dois grupos de 5 alunos cada, com o objetivo de fazerem um trabalho escolar em grupo. Determine a probabilidade que João e Pedro, dois grandes amigos, fiquem no mesmo grupo.

Solução:

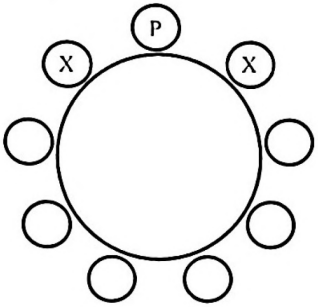
Inicialmente coloque Pedro em um dos grupos. Como nenhum outro aluno foi distribuído nos grupos, existe uma maneira de separar Pedro em um dos grupos:

P _ _ _ _ | _ _ _ _ _

Das 9 posições que sobraram nos grupos, em 4 delas João estará no mesmo grupo de Pedro. Assim, a probabilidade de João e Pedro estarem no mesmo grupo é $\frac{4}{9}$.

2) (UFRRJ-03) O pai de Ney, Sr. Carlos, é síndico do prédio em que mora e tem que presidir uma reunião de condomínio. Ele está preocupado com o fato de que os moradores Pedro e Manoel não se sentem juntos, pois será difícil contê-los em questões polêmicas. Como a mesa de reuniões é circular, e ele sabe que as pessoas sentam-se aleatoriamente, para a reunião, o Sr. Carlos pediu, então, a seu filho Ney, Calcular a probabilidade de que Pedro e Manoel se sentem separados, supondo que os 9 condôminos estejam presentes. Supondo que Ney tenha calculado corretamente, qual a probabilidade encontrada por ele?

Solução:



De início, antes de alguém sentar na mesa circular, escolha uma cadeira para Pedro sentar. Perceba que existe apenas uma maneira de fazer isso, uma vez que todas as situações podem ser obtidas rotacionando a mesa. Sobraram 8 cadeiras, sendo que em 6 delas Pedro e Manoel ficam separados.

Logo, a probabilidade solicitada vale $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$.

3) (UFRGS-12) Para a disputa da Copa do Mundo de 2014 as 32 seleções que se classificarem serão divididas em 8 grupos, os quais serão constituídos de 4 seleções cada um. Nos jogos da primeira fase, cada seleção jogará com todas as outras seleções do seu grupo. Uma empresa adquiriu um ingresso para cada jogo de primeira fase do mesmo grupo. Ao sortear dois ingressos entre seus funcionários a probabilidade de que esses ingressos envolvam uma mesma seleção é

a) 20% b) 25% c) 50% d) 80% e) 85%

Solução: Alternativa D

Grupo
Jogo 1: A × B
Jogo 2: C × D
Jogo 3: A × C
Jogo 4: B × D
Jogo 5: A × D
Jogo 6: B × C

Suponha que as 4 seleções deste grupo sejam A, B C e D. A tabela de jogos deste grupo é da forma mostrada na figura ao lado.

Todos os times jogam 3 vezes, num total de 6 jogos.

Para facilitar a análise desta situação problema vamos incialmente sortear um jogo e depois o outro.

Suponha, sem perda de generalidades, que o 1° jogo sorteado é o jogo A × B. Note que dos 5 jogos restantes, 4 envolvem as seleções A e B (apenas o jogo C × D não envolve). Logo, de 5 possibilidades 4 são favoráveis. Portanto: $p = \frac{4}{5} = 0{,}8$, que equivale a uma probabilidade de 80%.

4) (ITA-21) Um dodecaedro regular tem 12 faces que são pentágonos regulares. Escolhendo-se 2 vértices distintos desse dodecaedro, a probabilidade de eles pertencerem a uma mesma aresta é igual a:

a) 15/100 b) 3/19 c) 15/190 d) 5/12 e) 2/5

Solução: Alternativa B

Inicialmente deve-se usar conhecimentos de geometria espacial para determinar todas características do dodecaedro regular, como número de vértices e quantas arestas incidem em cada vértice.

Considere que:

$V \rightarrow$ número de vértices

$A \rightarrow$ número de arestas

$F \rightarrow$ número de faces

$F_i \rightarrow$ número de faces que são polígonos de i lados

$V_j \rightarrow$ quantidade de vértices em que incidem j arestas

Da geometria espacial sabe-se que $2A = 3F_3 + 4F_4 + 5F_5 + 6F_6 + ...$

Como todas as faces são pentágonos: $F_3 = 0$, $F_4 = 0$, $F_5 = F = 12$, $F_6 = 0$, ...

Assim: $2A = 5F_5 = 60 \Rightarrow A = 30$

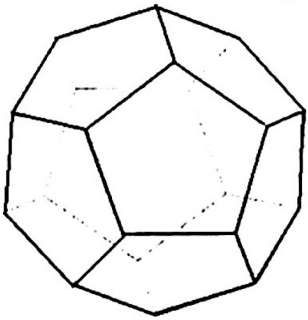
Da relação de Euler: $V + F = A + 2 \Rightarrow V + 12 = 32 \Rightarrow V = 20$

Como o poliedro é regular, em todos vértices incidem o mesmo número j de arestas.

Logo, pode-se afirmar que:

$j.V = 2A \Rightarrow j.20 = 2.30 \Rightarrow j = 3$

Para facilitar a visualização do leitor, o dodecaedro regular está representado abaixo:



Vamos agora, finalmente, calcular a probabilidade solicitada. Inicialmente escolha apenas um dos vértices do dodecaedro. Note que há apenas uma maneira de fazer isso, pois é permitido rotacionar o poliedro. Agora vamos escolher o outro vértice. Note que, das 19 possibilidades de escolher o segundo vértice, apenas em 3 delas (exatamente as outras 3 extremidades das arestas que incidem no primeiro vértice escolhido) tem-se os dois vértices na mesma aresta:

$$p = \frac{3}{19}$$

7.11. PROBABILIDADE COM ESPAÇO AMOSTRAL INFINITO

Nos casos anteriores, estudamos somente experimentos aleatórios cujos espaços amostrais eram finitos. Vamos agora analisar experimentos aleatórios em que os espaços amostrais são formados por conjuntos que possuem infinitos elementos. Como exemplo, podemos arremessar uma moeda até que ocorra o resultado cara. Sendo A = cara e B = coroa, o espaço amostral é dado por Ω = {(A), (B, A), (B, B, A), (B, B, B, A), (B, B, B, B, A), ...}, onde podemos observar que Ω possui infinitos elementos.

A forma de calcular a probabilidade que um determinado evento A, associado a um espaço amostral Ω infinito, ocorra consiste em somar as probabilidades dos elementos de A. Quando A também for infinito, o valor da sua probabilidade de ocorrência fica da forma $p(A) = \sum_{a_i \in A}^{\infty} p(a_i)$, onde existem infinitos termos no somatório. Apesar de existirem infinitos termos, como $0 \leq p(A) \leq 1$, os valores de $p(a_i)$ ($a_i \in A$) formam uma sequência convergente. O desafio, nestes casos, é descobrir uma maneira de calcular a soma dos termos desta sequência convergente. Na maioria dos casos, esta sequência é uma progressão geométrica cuja razão está entre 0 e 1, cujo valor da soma dos infinitos termos é conhecida.

Os exemplos seguintes mostram os principais casos de experimentos aleatórios com espaços amostrais infinitos.

Exercícios Resolvidos

1) Um jogo é composto das seguintes regras:

i) Um dado não viciado é jogado;

ii) Se sair o número 3 o jogador I ganha e se saírem os números 4, 5 ou 6 o jogador II ganha;

iii) Se saírem os números 1 ou 2 joga-se novamente o dado, até sair 3, 4, 5 ou 6 e seja declarado o vencedor.

Determine a probabilidade de o jogador II ganhar o jogo.

Solução:

A probabilidade II ganhar jogando o dado exatamente uma vez é: $p_1 = \frac{1}{2}$

A probabilidade II ganhar jogando o dado exatamente duas vezes é: $p_2 = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

A probabilidade II ganhar jogando o dado exatamente três vezes é: $p_3 = \frac{1}{3}\frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{18}$

Generalizando, a probabilidade de o jogador II ganhar jogando o dado exatamente k vezes é: $p_k = \frac{1}{2.3^{k-1}}$. Assim, a probabilidade de o jogador II ganhar o jogo é:

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \ldots = \frac{1/2}{1-1/3} = \frac{3}{4}$$

2) (FGV-04) Dois amigos, Alfredo e Bruno, combinam disputar a posse de um objeto num jogo de "cara ou coroa". Alfredo lança 3 moedas e Bruno 2 moedas, simultaneamente. Vence o jogo, e consequentemente, fica com o objeto, aquele que conseguir o maior número de caras. Ocorrendo empate, a experiência será repetida, tantas vezes quantas forem necessárias, até que haja um vencedor. Calcule:
a) a probabilidade de que Alfredo vença a disputa na primeira experiência.
b) A probabilidade de que Alfredo vença a disputa.
Solução:
a) Considere que $p(n_A, n_B)$ corresponde à probabilidade de Alfredo conseguir n_A caras e Bruno Conseguir n_B caras. Vamos construir a distribuição de probabilidades para este experimento aleatório:

$$p(0,0) = \left[\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2^5};$$

$$p(1,0) = \left[\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{2^5};$$

$$p(2,0) = \left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\right]\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{3}{2^5};$$

$$p(3,0) = \left[\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]\left[\binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{2^5};$$

$$p(0,1) = \left[\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\left[\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\right] = \frac{2}{2^5};$$

$$p(1,1) = \left[\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\right] = \frac{6}{2^5};$$

$$p(2,1) = \left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\right]\left[\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\right] = \frac{6}{2^5};$$

$$p(3,1) = \left[\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]\left[\binom{2}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^1\right] = \frac{2}{2^5};$$

$$p(0,2)=\left[\binom{3}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]\left[\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]=\frac{1}{2^5};$$

$$p(1,2)=\left[\binom{3}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]\left[\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]=\frac{3}{2^5};$$

$$p(2,2)=\left[\binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^1\right]\left[\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]=\frac{3}{2^5};$$

$$p(3,2)=\left[\binom{3}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]\left[\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^0\right]=\frac{1}{2^5}.$$

Portanto, a probabilidade de Alfredo ganhar na 1ª experiência é igual a:

$p_A = p(1,0) + p(2,0) + p(3,0) + p(2,1) + p(3,1) + p(3,2) =$

$$= \frac{3}{2^5}+\frac{3}{2^5}+\frac{1}{2^5}+\frac{6}{2^5}+\frac{2}{2^5}+\frac{1}{2^5}=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}.$$

b) A probabilidade de em uma experiência ocorrer empate é igual a:

$$p_e = p(0,0) + p(1,1) + p(2,2) = \frac{1}{2^5}+\frac{6}{2^5}+\frac{3}{2^5}=\frac{5}{16}.$$

A probabilidade de Alfredo ganhar na nª experiência é igual a:

$$\underbrace{p_e \cdot p_e \cdots p_e}_{n-1} \cdot p_A = \underbrace{\frac{5}{16}\cdot\frac{5}{16}\cdots\frac{5}{16}}_{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5^{n-1}}{2^{4n-3}}.$$

Notemos que a sequência formada pelos valores das probabilidades de Alfredo ganhar em cada experiência é uma progressão geométrica infinita de razão 5/16.

Assim, a probabilidade de Alfredo ganhar vale:

$$p_{A\infty} = \frac{1}{2}+\frac{5}{2^5}+\frac{5^2}{2^9}+\ldots+\frac{5^{n-1}}{2^{4n-3}}+\ldots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{5}{16}}=\frac{8}{11}.$$

3) (Olimpíada da Espanha-03) Por vez, em ordem alfabética, três amigos lançam um dado. Quem obter um 6 em primeiro lugar ganha a aposta. Por cada euro que aposte Carlos, que quantidade devem apostar Ana e Blas para equilibrar o jogo e fazer com que este seja equitativo, ou seja, para que todos esperem ganhar a mesma quantidade de dinheiro no jogo?

Solução:

Sabemos que a probabilidade de sair um 6 quando jogamos um dado é igual a 1/6 e a probabilidade de sair um número diferente de 6 é igual a 5/6. Assim, as probabilidades de cada um ganhar é igual a:

$$p_{Ana} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \frac{1/6}{1-5^3/6^3}$$

$$p_{Blas} = \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \frac{5}{6}\left(\frac{1/6}{1-5^3/6^3}\right)$$

$$p_{Carlos} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} + \ldots = \frac{5^2}{6^2}\left(\frac{1/6}{1-5^3/6^3}\right)$$

Desta forma, temos que $p_{Ana} = \frac{36}{25}p_{Carlos}$ e $p_{Blas} = \frac{6}{5}\cdot p_{Carlos}$, ou seja, para que o jogo seja equitativo, então para cada euro apostado por Carlos, Ana deve apostar 1,44 euros e Blas 1,2 euros.

4) (ITA-21) Uma moeda é lançada sucessivas vezes até que se tenha a ocorrência de 2 caras. Qual a probabilidade do número total de lançamentos ser par?

1ª Solução:

Sejam A: saiu cara num lançamento e B: saiu coroa num lançamento

n = 2: AA $\Rightarrow$ $p_2 = \frac{1}{2.2} = \frac{1}{4}$

n = 4: _ _ _A, com ABB nos espaços $\Rightarrow$ $p_4 = \frac{3}{2.2.2.2} = \frac{3}{2^4}$

n = 6: _ _ _ _ _ A, com ABBBB nos espaços $\Rightarrow$ $p_6 = \frac{5}{2.2.2.2.2.2} = \frac{5}{2^6}$

...

n = 2k: _ _ ... _ A, com A e 2k – 1 B's nos espaços $\Rightarrow$ $p_{2k} = \frac{2k-1}{2.2...2} = \frac{2k-1}{2^{2k}}$

Portanto:

$$p_{par} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{5}{4^3} + \frac{7}{4^4} + \frac{9}{4^5} \ldots =$$

$$= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right) + 2\left[\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} \ldots\right) + \left(\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \ldots\right) + \left(\frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{4^6} + \ldots\right) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}} + 2\left(\frac{\frac{1}{4^2}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4^3}}{1-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{4^4}}{1-\frac{1}{4}} + \ldots\right) = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{48} + \frac{1}{192} + \ldots\right) = \frac{1}{3} + 2\left(\frac{\frac{1}{12}}{1-\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$$

2ª Solução:

Seja q a probabilidade de sair cara pela 1ª vez em uma jogada par:

$$q = \underset{\text{coroa cara}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \underset{\text{coroa coroa coroa cara}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \underset{\text{coroa coroa coroa coroa coroa cara}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} + \ldots \Rightarrow$$

$$q = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots = \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

Seja p a probabilidade de sair a 2ª cara em uma jogada par. É possível separar a análise em casos de acordo com os dois primeiros resultados:

i) (cara, cara): $p_1 = \frac{1}{4}$;

ii) (coroa, coroa): $p_2 = \frac{1}{4}.p = \frac{p}{4}$;

iii) (coroa, cara) ou (cara, coroa): $p_3 = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right).q = \frac{1}{2}.q = \frac{1}{6}$

Portanto: $p = p_1 + p_2 + p_3 = \frac{1}{4} + \frac{p}{4} + \frac{1}{6} \Rightarrow p - \frac{p}{4} = \frac{3+2}{12} \Rightarrow \frac{3p}{4} = \frac{5}{12} \Rightarrow p = \frac{5}{9}$

5) (IME-16) Três jogadores sentam ao redor de uma mesa e jogam, alternadamente, um dado não viciado de seis faces. O primeiro jogador lança o dado, seguido pelo que está sentado à sua esquerda, continuando neste sentido até o jogo acabar. Aquele que jogar o dado e o resultado for 6, ganha e o jogo acaba. Se um jogador obtiver o resultado 1, o jogador seguinte perderá a vez, isto é, a vez passará ao jogador sentado à direita de quem obteve 1. O jogo seguirá até que um jogador ganhe ao tirar um 6. Qual é a probabilidade de vitória do primeiro jogador a jogar?

1ª Solução:

Quando um dado honesto é jogado uma vez, a probabilidade de sair 1 é $p_1 = \frac{1}{6}$, de sair 2, 3 4 ou 5 é $p_{2-5} = \frac{4}{6}$ e de sair 6 é $p_6 = \frac{1}{6}$.

Pelo teorema da probabilidade total segue que:

$$\underbrace{p(\text{A vencer})}_{p} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}.\underbrace{p(\text{A vencer} \mid \text{joga B})}_{p_{AB}} + \frac{1}{6}.\underbrace{p(\text{A vencer} \mid \text{joga C})}_{p_{AC}}$$

Analogamente, tem-se que: $p_{AB} = \frac{1}{6}p + \frac{4}{6}p_{AC}$ e $p_{AC} = \frac{1}{6}p_{AB} + \frac{4}{6}p$

Assim, tem-se o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} p = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}p_{AB} + \frac{1}{6}p_{AC} \\ p_{AB} = \frac{1}{6}p + \frac{4}{6}p_{AC} \\ p_{AC} = \frac{1}{6}p_{AB} + \frac{4}{6}p \end{cases}$$

Das duas últimas equações tem-se que:

$$\begin{cases} -4p_{AC} + 6p_{AB} = p \\ 6p_{AC} - p_{AB} = 4p \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4p_{AC} + 6p_{AB} = p \\ 36p_{AC} - 6p_{AB} = 24p \end{cases} \Rightarrow p_{AC} = \frac{25p}{32} \text{ e } p_{AB} = \frac{11p}{16}$$

Substituindo na 1ª equação do sistema:

$$p = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}p_{AB} + \frac{1}{6}p_{AC} = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\frac{11p}{16} + \frac{1}{6}\frac{25p}{32} \Rightarrow p - \frac{44p}{96} - \frac{25p}{192} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\frac{(192-88-25)p}{192} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{79p}{192} = \frac{1}{6} \Rightarrow p = \frac{32}{79}$$

2ª Solução:

Seja p a probabilidade de um jogador ganhar a partir do momento em que joga o dado pela 1ª vez. Perceba que $p_A = p$, uma vez que A é o único jogador que temos certeza que joga o dado na 1ª rodada.

Se p_{Bk} é a probabilidade do jogador B jogar o dado pela primeira vez na rodada k, tem-se que a probabilidade de B ganhar o jogo é igual a:

$$p_B = p_{B1}.p + p_{B2}.p + p_{B3}.p + \ldots = p(p_{B1} + p_{B2} + p_{B3} + \ldots) \Rightarrow$$

$$p_B = p\left(\frac{4}{6} + \frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{4}{6} + \frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{4}{6} + \frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \ldots\right) \Rightarrow$$

$$p_B = p\left[\frac{25}{36} + \frac{4}{36}.\frac{25}{36} + \left(\frac{4}{36}\right)^2.\frac{25}{36} + \ldots\right] = p\frac{\frac{25}{36}}{1-\frac{4}{36}} = \frac{25p}{32}$$

Analogamente:

$$p_C = p\left(\frac{1}{6} + \frac{4}{6}.\frac{4}{6} + \frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{4}{6} + \frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6} + \frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{1}{6}.\frac{4}{6}.\frac{4}{6} + \ldots\right) \Rightarrow$$

$$p_C = p\left[\frac{22}{36} + \frac{4}{36}.\frac{22}{36} + \left(\frac{4}{36}\right)^2.\frac{22}{36} + \ldots\right] = p\frac{\frac{22}{36}}{1-\frac{4}{36}} = \frac{22p}{32}$$

Como $p_A + p_B + p_C = 1 \Rightarrow p + \frac{25p}{32} + \frac{22p}{32} = 1 \Rightarrow \frac{(32+25+22)p}{32} = 1 \Rightarrow$

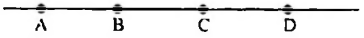
$$p = \frac{32}{79}$$

Observação: No capítulo sobre a aplicação de recorrência em combinatória e probabilidade será apresentada uma outra solução para este problema.

7.12. PROBABILIDADE GEOMÉTRICA

Considere o seguinte problema:

"Sejam quatro pontos A, B, C e D (nesta ordem) igualmente espaçados sobre uma reta. Um ponto P é aleatoriamente escolhido sobre o segmento de reta AD. Qual a probabilidade que P pertença ao segmento de reta AB?"

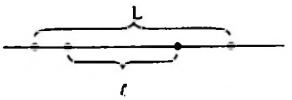


A diferença entre este problema de probabilidade e os outros estudados anteriormente neste livro é que neste caso o espaço amostral possui característica contínua, enquanto que nos casos anteriores o espaço amostral era discreto, onde podíamos determinar tanto o número de elementos do espaço amostral quanto de qualquer um dos seus eventos associados. Observe que no caso da questão proposta, cujo comportamento é contínuo, existem infinitas possibilidades para a escolha do ponto P. Por outro lado, uma vez que a escolha de P é aleatória e não depende da localização do segmento de reta AB, então podemos considerar que qualquer ponto do segmento AD possui igual probabilidade de ser escolhido. Logo, é razoável considerar que a probabilidade de P pertencer ao segmento de reta AB é igual a

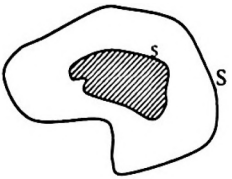
$$p_{AB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{1}{3}.$$

Na verdade, podemos generalizar este raciocínio para uma, duas e três dimensões:

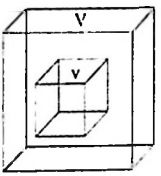
1) A probabilidade de um ponto P, escolhido aleatoriamente sobre um segmento de reta de comprimento L, pertencer a um segmento de reta de comprimento ℓ (contido em L) é $p = \frac{\ell}{L}$.



2) A probabilidade de um ponto P, escolhido aleatoriamente sobre uma superfície plana fechada de área S, pertencer a uma região plana de área s, completamente contida em S, é $p = \frac{s}{S}$.



3) A probabilidade de um ponto P, escolhido aleatoriamente sobre uma região do espaço de volume V, pertencer a uma região do espaço de volume v, completamente contida em V, é $p = \frac{v}{V}$.



Exercícios Resolvidos

1) Duas pessoas marcam um encontro na Praça da República, combinando o seguinte:

• cada qual chega à praça num momento escolhido ao acaso entre o meio-dia e uma hora da tarde;

• nenhum deles espera mais de 15 minutos pelo outro.

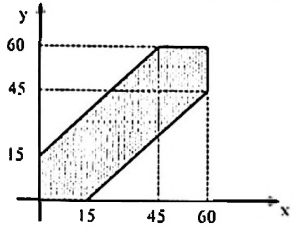
Qual é a probabilidade de realmente se encontrarem?

Solução:

Sejam x e y os tempos (em minutos), após o meio-dia, que as duas pessoas demoram para chegar no encontro. O espaço amostral é delimitado pelas seguintes desigualdades: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 60$, $y \leq 60$.

O evento que consiste no encontro das duas pessoas é delimitado pelas desigualdades: $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 60$, $y \leq 60$, $x - y \leq 15$, $y - x \leq 15$.

Abaixo está o esboço do gráfico, que mostra o esquema do encontro das duas pessoas.



Assim, a probabilidade de se encontrarem é igual à razão entre a área da figura destacada no gráfico e a área total do quadrado delimitado pelas desigualdades $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x \leq 60$, $y \leq 60$:

$$p_{encontro} = \frac{60.60 - 2\left(\frac{45.45}{2}\right)}{60.60} = 43,75\%$$

2) Três pontos A, B e C são escolhidos aleatoriamente em uma circunferência. Qual a probabilidade de que todos os três ângulos do triângulo ABC sejam agudos?

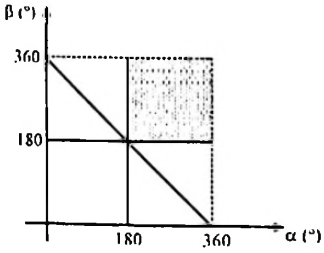
Solução:

Sejam α e β as medidas dos arcos AB (que não contém C) e AC (que não contém B), respectivamente. Assim, o arco BC (que não contém A) vale $360^\circ - \alpha - \beta$.

O espaço amostral é definido por:

$\alpha > 0$, $\beta > 0$, $360^\circ - \alpha - \beta > 0$, $\alpha < 360^\circ$, $\beta < 360^\circ$ e $360^\circ - \alpha - \beta < 360^\circ$ (1)

Além das desigualdades acima, o evento proposto ainda possui as seguintes desigualdades: $\alpha < 180^\circ$, $\beta < 180^\circ$ e $360^\circ - \alpha - \beta < 180^\circ$ (2)



O gráfico ao lado ilustra as desigualdades descritas anteriormente.

Geometricamente, as desigualdades descritas em (1) equivalem ao quadrado maior de lado 360.

Por outro lado, a interseção das desigualdades descritas em (1) e (2) é igual à área da região hachurada.

Logo, a probabilidade pedida é igual à razão entre a área da região hachurada (quadrado de lado 180) e a área do quadrado maior de lado 360. Assim: $p = \frac{1}{4}$.

3) Dividindo aleatoriamente um segmento em três partes, qual é a probabilidade de que esses novos segmentos formem um triângulo?

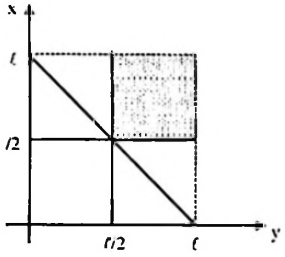
Solução:

Suponha que o comprimento do segmento seja ℓ. Se x e y são as medidas de duas partes, para que a divisão seja possível temos:

$0 < x < \ell, 0 < y < \ell, 0 < \ell - (x + y) < \ell \quad (1)$

De modo que x, y e $\ell - (x + y)$ formem um triângulo, além das desigualdades anteriores, temos:

$x + y > \ell - (x + y), x + \ell - (x + y) > y, y + \ell - (x + y) > x \quad (2)$



As desigualdades descritas em (1) formam, no sistema de eixos coordenados (x, y), um quadrado de lado ℓ.

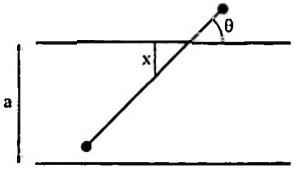
As desigualdades descritas em (1) e (2) formam neste sistema de eixos um quadrado (interno ao quadrado anterior) de lado $\ell/2$.

Assim, a probabilidade de o triângulo ser formado é igual à razão entre a área da região hachurada (quadrado de lado $\ell/2$) e a área do quadrado maior de lado ℓ. Assim: $p = \frac{1}{4}$.

4) (Problema da Agulha de Buffon) Consideremos uma família de retas paralelas em um plano, onde duas paralelas adjacentes arbitrárias distam de a. Tendo-se lançado, ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento ℓ ($\ell \leq a$), determinar a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas.

Solução:

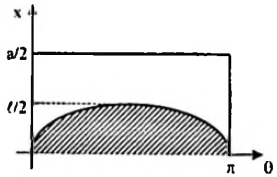
Vamos definir a posição da agulha no plano em função da distância x do ponto médio da agulha à paralela mais próxima e do ângulo θ entre a agulha e esta paralela.



De acordo com as variáveis, podemos interpretar que o espaço amostral do experimental é definido pelas desigualdades $0 \leq x \leq a/2$ e $0 \leq \theta \leq \pi$ (1).

Pela figura, podemos concluir que a agulha interceptará uma das paralelas se $x \leq \frac{\ell}{2}\text{sen}\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$ (2).

As desigualdades descritas em (1) formam no sistema de eixos coordenados (θ, x) um retângulo de dimensões π e a/2.



A desigualdade $x \leq \frac{\ell}{2}\text{sen}\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$, é equivalente, no mesmo sistema de eixos, à parte hachurada da figura ao lado.

Assim, a probabilidade de a agulha interceptar uma das paralelas é igual à razão entre as áreas da parte hachurada e a área do retângulo:

$$p = \frac{\int_0^{\pi} \frac{\ell}{2}\text{sen}\theta d\theta}{\pi.\frac{a}{2}} = \frac{2\ell}{\pi.a}$$

5) (Olimpíada do Rio Grande do Sul-98) De cada uma de três varetas de mesmo comprimento ℓ, quebrou-se um pedaço. Calcular a probabilidade de que seja possível construir um triângulo com esses três pedaços.

Solução:

Sejam x, y e z os comprimentos retirados das três varetas.

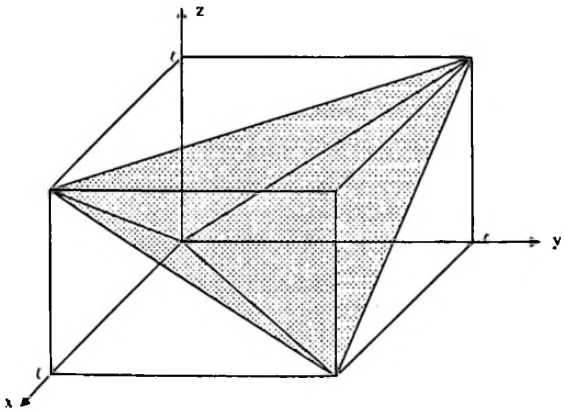
O espaço amostral é definido por:

$$0 \leq x \leq \ell, 0 \leq y \leq \ell, 0 \leq z \leq \ell.$$

Os pedaços de comprimentos x, y e z formarão um triângulo se e somente se:

$$x < y + z, y < x + z, z < x + y.$$

Geometricamente podemos interpretar as inequações acima de acordo com a figura no $\mathbb{R}^3$:



Portanto, a probabilidade de os três pedaços formarem um triângulo é igual à razão do volume da pirâmide hachurada (formada pelas diagonais das faces do cubo que passam pela origem e pelas arestas do cubo que não pertencem aos planos coordenados) e do cubo de aresta ℓ.

Logo, $p = \frac{1}{2}$.

Exercícios de Vestibular

1) (Fuvest-00) Um arquivo de escritório possui 4 gavetas, chamadas *a*, *b*, *c*, *d*. Em cada gaveta cabem no máximo 5 pastas. Uma secretária guardou, ao acaso, 18 pastas nesse arquivo. Qual é a probabilidade de haver exatamente 4 pastas na gaveta *a*?
a) 3/10 b) 1/10 c) 3/20
d) 1/20 e) 1/30

2) (Fuvest-02) Dois triângulos congruentes, com lados coloridos, são indistinguíveis se podem ser sobrepostos de tal modo que as cores dos lados coincidentes sejam as mesmas. Dados dois triângulos equiláteros congruentes, cada um de seus lados é pintado com uma cor escolhida dentre duas possíveis, com igual probabilidade. A probabilidade de que esses triângulos sejam indistinguíveis é de:
a) 1/2 b) 3/4 c) 9/16
d) 5/16 e) 15/32

3) (AFA-99) A probabilidade de observarmos um número na face superior de um dado viciado é diretamente proporcional a esse número. Ao lançarmos esse dado, a probabilidade de ocorrer um número par é
a) 1/2 b) 11/21 c) 4/7 d) 13/21

4) (AFA-00) Uma urna contém 1 bola preta e 9 brancas. Uma segunda urna contém x bolas pretas e as restantes brancas, num total de 10 bolas. Em um primeiro experimento, retira-se ao acaso uma bola de cada urna. Em um segundo experimento, todas as bolas são reunidas em uma única urna, e duas são retiradas, ao acaso, uma seguida à outra, sem reposição. O menor valor de x, tal que a probabilidade de se obterem duas bolas pretas seja estritamente maior no segundo experimento, é
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

5) (AFA-01) Seja S o espaço amostral de um experimento aleatório e A um evento de S. A probabilidade de ocorrer o evento A é dada por $p(A) = \frac{n-10}{4}$. O número máximo de elementos de A é
a) 10 b) 11 c) 14 d) 15

6) (AFA-02) Na Academia da Força Aérea, existem 8 professores de matemática e 6 de física. Para participar de um congresso no Rio de Janeiro, deverá ser formada uma comissão de 4 professores. A probabilidade de participarem dessa comissão 3 professores de matemática e 1 de física é de:
a) 3/1001 b) 48/143
c) 21/286 d) 4/13

7) (Insper-01) Um determinado sistema de segurança funciona com computadores que operam independentemente onde cada computador tem uma probabilidade p de falhar ($0 \leq p \leq 1$). Um sistema de segurança é mais eficiente se a maioria de seus computadores funciona. Para que valores de p um sistema de segurança com 3 computadores é mais eficiente que um sistema de segurança com 5 computadores?
a) $p > 1/2$ b) $p > 1/3$ c) $p > 1/4$
d) $p > 1/5$ e) $p > 1/6$

8) (Insper-01) Durante o mês de Março no campeonato de Fórmula 1 a probabilidade de chover em um dia determinado é 4/10. A equipe Ferrari ganha uma corrida em um dia com chuva com probabilidade igual a 6/10 e em um dia sem chuva com probabilidade igual a 4/10. Sabendo-se que a Ferrari ganhou uma corrida naquele dia de Março, qual a probabilidade de que choveu nesse dia?
a) 4/10 b) 6/10 c) 1/3 d) 1/2 e) 1/4

9) (Insper-02) Lúcia ganhou dois gatos, um preto e um branco. Lúcia sabe que um deles é fêmea. Qual a probabilidade de ambos os gatos serem fêmeas?

10) (Insper-00) E um concurso vestibular há 3 alternativas para cada pergunta e apenas uma delas é correta. Desse modo, para cada pergunta, um candidato tem probabilidade 1/3 de escolher a resposta certa se ele está "chutando" e 1 se ele sabe a resposta. Um candidato sabe 30% das respostas do concurso. Se ele deu a resposta correta para uma das perguntas, então, a probabilidade dele ter "chutado" é:
a) 1/16 b) 3/16 c) 5/16
d) 7/16 e) 9/16

11) (Insper-00) Uma moeda é viciada de tal forma que a probabilidade de sair cara num lançamento é o quádruplo da de sair coroa.
a) Lançando-se uma vez a moeda qual a probabilidade de sair coroa.
b) Lançando-se quatro vezes a moeda, qual a probabilidade de sair exatamente uma coroa?

12) (Unifesp-19) A imagem ilustra três dados, A, B e C. O dado A é convencional, o dado B tem duas faces numeradas com 2 e quatro faces numeradas com 6, e o dado C possui as seis faces numeradas com 5. As faces de cada dado são equiprováveis.

a) Calcule a probabilidade de que a soma dos números obtidos em um lançamento dos três dados seja múltiplo de 3.
b) Considere que dois dos três dados sejam sorteados ao acaso e que, em seguida, os dados sorteados sejam lançados ao acaso. Qual a probabilidade de que a soma dos números obtidos no lançamento seja um múltiplo de três?

13) (Insper-02) Um dado é viciado, de modo que a probabilidade de sair face 5 em um lançamento é o triplo da probabilidade de sair face 1. As demais faces têm a mesma probabilidade de um dado não viciado. Qual a probabilidade de que lançando o dado duas vezes a soma dos pontos obtidos seja 7?

14) (Insper-02) Uma urna contém k bolas numeradas de 1 a k. A média aritmética calculada com os números dessas bolas é 139. Se extrairmos dessa urna uma bola ao acaso, qual a probabilidade de seu número ser um múltiplo de 7?

15) (UERJ-13) Em uma escola, 20% dos alunos de uma turma marcaram a opção correta de uma questão de múltipla escolha que possui quatro alternativas de

resposta. Os demais marcaram uma das quatro opções ao acaso. Verificando-se as respostas de dois alunos quaisquer dessa turma, a probabilidade de que exatamente um tenha marcado a opção correta equivale a:
a) 0,48 b) 0,40 c) 0,36 d) 0,25

16) (Insper-11) Seja A o conjunto de todas as matrizes de ordem 2 da forma $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$, em que x, y, z, w são elementos do conjunto {0; 1}. Escolhendo ao acaso uma matriz do conjunto A, a probabilidade de que seu determinante seja zero é igual a
a) 1/2 b) 5/8 c) 3/4 d) 7/8 e) 1

17) (Insper-11) Num torneio de calouros, cada cantor se apresenta para três jurados, que o avaliam de forma independente, cada jurado indicando apenas se o candidato está aprovado ou reprovado. A tabela a seguir mostra as probabilidades de cada jurado aprovar ou não um candidato, conforme a opinião do público geral:

Público Geral	Primeiro Jurado	Segundo Jurado	Terceiro Jurado
Aprova o candidato	50%	75%	80%
Não aprova o candidato	50%	40%	25%

Um candidato é aprovado para a fase final se obtiver aprovação de pelo menos dois jurados. A diferença entre a probabilidade de um candidato ser aprovado caso o público geral o aprove e caso o público geral não o aprove é igual a
a) 25%. b) 30%. c) 35%.
d) 40%. e) 45%.

18) (Insper-12) Para um voo realizado nesse país em uma aeronave de 20 lugares, foram emitidos 22 bilhetes. A empresa responsável pelo voo estima que a probabilidade de qualquer um dos 22 passageiros não comparecer no momento do embarque seja de 10%. Considerando que os comparecimentos de dois passageiros quaisquer sejam eventos independentes, a probabilidade de que compareçam exatamente 20 passageiros no embarque desse voo, de acordo com a estimativa da empresa, é igual a
a) $(0,1)^2 \cdot (0,9)^{22}$.
b) $231 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{20}$.
c) $190 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{20}$.
d) $190 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{18}$.
e) $153 \cdot (0,1)^2 \cdot (0,9)^{18}$.

19) (Insper-12) Para decidir quem irá comer a última bolacha recheada do pacote, os irmãos Beto e Neto vão realizar um jogo, em que cada um apostará numa das faces (cara ou coroa) de uma moeda honesta. Em seguida, a moeda será lançada várias vezes, até que seja obtida, em três lançamentos consecutivos, uma mesma face. Essa face determinará o vencedor, encerrando-se o jogo. A probabilidade de que Beto ganhe o jogo imediatamente após o sétimo lançamento da moeda é igual a
a) 3/64 b) 5/64 c) 7/64
d) 5/128 e) 7/128

20) (Insper-16) Sorteando-se aleatoriamente um número real x do intervalo [0, 2x], a probabilidade de que ele satisfaça a desigualdade $\cos(x) \leq \text{sen}(x) \leq \cos(2x)$ é igual a
a) 1/6 b) 4/25 c) 5/24
d) 1/4 e) 9/25

21) (Fuvest-12) a) Dez meninas e seis meninos participarão de um torneio de tênis infantil. De quantas maneiras distintas essas 16 crianças podem ser separadas nos grupos A, B, C e D, cada um deles com 4 jogadores, sabendo que os grupos A e C serão formados apenas por meninas e o grupo B, apenas por meninos?

b) Acontecida a fase inicial do torneio, a fase semifinal terá os jogos entre Maria e João e entre Marta e José. Os vencedores de cada um dos jogos farão a final. Dado que a probabilidade de um menino ganhar de uma menina é 3/5, calcule a probabilidade de uma menina vencer o torneio.

22) (Fuvest-13) Sócrates e Xantipa enfrentam-se em um popular jogo de tabuleiro, que envolve a conquista e ocupação de territórios em um mapa. Sócrates ataca jogando três dados e Xantipa se defende com dois. Depois de lançados os dados, que são honestos, Sócrates terá conquistado um território se e somente se as duas condições seguintes forem satisfeitas:

1) o maior valor obtido em seus dados for maior que o maior valor obtido por Xantipa;

2) algum outro dado de Sócrates cair com um valor maior que o menor valor obtido por Xantipa.

a) No caso em que Xantipa tira 5 e 5, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

b) No caso em que Xantipa tira 5 e 4, qual é a probabilidade de Sócrates conquistar o território em jogo?

23) (Fuvest-16) João e Maria jogam dados em uma mesa. São cinco dados em forma de poliedros regulares: um tetraedro, um cubo, um octaedro, um dodecaedro e um icosaedro. As faces são numeradas de 1 a 4 no tetraedro, de 1 a 6 no cubo, etc. Os dados são honestos, ou seja, para cada um deles, a probabilidade de qualquer uma das faces ficar em contato com a mesa, após o repouso do dado, é a mesma. Num primeiro jogo, Maria sorteia, ao acaso, um dos cinco dados, João o lança e verifica o número da face que ficou em contato com a mesa.

a) Qual é a probabilidade de que esse número seja maior do que 12?

b) Qual é a probabilidade de que esse número seja menor do que 5?

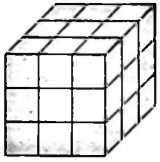
Num segundo jogo, João sorteia, ao acaso, dois dos cinco dados. Maria os lança e anota o valor da soma dos números das duas faces que ficaram em contato com a mesa, após o repouso dos dados.

c) Qual é a probabilidade de que esse valor seja maior do que 30?

24) (Fuvest-18) Em uma competição de vôlei, estão inscritos 5 times. Pelo regulamento, todos os times devem se enfrentar apenas uma vez e, ao final da competição, eles serão classificados pelo número de vitórias. Dois ou mais times com o mesmo número de vitórias terão a mesma classificação. Em cada jogo, os times têm 1/2 probabilidade de vencer.

a) Explique por que 2 times não podem empatar na classificação com 4 vitórias cada um.
b) Qual é a probabilidade de que o primeiro classificado termine a competição com 4 vitórias?
c) Qual é a probabilidade de que os 5 times terminem empatados na classificação?

25) (UFSCar-05) Juntam-se 27 cubos brancos, cada um com 1 cm^3 de volume, formando um cubo de 27 cm^3. Em seguida, pinta-se de preto cada uma das seis faces do cubo de 27 cm^3, como indica a figura 1.



Separa-se novamente os 27 cubos. Aleatoriamente e de uma única vez, 2 desses cubos são sorteados. Com os cubos sorteados, deseja-se formar um paralelepípedo de 2 cm^3 com cinco faces brancas e apenas uma preta, da forma indicada na figura 2.

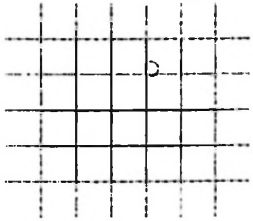
A probabilidade de que esse paralelepípedo possa ser formado com os cubos sorteados é igual a
a) 2/3 b) 17/39 c) 29/117
d) 2/9 e) 5/117

26) (UFLA-03) Em certa cidade da Região Norte do País, durante a estação chuvosa, a probabilidade de que chova em um dia qualquer é igual a 50%. Assim, a probabilidade de que chova em um fim de semana (sábado, domingo ou ambos) é de
a) 75% b) 100% c) 50%
d) 25% e) 90%

27) (UFRJ-02) Duas urnas contêm, cada uma, 100 bolinhas numeradas de 1 a 100. Retira-se ao acaso uma bolinha de cada urna. Sabendo-se que todas as bolinhas têm a mesma probabilidade de serem retiradas, qual a probabilidade p de que a soma dos números obtidos seja par?

28) (UFSCar-01) Gustavo e sua irmã Caroline viajaram de férias para cidades distintas. Os pais recomendam que ambos telefonem quando chegarem ao destino. A experiência em férias anteriores mostra que nem sempre Gustavo e Caroline cumprem esse desejo dos pais. A probabilidade de Gustavo telefonar é 0,6 e a probabilidade de Caroline telefonar é 0,8. A probabilidade de pelo menos um dos filhos contactar os pais é:
a) 0,20 b) 0,48 c) 0,64 d) 0,86 e) 0,92

29) (FGV-09) Considere um piso composto por placas quadradas e justapostas de lado L, e um anel de raio R < L/2, como mostra a figura abaixo.

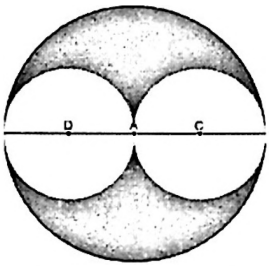


Lançando o anel sobre esse piso, determine a probabilidade de o círculo

delimitar regiões contidas em, no máximo, três placas.

30) (UFRGS-15) Escolhe-se aleatoriamente um número formado somente por algarismos pares distintos, maior do que 200 e menor do que 500. Assinale a alternativa que indica a melhor aproximação para a probabilidade de que esse número seja divisível por 6.
a) 20% b) 24% c) 30% d) 34% e) 50%

31) (UFRGS-19) Considere o alvo mostrado na figura a seguir, construído com três circunferências tangentes duas a duas, com DA = AC =10 e os pontos D, A e C colineares.



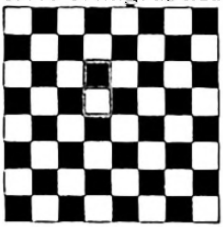
Um dardo é lançado e atinge o alvo. A probabilidade de o dardo atingir a região sombreada é de
a) 1/5 b) 1/4 c) 1/3 d) 1/2 e) 2/3

32) (UFRGS-13) Sobre uma mesa, há doze bolas numeradas de 1 a 12; seis bolas são pretas, e seis, brancas. Essas bolas serão distribuídas em 3 caixas distinguíveis, com quatro bolas cada uma. Escolhendo aleatoriamente uma caixa de uma dessas distribuições, a probabilidade de que essa caixa contenha apenas bolas pretas é
a) 1/33 b) 1/23 c) 2/33
d) 1/11 e) 1/3

33) (Unifesp-17) Sofia deveria ter estudado 10 temas de biologia para fazer uma avaliação, porém só estudou 2. Nessa avaliação, ela poderá ser reprovada (R), aprovada com ressalvas (AR) ou aprovada (A). Antes de iniciar a avaliação, a professora de Sofia dá a ela o direito de escolher uma das seguintes estruturas de avaliação:
Avaliação 1 – composta por apenas 2 questões, cada uma tratando de um dos 10 temas (sem repetir os temas), sendo que errar duas implica R, acertar apenas uma implica AR, e acertar as duas implica A.
Avaliação 2 – composta por apenas 3 questões, cada uma tratando de um dos 10 temas (sem repetir os temas), sendo que errar duas ou mais questões implica R, acertar apenas duas implica AR, e acertar as três implica A.
Considere que Sofia sempre acerta questões dos temas que estudou, e que sempre erra questões dos temas que não estudou.
a) Calcule as probabilidades de R, AR e A para o caso de Sofia ter escolhido a avaliação 1.
b) Se Sofia pretende ser aprovada, independentemente de ser com ressalvas (AR) ou diretamente (A), em qual das avaliações ela terá maior chance? Justifique matematicamente sua conclusão por meio de cálculos de probabilidade.

34) (Unifesp-15) Um tabuleiro de xadrez possui 64 casas quadradas. Duas dessas casas formam uma dupla de casas contíguas se estão lado a lado, compartilhando exatamente um de seus

lados. Veja dois exemplos de duplas de casas contíguas nos tabuleiros.



Dispõem-se de duas peças, uma na forma ☺, e outra na forma ☹, sendo que cada uma cobre exatamente uma casa do tabuleiro.

a) De quantas maneiras diferentes é possível colocar as peças ☺ e ☹ em duplas de casas contíguas de um tabuleiro de xadrez?

b) Considere as 64 casas de um tabuleiro de xadrez como sendo os elementos de uma matriz $A = (a_{ij})_{8\times 8}$. Coloca-se a peça ☺, ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro tal que i = j. Em seguida, a peça ☹ será colocada, também ao acaso, em uma casa qualquer do tabuleiro que esteja desocupada. Na situação descrita, calcule a probabilidade de que as peças ☺ e ☹ tenham sido colocadas em duplas de casas contíguas do tabuleiro.

35) (UFES-13) Um dado tem cada uma de suas 6 faces numerada com inteiros diferentes, de 1 até 6. Após o dado ser lançado uma única vez sobre uma superfície plana, cada uma de suas faces tem a mesma probabilidade de aparecer voltada para cima. Seja $p_{n,k}$ a probabilidade de se observar um número primo na face do dado voltada para cima em exatamente k de n lançamentos, com k = 1, 2, ..., n. Calcule

A) o valor de $p_{1,1}$;

B) o valor de $p_{10,10}$;

C) o valor de $p_{10,1}$;

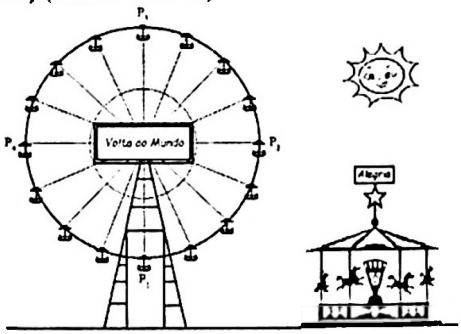
D) o valor de $p_{10,7}$;

E) os valores de k para os quais $p_{n,k}$ é máximo, quando n é fixado. Justifique.

36) (UnB-13) Suponha que o casal Z tenha uma ninhada de 15 filhotes. Suponha, ainda, que esses filhotes sejam separados em três grupos: I, II e III. Considere que o grupo I seja formado por quatro filhotes verdes e um roxo; o grupo II, por dois verdes e três laranjas; e o grupo III, por um verde, um laranja e três roxos. Considere, ainda, que se tenha retirado aleatoriamente um filhote desses grupos e que ele era verde. A probabilidade de o filhote ter sido retirado do grupo II é de

a) 2/7 b) 1/3 c) 2/5 d) 7/15

37) (UnB/PAS-16)



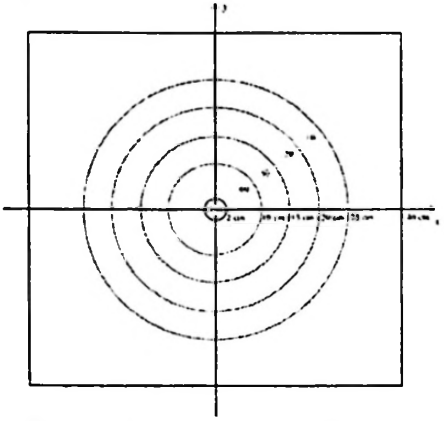
A roda-gigante na figura apresentada tem 16 cadeiras de dois lugares: 8 brancas e 8 vermelhas, que estão em posições alternadas. As cadeiras estão destacadas nas posições de P_1 a P_4. O carrossel tem oito cavalos. João e Juliana estão sentados em uma mesma cadeira na roda-gigante; José está em um dos cavalos do carrossel. Tendo como referência essas informações, julgue os itens seguintes.

(1) Considere que, além de João e Juliana, outros 15 casais sentem-se nas 16 cadeiras da roda-gigante — cada casal em uma cadeira —, e João e Juliana sentem-se em uma cadeira branca. Nesse caso, haja vista que há duas posições para um casal sentar-se em uma mesma cadeira, a quantidade de maneiras distintas de se distribuir esses 16 casais nas 16 cadeiras será igual a $2^{14} \times 15!$.

(2) Na situação mostrada na figura, com o carrossel e a roda-gigante parados, a probabilidade de José estar em um dos quatro cavalos visíveis e João e Juliana estarem em uma das três cadeiras entre as posições P_3 e P_4 é superior a 10%.

(3) A probabilidade de, em determinado instante, a cadeira de João e Juliana estar na posição P_1 é inferior a 7%.

38) (UnB-17)



A figura acima mostra um alvo para o jogo de dardos formado por um quadrado, de lado 80 cm, contendo cinco círculos concêntricos, de raios iguais a 2 cm, 10 cm, 15 cm, 20 cm e 25 cm. Na figura, foi inserido um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais xOy, com a origem no centro do quadrado. A forma de pontuar implicou na divisão do quadrado em seis regiões disjuntas, tal que as pontuações são atribuídas de acordo com a tabela a seguir. A pontuação atribuída em uma jogada, que consiste no arremesso de 3 dardos, é a soma da pontuação obtida com o arremesso de cada dardo. A probabilidade de o dardo acertar determinada região do quadrado é diretamente proporcional à área dessa região.

pontos	região atingida pelo dardo
100	$x^2 + y^2 < 4$
60	$4 < x^2 + y^2 \leq 100$
50	$100 < x^2 + y^2 \leq 225$
20	$225 < x^2 + y^2 \leq 400$
10	$400 < x^2 + y^2 \leq 625$
0	$x^2 + y^2 > 625$

Tendo como referência essas informações e considerando que todo dardo lançado sempre atingirá algum ponto do quadrado, julgue os itens:

(1) A probabilidade de um dardo acertar o círculo de raio 25 cm é maior do que a probabilidade de esse dardo acertar um ponto do quadrado localizado no primeiro quadrante.

(2) A probabilidade de que sejam obtidos 60 pontos em um arremesso do dardo é superior a $\pi/60$.

(3) Se, em uma jogada, os três dardos lançados acertaram a região definida por $3 < x^2 + y^2 \leq 25$, então a pontuação obtida foi superior a 100.

(4) A probabilidade de uma pessoa somar 300 pontos em uma jogada é igual a $\pi^3/406$.

(5) Considere que, se um jogador fizer pelo menos 200 pontos em uma jogada, ele receba o prêmio de R$ 100,00. Nesse

caso, se, no primeiro dardo lançado, o jogador conseguiu no máximo 20 pontos, então a probabilidade de ele ganhar o prêmio é inferior a 10^{-5}.

39) (Escola Naval-13) Uma caixa contém 4 pistolas e 4 fuzis, sendo uma pistola e 2 fuzis defeituosos. Duas armas são retiradas da caixa sem reposição. A probabilidade de pelo menos uma arma ser defeituosa ou ser pistola é igual a

a) $\frac{27}{28}$ b) $\frac{13}{14}$ c) $\frac{6}{7}$ d) $\frac{11}{14}$ e) $\frac{5}{7}$

40) (Escola Naval-15) Três cones circulares C_1, C_2 e C_3, possuem raios R, $\frac{R}{2}$ e $\frac{R}{4}$, respectivamente. Sabe-se que possuem a mesma altura e que $C_3 \subset C_2 \subset C_1$. Escolhendo-se aleatoriamente um ponto de C_1, a probabilidade de que esse ponto esteja em C_2 e não esteja em C_3 é igual a

a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{4}$ d) $\frac{1}{16}$ e) $\frac{3}{16}$

41) (Escola Naval-16) Considere uma urna contendo cinco bolas brancas, duas pretas e três verdes. Suponha que três bolas sejam retiradas da urna, de forma aleatória e sem reposição. Qual é, aproximadamente, a probabilidade de que as três bolas retiradas tenham a mesma cor?

a) 9,17% b) 27,51% c) 7,44%
d) 15,95% e) 8,33%

42) (Escola Naval-19) Três amigos marcam um encontro na frente do estádio Nilton Santos para assistir a uma partida de futebol. Eles combinam que cada um deverá chegar em um momento escolhido entre 15h00 e 16h00 e que nenhum deles esperará mais de 30 minutos pelos demais, dentro do horário estipulado. Qual é a probabilidade de que os três amigos se encontrem entre 15h00 e 16h00?

a) 7/16 b) 5/8 c) 1/2
d) 15/32 e) 31/64

43) (Escola Naval-17) Um exame de laboratório tem eficiência de 90% para detectar uma doença quando essa doença existe de fato. Entretanto, o teste aponta um resultado "falso positivo" (o resultado indica doença, mas ela não existe) para 1% das pessoas sadias testadas. Se 1,5% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que seu exame foi positivo?

a) 95/294 b) 160/433 c) 270/467
d) 75/204 e) 73/255

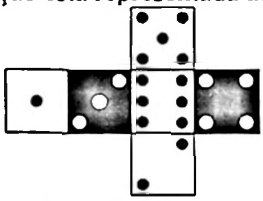
44) (AFA-13) Um dado cúbico tem três de suas faces numeradas com "0", duas com "1" e uma com "2". Um outro dado, tetraédrico, tem duas de suas faces numeradas com "0", uma com "1" e uma com "2". Sabe-se que os dados não são viciados. Se ambos são lançados simultaneamente, a probabilidade de a soma do valor ocorrido na face superior do dado cúbico com o valor ocorrido na face voltada para baixo no tetraédrico ser igual a 3 é de

a) 12,5% b) 16,6% c) 37,5% d) 67,5%

45) (AFA-16) Em uma mesa há dois vasos com rosas. O vaso A contém 9 rosas das quais 5 tem espinhos e o vaso B contém 8 rosas sendo que exatamente 6 não tem espinhos. Retira-se,

aleatoriamente, uma rosa do vaso A e coloca-se em B. Em seguida, retira-se uma rosa de B. A probabilidade de essa rosa retirada de B ter espinhos é
a) 8/81 b) 15/81 c) 18/81 d) 23/81

46) (AFA-15) Um jogo é decidido com um único lançamento do dado cuja planificação está representada abaixo.



Participam desse jogo quatro pessoas: Carlos, que vencerá o jogo se ocorrer face preta ou menor que 3; José vencerá se ocorrer face branca e número primo; Vicente vencerá caso ocorra face preta e número par; Antônio vencerá se ocorrer face branca ou número menor que 3. Nessas condições, é correto afirmar que
a) Vicente não tem chance de vencer.
b) Carlos tem, sozinho, a maior probabilidade de vencer.
c) a probabilidade de José vencer é o dobro da de Vicente.
d) a probabilidade de Antônio vencer é maior do que a de Carlos.

47) (AFA-19) Pela legislação brasileira, atualmente, os ditos "Jogos de Azar" estão proibidos. Tais jogos são, na maioria das vezes, sustentados pelas perdas dos jogadores que financiam os que vão ter sorte. Esses jogos têm por condição de existência que, na diferença entre as probabilidades de sorte e azar, predomine o azar. Ainda que proibidos, bancas de alguns desses jogos são comumente encontradas em festas populares Brasil afora. Exemplo desses jogos é aquele em que o jogador tem 1 bolinha para lançar sobre uma rampa, levemente inclinada, e deverá acertar uma das "casinhas" numeradas de 1 a 6. Geralmente, o dono da banca de jogo impõe condições para que o jogador ganhe um prêmio. Suponha que uma condição de sorte seja, desconsiderando quaisquer outras influências, lançar a bolinha três vezes sucessivas de modo que, ao final dos três lançamentos, seja observado que a soma dos números das casinhas é igual a 12. Desse modo, a probabilidade de se ter sorte nesse jogo é
a) menor que 3%
b) maior que 8% e menor que 10%
c) maior que 11% e menor que 13%
d) superior a 13%

48) (ITA-08) Considere o conjunto $D = \{n \in \mathbb{N};\ 1 \leq n \leq 365\}$ e $H \subset P(D)$ formado por todos os subconjuntos de D com 2 elementos. Escolhendo ao acaso um elemento $B \in H$, a probabilidade de a soma de seus elementos ser 183 é igual a:

a) $\frac{1}{730}$ b) $\frac{46}{33215}$ c) $\frac{1}{365}$
d) $\frac{92}{33215}$ e) $\frac{91}{730}$

49) (ITA-08) Considere uma população de igual número de homens e mulheres, em que sejam daltônicos 5% dos homens e 0,25% das mulheres. Indique a probabilidade de que seja mulher uma pessoa daltônica selecionada ao acaso nessa população.

a) $\frac{1}{21}$ b) $\frac{1}{8}$ c) $\frac{3}{21}$ d) $\frac{5}{21}$ e) $\frac{1}{4}$

50) (ITA-08) Em um espaço amostral com uma probabilidade P, são dados os eventos A, B e C tais que:
i) $P(A) = P(B) = 1/2$, com A e B independentes,
ii) $P(A \cap B \cap C) = 1/16$, e
iii) $P((A \cap B) \cup (A \cap C)) = 3/10$.
Calcule as probabilidades condicionais $P(C \mid A \cap B)$ e $P(C \mid A \cap B^C)$.

51) (ITA-09) Uma amostra de estrangeiros, em que 18% são proficientes em inglês, realizou um exame para classificar a sua proficiência nesta língua. Dos estrangeiros que são proficientes em inglês, 75% foram classificados como proficientes. Entre os não proficientes em inglês, 7% foram classificados como proficientes. Um estrangeiro desta amostra, escolhido ao acaso, foi classificado como proficiente em inglês. A probabilidade deste estrangeiro ser efetivamente proficiente nesta língua é de aproximadamente:
a) 73%. b) 70%. c) 68%.
d) 65%. e) 64%.

52) (IME-19) Um hexágono regular está inscrito em um círculo de raio R. São sorteados 3 vértices distintos do hexágono, a saber: A, B e C. Seja r o raio do círculo inscrito ao triângulo ABC. Qual a probabilidade de que $r = R/2$?
(A) 0 (B) 1/10 (C) 3/5
(D) 1/20 (E) 1/6

53) (ITA-10) Um palco possui 6 refletores de iluminação. Num certo instante de um espetáculo moderno os refletores são acionados aleatoriamente do modo que, para cada um dos refletores, seja de $\frac{2}{3}$ a probabilidade de ser aceso. Então, a probabilidade de que, neste instante, 4 ou 5 refletores sejam acesos simultaneamente, é igual a
a) $\frac{16}{27}$ b) $\frac{49}{81}$ c) $\frac{151}{243}$
d) $\frac{479}{729}$ e) $\frac{2^4}{3^4} + \frac{2^5}{3^5}$

54) (ITA-10) Uma urna de sorteio contém 90 bolas numeradas de 1 a 90, sendo que a retirada de uma bola é equiprovável à retirada de cada uma das demais.
a) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna. Calcule a probabilidade de o número desta bola ser um múltiplo de 5 ou de 6.
b) Retira-se aleatoriamente uma das 90 bolas desta urna e, sem repô-la, retira-se uma segunda bola. Calcule a probabilidade de o número da segunda bola retirada não ser um múltiplo de 6.

55) (IME-19) Em um jogo de RPG "Role-Playing Game" em que os jogadores lançam um par de dados para determinar a vitória ou a derrota quando se confrontam em duelos, os dados são icosaedros regulares com faces numeradas de 1 a 20. Vence quem soma mais pontos na rolagem dos dados e, em caso de empate, os dois perdem. Em um confronto, seu adversário somou 35 pontos na rolagem de dados. É sua vez de rolar os dados. Qual sua chance de vencer este duelo?
(A) 1/2 (B) 3/76 (C) 9/400
(D) 1/80 (E) 3/80

56) (ITA-11) Sobre uma mesa estão dispostos 5 livros de história, 4 de biologia e 2 de espanhol. Determine a probabilidade de os livros serem empilhados sobre a mesa de tal forma que aqueles que tratam do mesmo assunto estejam juntos.

57) (ITA-12) Dez cartões estão numerados de 1 a 10. Depois de embaralhados, são formados dois conjuntos de 5 cartões cada. Determine a probabilidade de que os números 9 e 10 apareçam num mesmo conjunto.

58) (IME-18) Um ônibus escolar transporta n crianças. Sejam A o evento em que dentro do ônibus tenham crianças de ambos os sexos e B o evento em que há no máximo uma menina dentro do ônibus. Determine o valor de n para que os eventos A e B sejam independentes.

59) (ITA-13) Considere os seguintes resultados relativamente ao lançamento de uma moeda:
I – Ocorrência de duas caras em dois lançamentos.
II – Ocorrência de três caras e uma coroa em quatro lançamentos.
III – Ocorrência de cinco caras e três coroas e oito lançamentos.
Pode-se afirmar que
a) dos três resultados, I é o mais provável.
b) dos três resultados, II é o mais provável.
c) dos três resultados, III é o mais provável.
d) os resultados I e II são igualmente prováveis.
e) os resultados II e III são igualmente prováveis.

60) (ITA-14) Seja Ω o espaço amostral que representa todos os resultados possíveis do lançamento simultâneo de três lados. Se $A \subset \Omega$ é o evento para o qual a soma dos resultados dos três lados é igual a 9 e $B \subset \Omega$ o evento cuja soma dos resultados é igual a 10, calcule:
a) $n(\Omega)$;
b) $n(A)$ e $n(B)$;
c) $P(A)$ e $P(B)$.

61) (ITA-15) Três pessoas, aqui designadas por A, B e C, realizam o seguinte experimento: A recebe um cartão em branco e nele assinala o sinal + ou sinal –, passando em seguida a B, que mantém ou troca o sinal marcado por A e repassa o cartão a C. Este, por sua vez, também opta por manter ou trocar o sinal do cartão. Sendo 1/3 a probabilidade de A escrever o sinal + e de 2/3 as respectivas probabilidade de B e C trocarem o sinal recebido, determine a probabilidade de A haver escrito o sinal + sabendo-se ter sido este o sinal ao término do experimento.

62) (ITA-16) Escolhendo aleatoriamente, três números inteiros distintos no intervalo [1, 20], a probabilidade de que eles estejam, em alguma ordem, em progressão geométrica é igual a
a) $\frac{2}{285}$ b) $\frac{2}{217}$ c) $\frac{1}{190}$
d) $\frac{4}{225}$ e) $\frac{1}{380}$

63) (IME-17) Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Quantas funções de A para A têm exatamente 2 elementos em seu conjunto imagem?

Entre as 256 funções de A para A, sorteiam-se as funções f e g, podendo haver repetições. Qual a probabilidade da função composta $f \circ g$ ser uma função constante?

64) (ITA-17) Com os elementos 1, 2, ..., 10 são formadas todas as sequencias $(a_1, a_2, ..., a_7)$. Escolhendo-se aleatoriamente uma dessas sequencias, probabilidade de a sequência escolhida não conter elementos repetidos é

A) $\frac{7!}{10^7.3!}$. B) $\frac{10!}{10^7.3!}$. C) $\frac{3!}{10^7.7!}$.

D) $\frac{10!}{10^3.7!}$. E) $\frac{10!}{10^7}$.

55) (IME-16) Os inteiros n e m são sorteados do conjunto {1, 2, 3, ..., 2016}, podendo haver repetição. Qual a probabilidade do produto n × m ser múltiplo de 12?

a) 5/12 b) 5/18 c) 5/24
d) 5/36 e) 5/144

66) (ITA-18) São dadas duas caixas, uma delas contém três bolas brancas e duas pretas e a outra contém duas bolas brancas e uma preta. Retira-se, ao acaso, uma bola de cada caixa. Se P_1 é a probabilidade de que pelo menos uma bola seja preta e P_2 a probabilidade de as duas bolas serem da mesma cor, então $P_1 + P_2$ vale

a) $\frac{8}{15}$ b) $\frac{7}{15}$ c) $\frac{6}{15}$ d) 1 e) $\frac{17}{15}$

67) (IME-09) Uma urna contém cinco bolas numeradas de 1 a 5. Retiram-se, com reposição, 3 bolas desta urna, sendo α o número da primeira bola, β o da segunda e λ o da terceira. Dada a equação quadrática $\alpha x^2 + \beta x + \lambda = 0$, a alternativa que expressa a probabilidade das raízes desta equação serem reais é

a) 19/125 b) 23/60 c) 24/125
d) 26/60 e) 25/60

68) (IME-15) O time de futebol "X" irá participar de um campeonato no qual não são permitidos empates. Em 80% dos jogos, "X" é o favorito. A probabilidade de "X" ser o vencedor do jogo quando ele é o favorito é 0,9. Quando "X" não é o favorito, a probabilidade de ele ser o vencedor é 0,02. Em um determinado jogo de "X" contra "Y", o time "X" foi o vencedor. Qual a probabilidade de "X" ter sido o favorito nesse jogo?

a) 0,80 b) 0,98 c) 180/181
d) 179/181 e) 170/181

69) (IME-10) Três dados iguais, honestos e com seis faces numeradas de um a seis são lançados simultaneamente. Determine a probabilidade de que a soma dos resultados de dois quaisquer deles ser igual ao resultado do terceiro dado.

70) (IME-11) O pipoqueiro cobra o valor de R$ 1,00 por saco de pipoca. Ele começa seu trabalho sem qualquer dinheiro para troco. Existem oito pessoas na fila do pipoqueiro, das quais quatro têm uma moeda de R$ 1,00 e quatro uma nota de R$ 2,00. Supondo uma arrumação aleatória para a fila formada pelas oito pessoas e que cada uma comprará exatamente um saco de pipoca, a probabilidade de que o pipoqueiro tenha troco para as quatro pessoas que pagarão com a nota de R$ 2,00 é:

a) 1/8 b) 1/5 c) 1/4 d) 1/3 e) 1/2

71) (IME-12) Em um aeroporto existem 12 vagas numeradas de 1 a 12, conforme a figura. Um piloto estacionou sua aeronave em uma vaga que não se encontrava nas extremidades, isto é, distintas da vaga 1 e da vaga 12. Após estacionar, o piloto observou que exatamente 8 das 12 vagas estavam ocupadas, incluindo a vaga na qual sua aeronave estacionou. Determine a probabilidade de que ambas as vagas vizinhas a sua aeronave estejam vazias.

1	2	3	....	10	11	12

a) 1/55 b) 2/55 c) 3/55
d) 4/55 e) 6/55

72) (IME-13) Um menino, na cidade do Rio de Janeiro, lança uma moeda. Ele andará 1 m para leste se o resultado for cara ou 1 m para oeste se o resultado for coroa. A probabilidade deste menino estar a 5 m de distância de sua posição inicial, após 9 lançamentos da moeda, é
a) $9/2^6$ b) $35/2^6$ c) 2/9!
d) $35/2^9$ e) $9!/2^9$

Exercícios Gerais

73) Uma moeda é jogada 6 vezes. Sabendo-se que no primeiro lançamento deu coroa, calcular a probabilidade condicional de que o número de caras nos seis lançamentos supere o número de coroas.

74) Uma moeda é jogada 4 vezes. Sabendo que no primeiro resultado foi cara, calcular a probabilidade condicional de obter pelo menos 2 caras.

75) Jogue um dado duas vezes. Calcule a probabilidade que no primeiro de obter 3 na primeira jogada, sabendo que a soma dos resultados foi 7.

76) Duas máquinas A e B produzem 3000 peças em um dia. A máquina A produz 1000 peças, das quais 3% são defeituosas. A máquina B produz as restantes 2000, das quais 1% são defeituosas. Da produção total de um dia uma peça é escolhida ao acaso e, examinando-a, constata-se que é defeituosa. Qual é a probabilidade de que a peça tenha sido produzida pela máquina A?

77) Três urnas I, II e III contêm respectivamente 1 bola branca e 2 pretas, 2 brancas e 1 preta e 3 brancas e 2 pretas. Uma urna é escolhida ao acaso e dela é retirada uma bola, que é branca. Qual é a probabilidade condicional de que a urna escolhida foi a II?

78) Um estudante resolve um teste com questões do tipo verdadeiro-falso. Ela sabe dar a solução correta para 40% das questões. Quando ele responde uma questão cuja solução conhece, dá a resposta correta, e nos outros casos decide na cara ou coroa. Se uma questão foi respondida corretamente, qual é a probabilidade de que ele saiba a resposta?

79) Uma moeda de 10 centavos, com diâmetro de 2 cm, foi jogada aleatoriamente numa superfície formada por quadrados lado 3 cm. Qual o valor da probabilidade da moeda cair inteiramente no quadrado.

80) Escolhendo ao acaso dois pontos distintos A e B em uma circunferência, qual é a probabilidade de que a corda AB seja maior que o lado do triângulo equilátero inscrito nessa circunferência?

81) Um ônibus e você passarão por um ponto de ônibus em horários aleatórios entre 12h e 13 h. Quando o ônibus chegar ao ponto, ele esperará 5 minutos antes de partir. Quando você chegar ao ponto, esperará até 20 minutos enquanto o ônibus não chega. Qual a probabilidade de você pegar o ônibus?

82) Alex, Bob e Carlos escolhem, cada um, aleatoriamente um número real entre 0 e 1. Qual a probabilidade que a soma dos quadrados dos números não exceda 1?

Exercícios de Olimpíada

83) (USAMO-83) Em uma dada circunferência, seis pontos *A, B, C, D, E, F* são escolhidos aleatoriamente, independentemente e uniformemente com respeito ao comprimento do arco. Determine a probabilidade que os dois triângulos *ABC* e *DEF* sejam disjuntos, ou seja, não possuam pontos comuns.

84) (Inglaterra-71) Dois números reais são dados, tais que $h > k > 0$. Determine a probabilidade que 2 pontos escolhidos aleatoriamente em um segmento de reta de comprimento h, possua distância menor que *k*.

85) (AIME-04) Um círculo de raio 1 é aleatoriamente escolhido no interior de um retângulo ABCD de dimensões 15×36. Qual a probabilidade que o círculo não corte a diagonal AC.

86) (Noruega-02) Eva, Per e Anna brincam com uma calculadora. Eles escolhem diferentes inteiros e checam se os mesmos são ou não divisíveis por 11. Eles apenas olham os números de 9 algarismos formados por todos os algarismos 1, 2, 3, ..., 9. Anna afirma que a probabilidade que um número seja múltiplo de 11 seja exatamente 1/11. Eva tem uma opinião diferente: ela pensa que a probabilidade é menor que 1/11. Per acredita que a probabilidade é maior que 1/11. Quem está correto?

87) (Argentina-97) Em uma linha estão escritos os primeiros 1997 números naturais: 1, 2, 3, ..., 1997. Antes de cada número deve-se escrever um sinal "+" ou um sinal "−", de forma ordenada, da esquerda para a direita. Para decidir cada sinal, joga-se uma moeda; se sair cara escreve-se "+", se sair coroa, escreve-se "−". Uma vez escritos os 1997 sinais, efetua-se a soma algébrica da expressão obtida e o resultado é *S*. Qual é a probabilidade de que *S* seja maior que 0?

88) (Rio Grande do Sul-04) Uma empresa tem *cinco* (5) diretores e adotou como regra que seu cofre pode ser aberto, e somente, por uma maioria (três, ou mais) de diretores. Esse cofre tem *dez* (10) fechaduras, cada uma com uma chave diferente, e só abre quando todas as fechaduras tiverem sido abertas. Diariamente, é sorteado um número *N* do conjunto {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} e cada um dos diretores recebe *N* chaves diferentes.

Qual a probabilidade de que o sorteio do número N impossibilite a abertura do cofre?

89) (Rio de Janeiro-10) Considere uma turma com n alunos (2 deles são Miguel e Rodrigo). Considere todas as comissões de p alunos que podem ser formadas nessa turma. Uma dessas comissões é escolhida ao acaso. Sabendo-se que Miguel é um aluno dessa comissão, qual é a probabilidade de Rodrigo também estar na mesma comissão?

90) (Ceará-09) Seja $N = abcabc$, um número de 6 dígitos ($a \neq 0$). Qual a probabilidade de N possuir somente 3 fatores primos?

91) (OBM-14) Para calcular a probabilidade de uma moeda de raio r cair totalmente dentro de um ladrilho formado com ladrilhos quadrados de lado ℓ, calculamos a probabilidade de seu centro cair dentro de um quadrado menor com lado $\ell - 2r$ (tiramos uma "borda" de tamanho r dos lados do quadrado). Essa probabilidade é igual a $\left(\frac{\ell-2r}{\ell}\right)^2$.

Na Esmeralândia, as moedas são retangulares. Qual é a probabilidade de uma moeda de lados 3 e 4 cair totalmente de um ladrilho formado por retângulos de lados 10 e 20?

A) Menos de 0,375.
B) Exatamente 0,375.
C) Mais de 0,375 e menos de 0,595.
D) Exatamente 0,595.
E) Mais de 0,595.

92) (OBM-02) Duas pessoas vão disputar uma partida de par ou ímpar. Elas não gostam do zero e, assim, cada uma coloca 1, 2, 3, 4 ou 5 dedos com igual probabilidade. A probabilidade de que a pessoa que escolheu par ganhe é:
a) 1/2 b) 2/5 c) 3/5 d) 12/25 e) 13/25

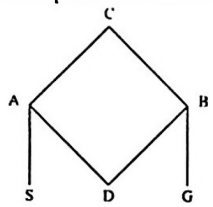
93) (OBM-04) Dois cubos têm faces pintadas de ocre ou magenta. O primeiro cubo tem cinco faces ocres e uma face magenta. Quando os dois cubos são lançados, a probabilidade de as faces viradas para cima dos dois cubos serem da mesma cor (sim, ocre e magenta são cores!) é 1/2. Quantas faces ocres têm o segundo cubo?
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

94) (Bélgica-92) Seja A = {1, 2, 3, 4}. Quando é escolhida aleatoriamente uma das possíveis funções f: A → A, qual é a probabilidade de que f seja bijetora?
a) 1/4 b) 1/6 c) 1/16 d) 3/32 c) 1/64

95) (AIME-00) Uma mesa possui espalhados 40 cartões, cada quatro marcados com os números 1, 2, 3, ..., 10. Dois cartões com os mesmos números são retirados da mesa. Determine a probabilidade de se escolher aleatoriamente dois cartões dos 38 restantes de modo que estes possuam o mesmo número.

96) (Espanha-93) Uma máquina de jogo de um cassino tem uma tela que mostra um esquema como o da figura. Para começar o jogo, aparece uma bola no ponto S. A cada impulso que recebe do jogador, essa bola se move até uma das

letras imediatas com a mesma probabilidade para cada uma delas.



A partida termina ao ocorrer o primeiro dos dois fatos seguintes:
a) A bola volta a S e então o jogador perde.
b) A bola chega a G e então o jogador ganha.
Pede-se a probabilidade de que o jogador ganhe.

97) (AIME-00) Duas urnas contêm, no otal, 25 bolas. Todas as bolas são brancas ou pretas. Uma bola de cada urna é aleatoriamente escolhida. A probabilidade que ambas serem pretas é 27/50. Calcule a probabilidade de ambas serem brancas.

98) (OBM-04) Há 1002 balas de banana e 1002 balas de maçã numa caixa. Lara tira, sem olhar o sabor, duas balas da caixa. Seja p a probabilidade de as duas balas serem do mesmo sabor e seja q a probabilidade de as duas balas serem de sabores diferentes. Quanto vale a diferença entre p e q?

a) 0 b) $\frac{1}{2004}$ c) $\frac{1}{2003}$
d) $\frac{2}{2003}$ e) $\frac{1}{1001}$

99) (AIME-95) Um objeto move-se em uma sequência de passos unitários. Cada passo pode ser em direção Norte, Sul, Leste ou Oeste com igual probabilidade. Se o objeto inicial seu movimento da origem, calcule a probabilidade que ele esteja no ponto (2, 2) em menos de 7 passos.

100) (Bélgica-03) Escolhendo-se aleatoriamente dois diferentes números do conjunto {1, 2, 3, ..., n – 1, n}, a probabilidade que os números sejam naturais consecutivos é 20%. Calcule n.
a) 5 b) 6 c) 10 d) 11 e) nda

101) (Polya Competition-98) Seis cartões, numerados de 0 a 5, são embaralhados e colocados com as faces numeradas para baixo sobre uma mesa. Um cartão é aleatoriamente escolhido e virado. O número indicado neste cartão é igual ao número de cartões adicionais que devem ser virados na mesa. Determine a probabilidade que o cartão com o número 3 mantenha-se com a sua face numerada para baixo.

102) (Polya Competition-97) Se um dado é repetidamente arremessado, qual a probabilidade que exatamente dois 4's e um 5 apareçam antes de ocorrer o primeiro 6.

103) (Polya Competition-99) Você está jogando um jogo onde alternadamente arremessa-se uma moeda e um dado. Você ganha se sair cara na moeda ou se sair os números 1 ou 2 no dado. Você perde se sair os números 3 ou 4 no dado. Você inicia o jogo arremessando a moeda. Qual a probabilidade de ganhar?

104) (Invitational Challenge-01) Determine a probabilidade que um

inteiro positivo menor que 1000 contenha exatamente dois dígitos iguais.

105) (British Columbia Colleges-01) Um ingresso para uma peça de teatro custa um dólar. Sempre na abertura da bilheteria não há troco no caixa. Oito pessoas formam a fila inicial para comprar o ingresso: quatro delas possuem uma moeda de um dólar e as outras quatro possuem uma moeda de dois dólares. Dependendo de como as pessoas estão ordenadas na fila, o bilheteiro pode ou não ter troco (quando for o caso) para todas as pessoas na fila. Suponha que as pessoas formam a fila em ordem aleatória e não é sabido quem possui as moedas de um e dois dólares. Calcule a probabilidade que o bilheteiro seja capaz dar o troco de todas as pessoas na fila.
a) 1/70 b) 1/14 c) 1/7 d) 1/5 e) 1/4

106) (Zimbábue-04) Um júri de 12 pessoas deve decidir se um réu é culpado ou não. Uma maioria absoluta (isto é, 7 ou mais pessoas) é necessária para uma decisão. Sabe-se que 4 pessoas do júri já se decidiram pelo SIM (culpado) e outras 3 pessoas já se decidiram pelo NÃO (inocente). Dos outros, 4 vão jogar uma moeda para se decidir e o último vai votar com a maioria. Qual a probabilidade que o réu seja considerado culpado?
a) 11/16 b) 1/4 c) 7/12
d) 6/11 e) 3/11

107) (Pennsylvania-96) Suponha que três dados honestos são arremessados. A probabilidade que a soma dos números obtidos seja igual a 10 é:
a) 5/72 b) 7/72 c) 25/216
d) 1/8 e) 1/6

108) (Canadá Open Challenge-02) Suponha que M é um inteiro com a propriedade que se x é escolhido aleatoriamente do conjunto {1, 2, 3, ..., 999, 1000}, a probabilidade que x seja um divisor de M é 1/100. Se $M \leq 1000$, determine o máximo valor possível de M.

109) (Hong Kong-02) 20 bolas são colocadas em duas urnas com 10 bolas em cada urna. As bolas em cada urna são numeradas de 1 a 10, todas as bolas de uma urna são brancas e todas as bolas da outra urna são pretas. Se uma bola é sorteada de cada urna, calcule a probabilidade que o número da bola branca seja maior que o número da bola preta.

110) (OBM-08) Arnaldo, Bernaldo, Cernaldo e Dernaldo baralharam as 52 cartas de um baralho e distribuíram 13 cartas para cada um. Arnaldo ficou surpreso: "Que estranho, não tenho nenhuma carta de espadas." Qual a probabilidade de Bernardo também não ter cartas de espadas?

A) $\frac{39!}{26!52!}$ B) $\frac{26!}{13!39!}$ C) $\frac{39!39!}{26!52!}$
D) $\frac{26!26!}{13!39!}$ E) $\frac{39!13!}{52!}$

111) (OBM-02) Quantos dados devem ser lançados ao mesmo tempo para maximizar a probabilidade de se obter exatamente um 2?

112) (AIME-13) Melinda possui 3 caixas vazias e 12 livros, sendo 3 de matemática. Em uma das caixas devem

ser colocados 3 livros, em outra 4 livros e na última 5 livros. Se os livros são distribuídos aleatoriamente nas caixas, determine a probabilidade que os livros de matemática fiquem na mesma caixa.

113) (AIME-14) Uma urna contém 4 bolas verdes e 6 bolas azuis. Uma segunda urna contém 16 bolas verdes e N bolas azuis. Uma bola é extraída aleatoriamente de cada urna. A probabilidade que as bolas sejam da mesma cor é 0,58. Determine N.

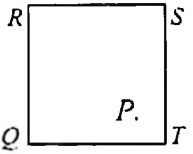
114) (AIME-18) Kathy possui 5 cartões azuis e 5 cartões verdes. Sem ver, ela retira aleatoriamente 5 cartões e coloca em fila. Kathy ficará feliz se e somente se os cartões azuis escolhidos estiverem adjacentes e os cartões verdes escolhidos estiverem adjacentes. Por exemplo, as ordens AAVVV, VVVVA ou AAAAA farão Kathy feliz, porém AAAVA não. Determine a probabilidade de Kathy ficar feliz.

115) (AIME-15) Em uma gaveta Sandy possui 5 pares de meias de diferentes cores. Na segunda-feira Sandy seleciona aleatoriamente 2 meias individuais entre as 10 meias. Na terça-feira Sandy seleciona aleatoriamente 2 meias individuais dentre as 8 restantes. Na quarta-feira Sandy seleciona aleatoriamente 2 meias individuais entre as 6 meias restantes. Qual a probabilidade que quarta-feira seja o primeiro dia que Sandy escolha duas meias da mesma cor?

116) (IMO-85 Longlist) Duas pessoas X e Y jogam um jogo com um dado. Toda vez que o dado é lançado e o resultado é 1 ou 2, X vence esta partida; caso contrário Y vence esta partida. O jogo é vencido pelo primeiro jogador que vence duas partidas consecutivas. Determine as probabilidades para que cada um dos jogadores vença o jogo depois de 5 partidas. Também determine as probabilidades para que cada jogador vença o jogo sem restrição para o número de partidas.

117) (AIME-11) A probabilidade que um conjunto de três vértices distintos escolhidos aleatoriamente entre os vértices de polígono regular de n lados determine um triângulo obtuso é $\frac{93}{125}$. Determine os possíveis valores de n.

118) (OBM-10) Um ponto P é escolhido ao acaso no interior de um quadrado $QRST$. Qual é a probabilidade do ângulo $R\hat{P}Q$ ser agudo?



A) $\frac{3}{4}$ B) $\sqrt{2}-1$ C) $\frac{1}{2}$

D) $\frac{\pi}{4}$ E) $1-\frac{\pi}{8}$

119) (AIME-10) Jackie e Phil possuem duas moedas honestas e uma terceira que possui probabilidade 4/7 de sair cara. Jackie joga as três moedas e então Phil joga as três moedas. Seja $\frac{m}{n}$ a probabilidade de Jackie obter o mesmo

número de caras de Phil, onde m e n são números primos entre si. Calcule m + n.

120) (Bélgica-01) Em um programa de TV três homens escolhem, independentemente, suas mulheres favoritas entre três mulheres e, ao mesmo tempo, estas três mulheres escolhem seus homens favoritos. Se um homem e uma mulher escolhem um ao outro, então eles ganham uma viagem. Qual a probabilidade que o programa distribua três viagens?
a) 0,2% b) 0,8% c) 2,5%
d) 4,0% e) 16,7%

121) (AIME-89) Uma moeda possui probabilidade p de sair cara. Se a moeda é jogada 5 vezes, sabe-se que a probabilidade que sair exatamente duas caras e a mesma probabilidade de sair exatamente uma cara. Determine a probabilidade que saia exatamente três caras em cinco jogadas da moeda.

122) (IMO-79 Shortlist) De uma mala que contém 5 pares de meias, cada par de uma diferente cor, são aleatoriamente retiradas 4 meias. Se for extraído um par completo (mesma cor), este é descartado e é trocado por um novo par escolhido, de forma aleatória, da mala. O processo continua até que a mala esteja vazia ou existirem 4 meias de cores distintas fora da mala. Qual a probabilidade de ocorrer a última situação?

123) (AIME-88) Escolhe-se aleatoriamente um divisor positivo D de 10^{99}. Determine a probabilidade que D seja divisível por 10^{88}.

124) (AIME-90) Uma moeda não-viciada é jogada 10 vezes. Qual é a probabilidade que não ocorram duas caras consecutivas.

125) (Campina Grande-19) Uma moeda é tal que a probabilidade de um lançamento resultar em cara é 1/5. Um experimento consiste de lançar a mesma sucessivas vezes de forma independente (isto é, o resultado anterior não influencia no resultado subsequente) até que ocorra a cara pela primeira vez. Qual a probabilidade de que a cara ocorra pela primeira vez havendo uma quantidade ímpar de lançamentos?
(a) 1/3 (b) 1/2 (c) 5/9
(d) 2/3 (e) 1

126) (Campina Grande-15) Um escritório de reuniões possui uma mesa em formato circular com 8 assentos. Haverá uma reunião na sala e 8 pessoas comparecerão e as mesmas se sentarão aleatoriamente em torno dessa mesa. Porém, por motivos pessoais, duas pessoas preferem não se sentar lado a lado. Qual a probabilidade delas se sentarem uma ao lado da outra?
a) 1/7 b) 1/8 c) 2/7 d) 2/8 e) 3/8

127) (Ceará-17) João possui 4033 moedas honestas, sendo 2017 de ouro e 2016 de prata. Se João arremessar as 4033 moedas simultaneamente, qual a probabilidade dele obter mais *caras* de ouro que *coroas* de prata?

128) (Goiás-18) Um estudante encontrou uma caixa contendo um grande número de bolas brancas idênticas. Desafiado a fazer uma estimativa da quantidade de

bolas que há na caixa sem usar instrumentos de medição, o estudante utilizou a seguinte estratégia: retirou 10 bolas da caixa, marcou-as com tinta e devolveu-as à caixa, misturando bem com as demais. Em seguida ele retirou, de uma vez e de maneira aleatória, 20 bolas da caixa e constatou que exatamente duas delas eram das bolas que ele havia marcado. Nessas condições, denotando-se por n a quantidade total de bolas inicialmente na caixa,

(a) calcule, como uma função de n, a probabilidade de que, ao sortear as 20 bolas, o estudante obtivesse exatamente duas das bolas marcadas (observe que não é necessário desenvolver os fatoriais).

(b) Para qual valor de n essa probabilidade é máxima?

129) (Goiás-17) Uma urna possui inicialmente 40 bolas verdes e 10 bolas vermelhas. Dez bolas são retiradas da urna, uma de cada vez, ao acaso e sem reposição.

(a) Calcule a probabilidade de que a segunda bola retirada seja verde.

(b) Calcule a probabilidade de que a décima bola retirada seja verde.

(c) Sabendo-se que a terceira bola retirada foi verde, qual é a probabilidade de que a quarta retirada também seja verde?

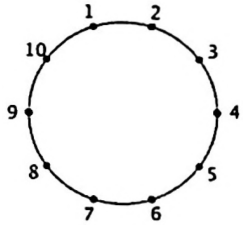
130) (Goiás-16) Considere duas urnas, a primeira contendo seis bolas verdes e uma vermelha e a segunda contendo quatro bolas verdes. Cinco bolas são retiradas, ao acaso, da primeira urna, e colocadas na segunda. Depois de misturadas, duas bolas são sorteadas da segunda urna e colocadas na primeira. Calcule a probabilidade da bola vermelha estar na primeira urna após essas operações.

131) (Grande PoA-13) Em um grupo de amigos que se comunica por telefone celular há a propagação, com um risco de erro de digitação, de uma mensagem cujo teor original é "José passou no vestibular". Mais precisamente, suponhamos que cada amigo tem probabilidade de 90% de mandar a mesma mensagem que recebeu e de 10% enviar o contrário do que recebeu (não passou se passou, ou passou se não passou). Indiquemos por p(n) a probabilidade de que no n-ésimo envio desta informação esteja correta. Supondo que José tenha realmente passado, teremos p(0) = 1. Assim sendo, pede-se:

a) mostrar que (para valores a e b, a determinar) vale $p(n+1) = ap(n) + b$, para todos os $n \geq 0$;

b) obter uma fórmula expressando p(n) em função de n, e dela concluir que a longo prazo (ou seja, ao n crescer infinitamente) haverá uma probabilidade de apenas 50% de um amigo receber mensagem dizendo que José passou.

132) (Paraná-16) Em uma caixa há 10 bolas idênticas, numeradas de 1 a 10. O número de cada bola corresponde a um dos pontos da figura, os quais dividem a circunferência em 10 partes iguais. Nos itens a seguir, considere que as bolas são retiradas ao acaso, uma a uma e sem reposição.



i. Se forem retiradas três bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um triângulo isósceles?
ii. Se forem retiradas quatro bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um quadrilátero convexo no qual exatamente dois dos ângulos internos sejam retos?
iii. Se forem retiradas cinco bolas, qual é a probabilidade de que os pontos correspondentes sejam vértices de um pentágono convexo que tenha o centro da circunferência em seu interior? Obs.: se o centro da circunferência pertence ao lado do pentágono, então ele não está no interior do pentágono.

133) (Rio de Janeiro-15) Seja S = {1, 2, ..., 300} o conjunto dos 300 primeiros números naturais. Escolhendo ao acaso dois números, não necessariamente distintos, em S (cada número tem a mesma probabilidade de ser escolhido), determine a probabilidade de o produto destes dois números ser múltiplo de 300.

134) (Rio Grande do Norte-19) Para um torneio de futebol mundial, 24 países, dentre os quais Brasil, Argentina, Alemanha e Itália, são divididos em 6 grupos distintos, contendo 4 equipes cada um. Encontre a probabilidade de que ocorram os seguintes dois eventos simultaneamente: Brasil e Argentina num mesmo grupo e Alemanha e Itália caiam também juntos num outro grupo.
a) 3/101 b) 30/1771
c) 31/1001 d) 33/1011
e) 33/1001

135) (Rio Grande do Norte-18) Considere a coleção de todos os números de 5 dígitos cuja soma dos dígitos é 43. Um desses números é escolhido ao acaso. A probabilidade deste número ser múltiplo de 11 é:
a) 1/5 b) 1/11 c) 1/7 d) 1/21 e) 1/9

136) (Santa Catarina-12) Em uma festa há 2012 pessoas que se dividem em 503 famílias, cada uma composta por um homem, uma mulher e duas crianças. Na festa, há 503 mesas com quatro cadeiras em cada mesa. Em um certo momento, todos os presentes sentaram aleatoriamente nas cadeiras e verificou-se que, em cada mesa, havia um homem, uma mulher e duas crianças (não necessariamente da mesma família). Qual a probabilidade de que cada mesa esteja composta por membros da mesma família?

137) (Santa Catarina-17) Três botões luminosos, numerados por 1; 2 e 3, se acendem ou se apagam conforme são pressionados. O primeiro botão está aceso e os outros dois estão apagados. Abel, Bia e Cadu retiram, um de cada vez e nesta ordem, sem reposição, uma bola de dentro de uma caixa que contém cinco bolas, numeradas de 1 a 5.
• Se o número retirado por Abel for primo, Abel pressiona os botões 1 e 2 (se o número não for primo, Abel não faz nada);

• Se o número retirado por Bia for par, Bia pressiona os botões 1 e 3 (se o número não for par, Bia não faz nada);
• Se o número retirado por Cadu for ímpar, Cadu pressiona os botões 2 e 3 (se o número não for ímpar, Cadu não faz nada).
Após este processo, qual a probabilidade das três luzes terminarem acesas?

138) (São Paulo-19) a) Considere o experimento de sortear um número ao acaso do conjunto {1; 2; 3; 4}. Cada número tem a mesma chance de ser sorteado. Defina os eventos:
• A: "sortear um número par";
• B: "sortear um número primo" (lembre-se de que 1 não é primo!);
• C: "sortear um número estritamente menor do que 3".
a.1) Calcule $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(B \cap C)$ e $P(A \cap B \cap C)$.
a.2) Mostre que se A e B são independentes, A e C são independentes, e B e C são independentes, então não necessariamente A, B e C são mutuamente independentes.
Uma aplicação curiosa de probabilidade é no cálculo de $\varphi(n)$ que para cada inteiro $n \geq 2$ é igual à quantidade de números do conjunto $A_n = \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$ que não possuem fatores em comum com n. Veja que a probabilidade de escolhendo ao acaso um número de An obter um número sem fatores em comum com n é $\varphi(n)/n$.
b) Seja $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ a fatoração de n em potências de primos. Qual é a probabilidade de escolhendo ao acaso um número de A_n obter um número que não é divisível por p_1?
c) Pode-se provar que o conjunto de eventos não ser divisível por p_i em A_n para cada $i = 1, 2, \ldots, k$ é mutuamente independente. A partir desse fato (você não precisa prová-lo nessa prova) determine uma fórmula para $\varphi(n)$ usando os fatores primos de n e calcule $\varphi(2019)$.

139) (Canadian Open Challenge-19) Bob e Jane possuem, cada um, conjuntos idênticos de 12 cartas, sendo três de cada umas das cores: vermelho, verde, amarelo e azul. Bob e Jane misturam aleatoriamente suas cartas e colocam, alternadamente, uma carta sobre uma mesa, formando uma pilha, com Jane colocando primeiro. Determine a probabilidade que Jane coloque todas as suas cartas vermelhas na pilha antes que Bob coloque alguma de suas cartas vermelhas.

140) (Australian Intermediate-17) Dan possui uma urna contendo uma certa quantidade de doces vermelhos e verdes. Ele seleciona aleatoriamente um doce, anota sua cor, coloca de volta na urna e então seleciona um segundo doce. A probabilidade de os doces serem ambos vermelhos é 105% da probabilidade de eles serem ambos vermelhos se Dan tivesse comido o primeiro doce antes de sortear o segundo. Qual é o maior número de doces que podem estar na urna?

RECORRÊNCIA EM COMBINATÓRIA E PROBABILIDADE

8.1. INTRODUÇÃO

No capítulo 4 estudamos as relações de recorrências entre termos de uma sequência numérica. Neste capítulo estudaremos uma das aplicações das relações de recorrência, que trata de resolver problemas de análise combinatória e probabilidade utilizando esta ferramenta. Por exemplo, suponha que você quer determinar a quantidade de palavras com n letras formadas a partir das letras A, B e C. Seja x_n esta quantidade. Podemos raciocinar da seguinte maneira para formarmos todas as palavras com n letras: tome todas as palavras com $n-1$ letras (existem x_{n-1} no total) e, à direita de cada uma destas, basta acrescentar uma das letras A, B ou C (3 possibilidades). Portanto, temos a seguinte relação entre x_n e x_{n-1}: $x_n = 3.x_{n-1}$, que é uma relação de recorrência que caracteriza uma PG. Portanto: $x_n = x_1.3^{n-1}$. Como $x_1 = 3$, então $x_n = 3^n$.

O exemplo anterior é um caso simples de aplicação, onde foi possível relacionar diretamente x_n com x_{n-1}. Em alguns casos as relações de recorrência são de ordem maior que 1 e algumas não são lineares. Na verdade, pela simplicidade da situação problema proposta, é mais simples aplicar o princípio fundamental da contagem que usar recorrência pra resolver o problema. Isso é fundamental na resolução de uma questão de combinatória: fazer do modo mais simples. Recorrência deve ser usada se realmente for a forma mais simples de resolver.

Apesar de recorrência resolver algumas das questões mais difíceis da análise combinatória e probabilidade, nem toda questão desses assuntos pode ser resolvida usando essa ferramenta. Somente é possível aplicar recorrência em contagem quando é possível aproveitar todas as sequências com $n-1$, $n-2$, ... elementos na análise da quantidade de sequências com n elementos. Porém isso nem sempre ocorre. Em algumas questões de combinatória, quando um elemento é acrescentado no conjunto (quando isso é possível!) que está sendo trabalhado, devido às restrições impostas, não é possível aproveitar todo o raciocínio desenvolvido na determinação das sequências com um número menor de elementos. Apenas resolvendo uma grande quantidade de exercício de combinatória que é possível identificar os tipos clássicos de questões em que recorrência pode ser aplicada.

Exercícios Resolvidos

1) Determine o número de permutações de n elementos distintos.
Solução:

Seja x_n o número de permutações com n elementos distintos. Para formar todas estas x_n permutações basta escrever as x_{n-1} permutações com $n-1$ elementos distintos e no final de cada uma delas acrescentar mais um elemento (n possibilidades). Logo, temos que $x_n = n.x_{n-1}$.
Assim: $x_n = n.x_{n-1} = n(n-1)x_{n-2} = n(n-1)(n-2)x_{n-3} = ... = n(n-1)(n-2)...3.2.x_1$.
Uma vez que $x_1 = 1$, então $x_n = n!$.

2) Quantos subconjuntos há de um conjunto com n elementos?
Solução:
Seja x_n o número de subconjuntos de um conjunto A com n elementos. Seja y um destes n elementos do conjunto A. Podemos formar todos os x_n subconjuntos de duas maneiras:
i) os subconjuntos que não contém y: x_{n-1} no total;
ii) os subconjuntos de contém y: para tanto basta acrescentar o elemento y em cada subconjunto do conjunto $A - \{y\}$, que possui $n-1$ elementos, ou seja, também existem x_{n-1} no total.
Desta forma: $x_n = x_{n-1} + x_{n-1} = 2.x_{n-1}$, que caracteriza uma PG. Logo $x_n = x_1.2^{n-1}$.
Desde que $x_1 = 2$ (subconjuntos unitário e vazio), então $x_n = 2^n$.

3) (EPCAr-05) Gastei tudo que tinha em 6 lojas. Em cada uma delas gastei um real a mais do que a metade do que tinha ao entrar nela. Com base nisso, pode-se afirmar que:
a) inicialmente tinha 120 reais.
b) ao entrar na 3ª loja tinha 16 reais.
c) gastei 8 reais na 4ª loja.
d) sobraram 4 reais ao sair da 4ª loja.
Solução: Alternativa C
Seja x_n a quantidade de dinheiro ao entrar na loja n (ou sair da loja $n-1$). Pelo enunciado:

$$x_n = x_{n-1} - \left(\frac{x_{n-1}}{2} + 1\right) \Rightarrow x_n = \frac{x_{n-1}}{2} - 1 \Rightarrow x_n + 2 = \frac{1}{2}(x_{n-1} + 2).$$

Portanto, a sequência $x_n + 2$ é uma PG de razão 1/2: $x_n + 2 = (x_7 + 2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-7}$.

Como $x_7 = 0$ então: $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-8} - 2 \Rightarrow x_n = 2^{8-n} - 2, n \geq 1$.

Assim, vamos analisar cada afirmativa:
a) FALSO. $x_1 = 2^8 - 2 = 126$.
b) FALSO. $x_3 = 2^5 - 2 = 30$.
c) VERDADEIRO. $x_4 - x_5 = (2^4 - 2) - (2^3 - 2) = 8$.
d) FALSO. $x_5 = 2^3 - 2 = 6$.

4) (ITA-71) Qual o maior número de partes em que um plano pode ser dividido por n linhas retas?

a) n^2 b) $n(n+1)$ c) $n(n+1)/2$ d) $(n^2+n+2)/2$ e) N.d.r.a.

Solução: Alternativa D

Evidentemente, a situação em que temos um maior número de partes ocorre quando não existem duas retas paralelas, ou seja, todo par de retas é concorrente. Suponha que já temos traçadas, de acordo com as condições anteriores, $n-1$ retas no plano, dividindo este em x_{n-1} partes. Traçando mais uma reta que intercepte todas as $n-1$ já traçadas, podemos notar que entre quaisquer dois pontos de interseção consecutivos (contando os extremos) desta nova reta podemos associar uma mova parte do plano criada. Assim, podemos afirmar que $x_n = x_{n-1} + n$, onde $x_1 = 2$.

$x_2 = x_1 + 2$

$x_3 = x_2 + 3$

$x_3 = x_2 + 4$

...

$x_n = x_{n-1} + n$

Somando estas equações obtemos:

$$x_n = x_1 + (2+3+\ldots+n) = 2 + \frac{(2+n)(n-1)}{2} = 2 + \frac{n^2+n-2}{2} \Rightarrow x_n = \frac{n^2+n+2}{2}.$$

5) (IME CG-03) Uma pessoa possui uma criação de abelhas, inicialmente com a abelhas. A taxa de natalidade anual dessa população de abelhas é constante e igual a p%. A cada ano morrem x abelhas dessa criação. A população das abelhas é igual ao produto q.a ao final de n anos. Determine o valor de x em função de q, n, p e a.

Solução:

Seja b_n a quantidade de abelhas ao final de n anos. Pelo enunciado, podemos concluir que durante o ano n nascem $\left(1+\frac{p}{100}\right)b_{n-1}$ abelhas e morrem x abelhas.

Logo: $b_n = \left(1+\frac{p}{100}\right)b_{n-1} - x$. Podemos observar que:

$$b_n = \left(1+\frac{p}{100}\right)b_{n-1} - x \Leftrightarrow b_n - \frac{100.x}{p} = \left(1+\frac{p}{100}\right)\left(b_{n-1} - \frac{100.x}{p}\right).$$

Esta última relação de recorrência caracteriza uma PG de razão $\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Então:

$$b_n - \frac{100.x}{p} = \left(b_1 - \frac{100.x}{p}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} \Rightarrow b_n = \left(a - \frac{100.x}{p}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \frac{100.x}{p}$$

Como b_n = q.a temos que: $q.a = \left(a - \frac{100.x}{p}\right)\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \frac{100.x}{p} \Rightarrow$

$$q.a = a\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} - \frac{100.x}{p}\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} + \frac{100.x}{p} \Rightarrow$$

$$\frac{100.x}{p}\left[\left(1+\frac{100}{p}\right)^{n-1} - 1\right] = a\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} - q\right] \Rightarrow x = \frac{p.a\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} - q\right]}{100\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{n-1} - 1\right]}.$$

6) (OBM-97) Os vértices de um decágono regular convexo $ABC...J$ devem ser coloridos usando-se apenas as cores verde, amarela e azul. De quantos modos isso pode ser feito se vértices adjacentes não podem receber a mesma cor?

a)1022 b)1024 c)1026 d)1524 e)1536

1ª Solução: Alternativa C

Seja x_n o número de maneiras de pintar os n vértices de um polígono regular de modo que vértices adjacentes não recebam a mesma cor. Para pintar o 1º vértice existem 3 possibilidades. Para pintar o 2º vértice existem 2 possibilidades. Para pintar o 3º vértice existem 2 possibilidades, assim por diante. Eliminando a restrição do último vértice não possuir a mesma cor do primeiro, existem 3.2^{n-1} possibilidades. Os casos em que o primeiro e o último vértice possuem a mesma cor podem ser analisados considerando que estes vértices são o mesmo vértice. Assim, para este caso existem x_{n-1} possibilidades. Portanto: $x_n = 3.2^{n-1} - x_{n-1}$, onde $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$.

Observe que: $x_n = 3.2^{n-1} - x_{n-1} = 3.2^{n-1} - (3.2^{n-2} - x_{n-2}) \Rightarrow x_n - x_{n-2} = 3.2^{n-2}$.

Analisando somente os índices pares podemos escrever:

$x_4 - x_2 = 3.2^2$

$x_6 - x_4 = 3.2^4$

$x_8 - x_6 = 3.2^6$

...

$x_{2n} - x_{2n-2} = 3.2^{2n-2}$

Somando estas expressões obtemos: $x_{2n} - x_2 = 3.2^2 + 3.2^4 + 3.2^6 + ... + 3.2^{2n-2} \Rightarrow$

$$x_{2n} - 6 = \frac{3.2^2(4^{n-1}-1)}{4-1} \Rightarrow x_{2n} = 2^{2n} + 2.$$

Para n = 5: $x_{10} = 2^{10} + 2 = 1026$.

2ª Solução:

Seja x_n o número de maneiras de pintar os n vértices de um polígono regular de modo que vértices adjacentes não recebam a mesma cor. Inicialmente vamos pintar, seguindo o sentido horário, do primeiro ao penúltimo vértice. Se o penúltimo vértice for de uma cor diferente do 1º vértice (onde existem x_{n-1} possibilidades de pintura), temos somente uma possibilidade para pintar o último vértice. Se o penúltimo vértice for pintado da mesma cor que o primeiro (x_{n-2} possibilidades), existem duas possibilidades para pintar o último vértice. Assim, temos que $x_n = x_{n-1} + 2.x_{n-2}$, com

$x_1 = 0$ e $x_2 = 6$. A equação característica desta equação de recorrência é $x^2 - x - 2 = 0$, cujas raízes são 2 e -1. Logo:

$x_n = A.2^n + B(-1)^n$, $n \geq 1$. Como $x_1 = 0$ e $x_2 = 6$, então $2A - B = 0$ e $4A + B = 6$, onde obtemos $A = 1$ e $B = 2$. Portanto: $x_n = 2^n + 2(-1)^n \Rightarrow x_{10} = 2^{10} + 2 = 1026$.

7) (IME-16) Três jogadores sentam ao redor de uma mesa e jogam, alternadamente, um dado não viciado de seis faces. O primeiro jogador lança o dado, seguido pelo que está sentado à sua esquerda, continuando neste sentido até o jogo acabar. Aquele que jogar o dado e o resultado for 6, ganha e o jogo acaba. Se um jogador obtiver o resultado 1, o jogador seguinte perderá a vez, isto é, a vez passará ao jogador sentado à direita de quem obteve 1. O jogo seguirá até que um jogador ganhe ao tirar um 6. Qual é a probabilidade de vitória do primeiro jogador a jogar?

Solução:

Sejam a_n, b_n e c_n as probabilidades de que, respectivamente, o primeiro, o segundo e o terceiro jogador lance o dado na n-ésima rodada. Claramente $a_1 = 1$, pois o primeiro jogador começa na primeira rodada. Na primeira rodada o segundo jogador lança o dado se o primeiro jogador tirar 2, 3, 4 ou 5, logo $b_1 = 4/6$. O terceiro jogador lançará o dado se o primeiro tirar 1 ou se o segundo tirar 2, 3, 4 ou 5.

Logo: $c_1 = \frac{1}{6} + \frac{4}{6}\frac{4}{6} = \frac{22}{36}$.

Assim, pode-se afirmar que:

$$a_n = \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{4}{6}c_{n-1},\ \forall n \geq 2 \quad (I)$$

$$b_n = \frac{1}{6}c_{n-1} + \frac{4}{6}a_n,\ \forall n \geq 2 \quad (II)$$

$$c_n = \frac{1}{6}a_n + \frac{4}{6}b_n,\ \forall n \geq 1 \quad (III)$$

Aplicando (III) em (I) e (II):

$$(I):\ a_n = \frac{1}{6}b_{n-1} + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1}\right) \Rightarrow 18a_n - 2a_{n-1} = 11b_{n-1} \quad (IV) \Rightarrow$$

$$18a_{n-1} - 2a_n = 11b_n \quad (V)$$

$$(II):\ b_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6}a_{n-1} + \frac{2}{3}b_{n-1}\right) + \frac{2}{3}a_n \Rightarrow b_n = \frac{1}{36}a_{n-1} + \frac{1}{9}b_{n-1} + \frac{2}{3}a_n \Rightarrow$$

$$11b_n = \frac{11}{36}a_{n-1} + \frac{11}{9}b_{n-1} + \frac{22}{3}a_n \quad (VI)$$

Substituindo (V) e (IV) em (VI):

$$18a_{n+1} - 2a_n = \frac{11}{36}a_{n-1} + \frac{1}{9}(18a_n - 2a_{n-1}) + \frac{22}{3}a_n = \frac{1}{12}a_{n-1} + \frac{28}{3}a_n \Rightarrow$$

$$216a_{n+1} - 136a_n - a_{n-1} = 0,\ \forall n \geq 2 \quad (VII)$$

Note que a probabilidade A_n do primeiro jogador ganhar na rodada n é a probabilidade de ele lançar o dado na rodada n é tirar 6: $A_n = a_n \frac{1}{6} \Rightarrow a_n = 6A_n$

Sendo P a probabilidade do primeiro jogador ganhar:

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{6} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 6P$$

Substituindo em (VI) desde n = 2 até $n \to \infty$ e somando todas expressões obtém-se:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 216a_{n+1} - \sum_{n=2}^{\infty} 136a_n - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-1} = 0 \Rightarrow$$

$$216\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) - a_1 - a_2\right] - 136\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) - a_1\right] - \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \Rightarrow$$

$$216(6P - a_1 - a_2) - 136(6P - a_1) - 6P = 0 \quad \text{(VIII)}$$

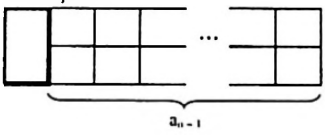
Substituindo n = 2 em (I): $a_2 = \frac{1}{6}b_1 + \frac{4}{6}c_1 = \frac{1}{6}\frac{4}{6} + \frac{4}{6}\frac{22}{36} = \frac{14}{27}$

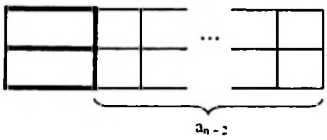
Substituindo em (VIII) segue que:

$$216\left(6P - 1 - \frac{14}{27}\right) - 136(6P - 1) - 6P = 0 \Rightarrow P = \frac{32}{79}$$

8) Determine o número de maneiras diferentes de se cobrir um tabuleiro 2×n com dominós 2×1 iguais.

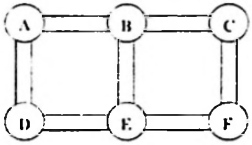
Solução:





Seja a_n o número de maneiras de cobrir o tabuleiro 2×n com n dominós 2×1. Perceba que há apenas duas maneiras de iniciar o preenchimento do tabuleiro, conforme indicado nas figuras. Na 1ª maneira, deve-se colocar um dominó vertical, ocupando as duas casas da 1ª coluna. Neste caso, falta cobrir um tabuleiro de dimensões 2×n − 1 com n − 1 dominós, que pode ser feito de a_{n-1} formas. Na 2ª maneira, dois dominós horizontais devem ser colocados ocupando as duas primeiras colunas. Para acabar de cobrir o tabuleiro, basta cobrir um tabuleiro 2×n − 2 com n − 2 dominós, que pode ser feito de a_{n-2} formas. Como a cobertura do tabuleiro foi separada em dois casos, pode-se afirmar que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$. Perceba que $a_1 = 1$ (há uma maneira de cobrir um tabuleiro 2×1) e $a_2 = 2$ (há duas maneiras de cobrir um tabuleiro 2×2), então a_n é igual a F_{n+1}, onde F_n é a sequência de Fibonacci, a saber, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, com $F_1 = 1$ e $F_2 = 1$. Assim, segue que $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

9) (OBM Univ-01) Um ratinho ocupa inicialmente a gaiola *A* e é treinado para mudar da gaiola atravessando um túnel sempre que soa um alarme. Cada vez que soa o alarme o ratinho escolhe qualquer um dos túneis incidentes a sua gaiola com igual probabilidade e sem ser afetado por escolhas anteriores. Qual a probabilidade de que após o alarme soar 23 vezes o ratinho ocupe a gaiola *B*?



Solução:

Perceba que depois de um número par de vezes que soa o alarme o ratinho somente pode ocupar as gaiolas A, E ou C, enquanto que depois de um número ímpar de vezes que soa o alarme o ratinho somente pode ocupar as gaiolas B, D ou F.

Seja x_n a probabilidade do ratinho estar, depois de n vezes que soa o alarme, nas gaiolas B ou E e seja y_n a probabilidade do ratinho estar, depois de n vezes que soa o alarme, nas gaiolas A ou D ou C ou F.

É claro que $x_n + y_n = 1$ (1)

Além disso, para estar em uma das casas B ou E após a n^a vez que toca a campainha, pode-se estar na vez anterior nas casas B ou E (x_{n-1} de probabilidade) e escolher a outra casa do centro (1/2 de probabilidade) ou estar na vez anterior em uma das casas A, D, C ou F (y_{n-1} de probabilidade) escolher ficar numa dessas casas laterais (1/2 de probabilidade). Logo, pode-se afirmar que: $x_n = x_{n-1}\cdot\frac{1}{3} + y_{n-1}\cdot\frac{1}{2}$ (2)

Substituindo (1) em (2):

$$x_n = x_{n-1}\cdot\frac{1}{3} + (1 - x_{n-1})\cdot\frac{1}{2} \Rightarrow x_n = -\frac{1}{6}x_{n-1} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^n .A + B \Rightarrow$$

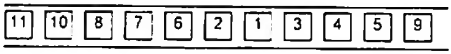
$$\left(-\frac{1}{6}\right)^n .A + B = -\frac{1}{6}\left[\left(-\frac{1}{6}\right)^n .A + B\right] + \frac{1}{2} \Rightarrow B = \frac{3}{7} \Rightarrow x_n = \left(-\frac{1}{6}\right)^n .A + \frac{3}{7}$$

Como $x_0 = 0$, tem-se que $A = -\frac{3}{7}$. Logo: $x_n = -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n . + \frac{3}{7}$

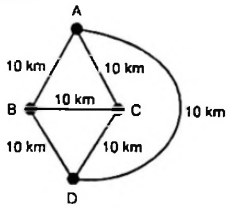
Assim: $x_{23} = -\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{23} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7.6^{23}} + \frac{3}{7} = \frac{3}{7}\left(1 + \frac{1}{6^{23}}\right)$

Exercícios de Vestibular

1) (IME-83) Uma rua possui um estacionamento em fila com N vagas demarcadas junto ao meio-fio de um dos lados. N automóveis, numerados de 1 a N, devem ser acomodados, sucessivamente, pela ordem numérica no estacionamento. Cada carro deve justapor-se a um carro já estacionado, ou seja, uma vez estacionado o carro 1 em qualquer uma das vagas, os seguintes se vão colocando imediatamente à frente do carro mais avançado ou atrás do carro mais recuado. Quantas configurações distintas podem ser obtidas desta maneira? A figura abaixo mostra uma das disposições possíveis.



2) (IME-02) Quatro cidades, A, B, C e D, são conectadas por estradas conforme a figura abaixo.



Quantos percursos diferentes começam e terminam na cidade A, e possuem:
(a) exatamente 50 km?
(b) n × 10 km?

Exercícios Gerais

3) a) Ache o número de inteiros positivos com n algarismos nos quais algarismos adjacentes não sejam iguais.
b) Existem quantos números pares satisfazendo a)?

4) Um alfabeto possui cinco letras: a, b, c, d, e. Nesse alfabeto, existem quantas palavras de n letras com um número par de a's?

5) Seja $f(n)$ o número de palavras com n letras, sem zeros vizinhos, formadas a partir do alfabeto $\{0, 1, 2\}$. Encontre uma recorrência para $f(n)$.

6) Determine quantos inteiros positivos de n algarismos existem, formados apenas pelos dígitos 1, 2 e 3, de modo que o valor absoluto da diferença de dois dígitos consecutivos seja igual a 0 ou 1.

7) Determine uma relação de recorrência para o número de maneiras de formar palavras com n letras utilizando o alfabeto {a, b, c, d} se as letras a e b não devem aparecer juntas?

8) Determine o número de palavras formadas a partir do alfabeto {A, B, C, D} possuindo um número par de A's?

9) Qual a probabilidade de obter um número ímpar de seis quando são jogados n dados?

10) Ao subir a escada de seu prédio, José às vezes sobre dois degraus de uma vez e às vezes sobe um de cada vez. Sabendo

que a escada tem 8 degraus, de quantas maneiras diferentes José pode subir a escada? Você consegue generalizar para o caso de uma escada com n degraus?

11) Um estudante arremessa uma moeda e se obtém cara marca um ponto e se obtém coroa marca dois pontos. Calcule a probabilidade que o estudante alcance exatamente n pontos em algum instante em uma sequência de n arremessos da moeda.

12) Para cada n, seja a_n o número de sequências de comprimento n consistindo somente das letras A e B, com não mais que três letras A consecutivas e três letras B consecutivas. Determine uma relação de recorrência sobre a_n.

13) Seja x_n a quantidade de números de n dígitos, usando apenas 1, 2, 3, 4 ou 5, não apresentando os blocos de dígitos consecutivos 22, 33 e 44. Determine uma relação de recorrência envolvendo x_n.

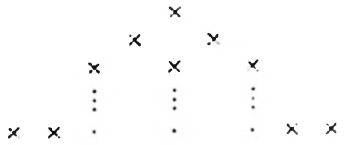
14) Mostre que existem 2^{n-1} maneiras de arranjar os inteiros 1, 2, ..., n em uma linha de modo que, exceto pelo primeiro, todo número difere do número imediatamente à sua esquerda por + 1 ou − 1.

15) Seja A = (1, 2, ..., n). Dada a função $f:A \to A$, suponha que a_n é o número de funções f injetoras tais que $f(f(x)) = x$, $\forall x \in A$. Determine uma relação de recorrência da sequência a_n.

16) Denotemos por B(n) o número de partições de n em partes que são potências de 2. Por exemplo, B(6) = 6, porque:
1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = = 1 + 1 + 2 + 2 = 1 + 1 + 4 = 2 + 2 + 2 = = 4 + 2.
Prove que:
a) B(2n + 1) = B(2n) para todo n ≥ 1;
b) B(2n) = B(2n − 2) + B(n) para todo n ≥ 1;

Exercícios de Olimpíada

17) (Canadá-90) Um conjunto de $\frac{n(n+1)}{2}$ números distintos são escritos de forma aleatória em um arranjo triangular.



Seja M_k o maior número na k-ésima coluna, contada desde o topo. Determine a probabilidade que, para n ≥ 3:

$$M_1 < M_2 < M_3 < \ldots < M_n.$$

18) (Itália-96) Dado o alfabeto com três letras a, b, c, encontre o número de palavras com n letras contendo um número par de a's.

19) (Noruega-96) Quantas contas de banco de 11 dígitos existem usando apenas os dígitos 1 e 2, tais que não ocorram dois 1's consecutivos?

20) (OBM-99) José tem três pares de óculos, um magenta, um amarelo e um ciano. Todo dia de manhã ele escolhe um ao acaso, tendo apenas o cuidado de

nunca usar o mesmo que usou no dia anterior. Se dia primeiro de agosto ele usou o magenta, qual a probabilidade de que dia 31 de agosto ele volte a usar o magenta?

21) (Bélgica-97) Considere todos os inteiros consistindo de n dígitos, cada um escolhido do conjunto {1, 2, 3, 4}, tais que nenhum dígito 3 aparece à direita de um dígito 4. Por exemplo, quando n = 6, os inteiros 123314 e 113424 satisfazem, enquanto que 114234 não. Seja a_n o número de tais inteiros com n dígitos. Que expressão vale para todo n ∈ IN?

a) $a_{n+1} = 4a_n - 1$
b) $a_{n+1} = 4a_n - 6^{n-1}$
c) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 6a_n$
d) $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3(a_n)/2$
e) $a_{n-1} = 3a_n + 3^n$

22) (Irlanda-97) Seja S o conjunto de todos os números naturais n satisfazendo as seguintes condições:
(a) n possui 1000 dígitos;
(b) todos os dígitos de n são ímpares;
(c) o valor absoluto da diferença entre dois dígitos adjacentes de n é 2.
Determine o número de distintos elementos de S.

23) (Áustria-87) Considere um alfabeto consistindo de 3 letras: *a*, *b* e *c*. Quantas palavras de n letras existem com as seguintes propriedades:
i) a palavra inicia e termina com a letra *a*;
ii) posições vizinhas devem ser ocupadas por letras distintas.

24) (Hungria/Israel-97) Quantas sequências distintas de tamanho 1997 podem ser formadas usando cada uma das letras A, B, C um número ímpar de vezes (e nenhuma outra)?

25) (OBM-10) Diamantino gosta de jogar futebol, mas se jogar dois dias seguidos ele fica com dores musculares. De quantas maneiras Diamantino pode escolher em quais de dez dias seguidos ele vai jogar bola sem ter dores musculares? Uma maneira é não jogar futebol em nenhum dos dias.

26) (Romênia-98) Uma palavra de comprimento n é uma sequência ordenada $x_1x_2...x_n$, onde x_i é uma letra do alfabeto {a, b, c}. Denote por A_n o conjunto de palavras de comprimento n que não contém bloco x_ix_{i+1}, i = 1, 2, ..., n − 1, da forma aa ou bb e, por B, o conjunto de palavras de comprimento n nas quais nenhuma das subsequências $x_ix_{i+1}x_{i+2}$, i = 1, 2, ..., n − 2 contém todas as letras a, b, c. Prove que $|B_{n+1}| = 3|A_n|$.

27) (China-91) Seja a_n o número de inteiros positivos formados a partir dos dígitos 1, 3 e 4 e suja soma dos dígitos é igual a n. Determine uma relação de recorrência para a_n.

28) (AHSME-19) Calcule a quantidade de sequências de 0's e 1's de comprimento 19, iniciando com 0, terminando com 0, não contendo dois 0's consecutivos nem contendo três 1's consecutivos.
Dica: prove que $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$

29) (OBMU-07) Joãozinho joga repetidamente uma moeda comum e honesta. Quando a moeda dá cara ele

ganha 1 ponto, quando dá coroa ele ganha 2 pontos. Encontre a probabilidade (em função de n) de que Joãozinho em algum momento tenha exatamente n pontos.

30) (OBM-11) Esmeralda tem um círculo de cartolina dividido em n setores circulares, numerados de 1 a n, no sentido horário. De quantas maneiras Esmeralda pode pintar a cartolina, pintando cada setor com uma cor, tendo disponíveis k cores e de modo que quaisquer dois setores circulares vizinhos (isto é, que têm um segmento em comum como fronteira) tenham cores diferentes? Note que isso implica que os setores de números 1 e n devem ter cores diferentes.

31) (OBM-05) No campeonato tumboliano de futebol, cada vitória vale três pontos, cada empate vale um ponto e cada derrota vale zero ponto. Um *resultado* é uma vitória, empate ou derrota. Sabe-se que o Flameiras não sofreu nenhuma derrota e tem 20 pontos, mas não se sabe quantas partidas esse time jogou. Quantas sequências ordenadas de resultados o Flameiras pode ter obtido? Representando vitória por V, empate por E e derrota por D, duas possibilidades, por exemplo, são (V, E, E, V, E, V, V, V, E, E) e (E, V, V, V, V, V, E, V).

32) (IMC-20) Seja n um inteiro positivo. Calcule o número de palavras w (sequência finita de letras) que satisfazem todas as seguintes três propriedades:
(1) w consiste de n letras, todas do alfabeto {a, b, c, d};
(2) w contem de um número par de letras a;
(3) w contem um número par de letras b.
Por exemplo, para n = 2 existem 6 palavras: aa, bb, cc, dd, cd e dc.

33) (AMC-07) Chamamos um conjunto de inteiros de *espaçoso* se ele contém no máximo um entre três inteiros consecutivos. Quantos subconjuntos de {1, 2, 3, ..., 12}, incluindo o conjunto vazio, são *espaçosos*?
a) 121 b) 123 c) 125
d) 127 e) 129
Dica: prove que $a_{n-1} = a_n + a_{n-2}$

34) (AMC-10) Todo os dias na escola João sobe uma escada de 6 degraus. João pode subir de uma vez 1, 2 ou 3 degraus. Por exemplo, João pode subir 3 degraus, então 1 degrau e depois 2 degraus. De quantas maneiras João pode subir a escada?
a) 13 b) 18 c) 20 d) 22 e) 24

35) (AIME-08) Considere sequências consistindo inteiramente de A's e B's e que possuem a propriedade que todos os blocos de A's consecutivos têm comprimento par e todos os blocos de B's consecutivos têm tamanho impar. Exemplos de tais sequências: AA, B e AABAA, enquanto que BBAB não pertence à sequência. Quantas de tais sequências possuem comprimento 14?
Dica: prove que $a_n = 2a_{n-2} + a_{n-3} - a_{n-4}$

O PRINCÍPIO DAS GAVETAS

Conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet ou como Princípio das Casas dos Pombos (PCP) é uma poderosa ferramenta para determinar a existência (ou não) de conjuntos satisfazendo certas propriedades. O enunciado mais clássico é:

"Se n objetos forem colocados em, no máximo, n – 1 gavetas então pelo menos uma delas conterá pelo menos dois objetos."

Porém, este enunciado pode ser generalizado:

"Se n objetos forem colocados em, no máximo, m gavetas e $n = m.q + r$, onde $q \in \mathbb{N}^*$ e $r \in \mathbb{N}^*$, então pelo menos uma delas conterá pelo menos m + 1 objetos."

Por exemplo, tome 13 pessoas. Como existem 12 meses em um ano, é possível afirmar que duas dessas 13 pessoas nasceram no mesmo mês do ano. Do mesmo modo, pode-se garantir que entre 49 pessoas existem pelo menos 5 que nasceram no mesmo mês, uma vez que $49 = 4.12 + 1$. A forma mais simples de compreender as conclusões do Princípio das Gavetas é pensar de forma mais uniforme possível. No último exemplo, coloque 4 pessoas em cada um dos 12 meses do ano, completando 48 pessoas. A próxima pessoa vai fazer um mês ter pelo menos 5 pessoas fazendo aniversário. Note que o Princípio das Gavetas apenas garante uma quantidade mínima com certa propriedade. Nada impede que todos os elementos do conjunto tenham essa propriedade. Por exemplo, nada impede que 49 pessoas tenham nascido no mesmo mês. Entretanto isso é contar com a sorte, não é possível cravar que isso sempre vai acontecer. O que sempre vai acontecer é pelo menos 5 das 49 tendo nascido no mesmo mês.

O leitor vai perceber que, apesar do enunciado simples, muitas das situações que envolvem a aplicação do Princípio das Gavetas são bastante avançadas, como pode ser constatado nos exercícios resolvidos.

Exercícios Resolvidos

1) Mostre que se um subconjunto com $n + 1$ elementos é escolhido do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ então este subconjunto necessariamente contém um par de números primos entre si.

Solução:

Sabemos que dois inteiros consecutivos são primos entre si.

Podemos separar os 2n inteiros da seguinte forma: $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}, \{7, 8\}, \ldots, \{2n - 1, 2n\}$ onde temos n conjuntos. Quando escolhemos n + 1 elementos, pelo menos 2 são do mesmo conjunto, implicando que são primos entre si.

2) Mostre que em qualquer coleção de n inteiros há um subconjunto cuja soma dos elementos é divisível por n.

Solução:

Podemos separar os n inteiros $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ da seguinte forma:

a_1

$a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 + a_3$

.....

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Se um destes somatórios for divisível por n, então acabou o problema.

Caso nenhum destes somatórios seja divisível por n, temos n – 1 restos de divisão por n que estes termos podem assumir. Como temos n somatórios e n – 1 restos possíveis, teremos dois somatórios com mesmo resto quando dividido por n.

Subtraindo estes dois somatórios obteremos um somatório que é divisível por n e da forma $a_j + a_{j+1} + \ldots + a_n$

3) Mostre que entre sete inteiros positivos distintos menores do que 127 podemos escolher um par, digamos x, y, tal que $1 < \frac{y}{x} \leq 2$.

Solução:

Notemos inicialmente que $2^7 = 128 = 127 + 1$.

Podemos dividir os 126 números de 1 até 126 da seguinte forma:

$$\{1, 2\},\ \{3, 4, 5, 6\},\ \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\},\ \{15, 16, \ldots, 30\},$$
$$\{31, 32, \ldots, 62\},\ \{63, 64, \ldots, 126\}$$

Como temos 6 conjuntos e 7 inteiros para escolher, teremos pelo menos 2 números, digamos x e y, de um mesmo conjunto. É imediato para estes dois números do mesmo conjunto, admitindo y > x, que ocorre $1 < \frac{y}{x} \leq 2$.

4) Mostre que dados 17 números naturais é possível escolher 5 deles cuja soma seja divisível por 5.

Solução:

Divida todos os 17 números por 5 e anote o resto. Se entre os 17 números existirem todos os cinco restos da divisão por 5 (0, 1, 2, 3, 4) então basta pegar um número de cada resto que a soma destes cinco números vai ser divisível por 5:

$$5q_1 + 0 + 5q_2 + 1 + 5q_3 + 2 + 5q_4 + 3 + 5q_5 + 4 = 5(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + 2)$$

Suponhamos agora que um dos restos não esteja presente. Assim, sobram quatro restos possíveis.

Como $17 = 4.4 + 1$, então entre os 17 números há 5 que deixam o mesmo resto na divisão por 5. A soma destes 5 números é divisível por 5:

$$5q_1 + r + 5q_2 + r + 5q_3 + r + 5q_4 + r + 5q_5 + r = 5(q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + r)$$

5) (Olimpíada do Rio Grande do Norte-98) Durante o ano de 1998, uma pequena livraria, que abria nos sete dias da semana, vendeu no mínimo um livro por dia e um total de 600 livros no ano todo. Diga, justificando, se existiu, obrigatoriamente, um período de dias consecutivos onde foram vendidos exatamente 129 livros.

Solução:

Seja a_i o total acumulado de livros vendidos até o final do i-ésimo dia.

Por exemplo: a_5 = total vendidos até o quinto dia e $a_{35} - a_{31}$ = total de livros vendidos entre os dias 35 e 32 (inclusive).

Então: $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{364} < a_{365} = 600$ (1)

Resta analisar se existem a_i, a_j ($i, j \in \mathbb{N}$ menores que 365, $j > i$) tais que $a_j - a_i = 129$

Somemos agora a cada termo de (1) o valor 129:

$a_1 + 129 < a_2 + 129 < a_3 + 129 < \ldots < a_{364} + 129 < a_{365} + 129 = 729$

Chamemos estes termos de b_i ($b_i = a_i + 129$): $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots < b_{364} < b_{365} = 729$

Temos então 730 termos, sendo 365 termos a_i e 365 termos b_i, com $a_i \neq a_j$ ($i \neq j$) e $b_p \neq b_k$ ($p \neq k$).

Notemos que estes 730 termos naturais estão entre 1 e 729, ou seja, existem dois valores iguais (princípios das casas dos pombos ou Princípio das Gavetas de Dirichet) entre estes 730 termos. Como cada a_i é distinto e cada b_i é distinto, então existe um a_m que é igual a um b_n:

$$a_m = b_n \Rightarrow a_m = a_n + 129 \Rightarrow a_m - a_n = 129$$

Que prova que existe um período de dias consecutivos ($m - n$ dias) onde foram vendidos exatamente 129 livros.

6) (Olimpíada da Argentina-95) Demonstrar que entre 50 números inteiros positivos menores ou iguais que 100 sempre pode-se eleger alguns (eventualmente um) de modo que sua soma seja um quadrado perfeito.

Solução:

Podemos organizar os números da seguinte forma: {1, 99}, {2, 98}, {3, 97}, {4, 96}, ..., {36, 64}, ..., {49, 51}, {50, 100} onde temos 50 pares de números.

Caso sejam escolhidos dois números de um mesmo par então basta somar estes dois que a soma é $100 = 10^2$. Caso seja escolhido exatamente um número de cada par (totalizando 50 no total), teremos escolhido 1 número do par {36, 64}, sendo este número um quadrado perfeito.

7) (International Talent Search) Seja A um subconjunto de {1, 2, 3, ..., 106}, consistindo de 16 elementos, e tal que não existam dois elementos diferindo por 6, 9, 12, 15, 18 ou 21. Prove que dois elementos de A devem diferir por 3.

Solução:

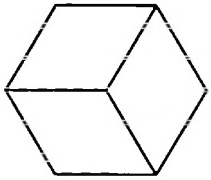
Sejam os conjuntos:

A = {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28, 31, 34, 37, 40, 43, 46, 49, 52, 55, 58, 61, 64, 67, 70, 73, 76, 79, 82, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 106}

B = {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74, 77, 80, 83, 86, 89, 92, 95, 98, 101, 104}
C = {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 37, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 105}
Como 16 = 3.5 + 1, temos que em um dos 3 conjuntos teremos pelo menos 6 números a serem escolhidos, que não podem ter como diferença 6, 9, 12, 15, 18 ou 21.
Como dentro de cada conjunto os elementos diferem por múltiplos de 3, teremos que a diferença entre os números deve ser igual a 3 ou um múltiplo de 3 maior ou igual a 24. Como 1 + 5.24 = 121 > 106, não é possível escolher somente números cuja diferença seja 24 ou mais, implicando que obrigatoriamente teremos números escolhidos cuja diferença é 3.

8) (Olimpíada do México) Considere um tabuleiro 10×13 e 3 cores com as quais deve-se pintar cada casa do tabuleiro. Demonstre que existem 4 casas de uma mesma cor que são vértices de um retângulo de lados paralelos as linhas do tabuleiro.
Solução:
Designemos que 10 corresponde ao número de colunas e 13 ao de linhas
Como há 13 casas em cada coluna e 3 cores, e sendo 13 = 3.4 + 1, então em cada coluna existem pelo menos 5 casas com a mesma cor. Designemos cada coluna com esta cor predominante.
Como temos 10 colunas e 3 cores, e sendo 10 = 3.3 + 1, então existem pelo menos 4 colunas com a mesma cor predominante.
Digamos que esta cor seja verde. Desta forma, existem pelo menos 4 colunas em que a cor predominante (que ocorre em pelo menos 5 casas) é verde.
Vamos considerar de agora em diante somente estas 4 colunas. Suponhamos que nas 3 primeiras não temos um retângulo com vértices nas casas verdes.
Na primeira coluna temos pelo menos 5 casas verdes.
Na segunda coluna teremos no máximo uma casa verde ao lado de uma casa verde da primeira coluna.
Na terceira coluna teremos no máximo uma casa verde na mesma horizontal de uma casa verde da primeira coluna e outra casa verde da segunda coluna.
Assim, temos 5 + 4 + 3 = 12 horizontais ocupadas com casa verdes.
Como temos 13 horizontais possíveis, teremos certamente 2 casas verdes na quarta coluna que estão na mesma horizontal que 2 casas verdes de alguma das três primeiras colunas, formando um retângulo com vértices todas da mesma cor.

9) (Olimpíada do México-92) Considere 7 pontos dentro ou sobre um hexágono regular e prove que três deles formam um triângulo cuja área é menor ou igual a 1/6 da área do hexágono.
Solução:
Inicialmente dividimos o hexágono da seguinte forma:



Como temos 7 pontos e 3 regiões menores, então pelo menos 3 pontos pertencer a uma mesma região.
Notemos que dentro de cada região, a maior área que estes 3 pontos podem formar corresponde à metade da área da região. Como cada região possui área igual a S/3, então temos que $A \leq (S/3)/2 \Rightarrow A \leq S/6$

10) Os números de 1 a 10 são escritos, de ordem aleatória, em torno de uma circunferência. Mostre que existem 3 números consecutivos cuja soma é menor que 17.

Solução:

A soma total dos números é $1 + 2 + \ldots + 10 = 55$.
Separemos agora todos os ternos de números consecutivos e somemos todos eles. Como cada número aparece em 3 ternos, temos que a soma dos números associados aos termos é igual a $3.55 = 165$.
Como podemos separar 10 ternos e $165 = 10.17 - 5$, então algum terno possui soma menor que 17.

11) Quinze cadeiras estão colocadas ao redor de uma mesa circular e sobre esta estão colocados, em frente a cada uma das cadeiras, os nomes de 15 convidados. Ao chegarem, os convidados não percebem isto e nenhum senta-se em frente ao seu nome. Prove que a mesa pode ser girada de forma que pelo menos dois convidados fiquem corretamente sentados.

Solução:

Seja x_i o número de acertos, ou seja, o número de vezes, que em cada giro, uma pessoa senta na frente de seu nome. Notemos que podemos dar um total de 14 giros, pois a situação inicial já é um giro, e para a situação inicial $x_1 = 0$. Notemos também que a soma dos acertos ($S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{15}$) é igual a 15, pois para cada pessoa temos, em um giro qualquer, exatamente um acerto.
Desta forma, se tivéssemos $x_i = 0$ ou 1 ($1 \leq i \leq 15$) então $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{15} \leq 14$, que é um absurdo, pois $S = 15$. Assim, um dos x_i é maior ou igual a 2, implicando que algum giro pelos menos dois convidados fiquem corretamente sentados.

12) Prove que em qualquer conjunto de 52 inteiros existe um par de inteiros cuja soma ou cuja diferença é divisível por 100.

Solução:

Podemos escrever todos os inteiros de uma das 51 seguintes formas:
$100k,\ 100k \pm 1,\ 100k \pm 2,\ 100k \pm 3,\ 100k \pm 4,\ \ldots,\ 100k \pm 49,\ 100k \pm 50$
Deste modo, em um conjunto de 52 inteiros existem pelo menos dois (digamos n_1 e n_2) que podem ser escritos da forma $100k \pm r$.
Se $n_1 = 100k_1 + r$ e $n_2 = 100k_2 + r \Rightarrow 100 \mid n_1 - n_2$
Se $n_1 = 100k_1 - r$ e $n_2 = 100k_2 - r \Rightarrow 100 \mid n_1 - n_2$

Se $n_1 = 100k_1 + r$ e $n_2 = 100k_2 - r \Rightarrow 100 \mid n_1 + n_2$
Se $n_1 = 100k_1 - r$ e $n_2 = 100k_2 + r \Rightarrow 100 \mid n_1 - n_2$

13) Considere 9 pontos de coordenadas inteiras no R^3. Mostre que o ponto médio de um dos segmentos de reta definidos por estes pontos também tem coordenadas inteiras.

Solução:

Sejam $P_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3, ..., 9$, cada um dos 9 pontos no R^3.

Sejam $M_{ij} = ((x_i + x_j)/2, (y_i + y_j)/2, (z_i + z_j)/2)$, $i \neq j$, $i = 1, 2, ..., 9$, $j = 1, 2, ..., 9$, os pontos médios.

Evidentemente, cada coordenada de M_{ij} não será inteira se as respectivas coordenadas de P_i e P_j possuirem paridade diferente.

Analisemos inicialmente a paridade de todos os x_i.

Como existem 9 pontos então pelo menos 5 deles possuem a mesma paridade para x_i, implicando que $(x_i + x_j)/2$ seja inteiro. Dentre estes 5 pontos existem pelo menos 3 com a mesma paridade para y_i, implicando que $(y_i + y_j)/2$ seja inteiro.

Finalmente, dentre estes últimos 3 pontos que possuem a mesma paridade para x_i e y_i, temos que pelo menos 2, P_n e P_m, possuem a mesma paridade também para y_i. Assim, o ponto médio do segmento $P_nP_m = ((x_n + x_m)/2, (y_n + y_m)/2, (z_n + z_m)/2)$ possui todas as coordenadas inteiras.

14) (IMO-64) 17 pessoas se correspondem por carta com as outras pessoas – cada pessoa com todas as outras. Em suas cartas somente 3 assuntos são discutidos. Cada par de pessoas trocam correspondências sobre apenas um assunto. Prove que existem pelo menos 3 pessoas que escreveram cartas para cada outra discutindo sobre um mesmo assunto.

Solução:

Analisemos uma das pessoas que, claramente, escreveu para as outras 16 pessoas.

Como temos 3 assuntos e $16 = 3.5 + 1$, então esta pessoa escreveu sobre um mesmo assunto (digamos assunto A) para pelo menos 6 outras. Se uma dessas 6 pessoas escreveu para outra dentre essas 6 uma carta sobre o assunto A então teremos um grupo de 3 pessoas que discutiram o mesmo assunto.

Vamos assumir, então, que cada uma dessas 6 pessoas escreveu para as outras 5 sobre os dois outros assuntos (assuntos B e C). Como cada pessoa deste grupo escreveu para outras 5 e $5 = 2.2 + 1$, então um dos 2 assuntos (B ou C) foram discutidos por pelo menos 3 pessoas. Se duas pessoas destas 3 escreveram para outra discutindo, por exemplo, o assunto B, então teremos um grupo de 3 discutindo o mesmo assunto. Por outro lado, se estas duas pessoas escreveram para as outras do grupo sobre o assunto C, então teremos um grupo de 3 discutindo o mesmo assunto.

15) (Olimpíada de Santa Catarina-12) Verifique que, para todo número natural não nulo n, existe um número natural x da forma x = 111...1000...0, tal que n é um divisor de N.

Solução:

Inicialmente vamos fazer a divisão por n dos primeiros n + 1 números formados apenas pelo algarismo 1.

$1 = n.q_1 + r_1$

$11 = n.q_2 + r_2$

$111 = n.q_3 + r_3$

...

$111...1 = n.q_{n+1} + r_{n+1}$

Como existem n restos possíveis na divisão por n e há n + 1 restos r_i nas expressões acima, conclui-se que há dois restos iguais: $r_i = r_j = r$, $i > j$. Subtraindo essas duas expressões com restos iguais:

$$\underbrace{111...1}_{i} - \underbrace{111...1}_{j} = n.q_i + r - nq_j + r = n(q_i - q_j) \Rightarrow n \mid \underbrace{111...1}_{i-j}\underbrace{000...0}_{j}.$$

16) (Olimpíada do Pará-01) Um pacote com 100 bombons deve ser dividido entre 15 garotos.

a) Prove que existem dois garotos que receberam a mesma quantia de bombons.

b) Qual o número mínimo de bombons no pacote, de modo que, depois divididos entre os 15 garotos, é possível que não existam dois garotos que receberam a mesma quantia de bombons.

Obs: Considere que algum garoto pode receber zero bombons.

Solução:

a) Vamos tentar fazer uma distribuição utilizando a menor quantidade de bombons possível:

garoto 1: recebe 0 bombons — garoto 2: recebe 1 bombom

garoto 3: recebe 2 bombons — garoto 4: recebe 3 bombons

..... — garoto 14: recebe 13 bombons

Somando a quantidade de bombons já distribuída, temos um total de 91 bombons, implicando que ainda existem 9 bombons para serem distribuídos e ainda temos o garoto 15 que ainda não recebeu bombons. Porém, como 9 < 14, este último garoto vai necessariamente receber uma quantidade de bombons que é igual a uma quantidade já distribuída para algum dos outros garotos.

b) Para fazer com que este garoto 15 receba uma quantidade de bombons diferente de qualquer quantidade já distribuída (que são os inteiros 0, 1, 2, ..., 13), devemos dar pelo menos 14 bombons para este último garoto, implicando que seriam necessários no mínimo 91 + 14 = 105 bombons no total.

Exercícios de Vestibular

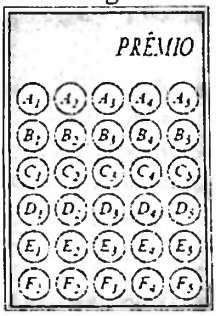
1) (UFPE-04) Qual o número mínimo de pessoas que devem fazer parte de um grupo, para que se possa garantir que existam, pelo menos, 7 pessoas do grupo nascidas no mesmo mês?

2) (UFRJ-02) Um saco contém 13 bolinhas amarelas, 17 cor-de-rosa e 19 roxas. Uma pessoa de olhos vendados retirará do saco n bolinhas de uma só vez. Qual o menor valor de n de forma que se possa garantir que será retirado pelo menos um par de bolinhas de cores diferentes?

3) (Insper-02) Numa caixa de bombons existem somente 20 bombons de licor, 15 bombons de cereja e 10 bombons de uva. Qual a quantidade mínima de bombons que uma pessoa deve retirar da caixa, sem observar o sabor na embalagem, para ter certeza que retirou da caixa dois bombons de mesmo sabor?
a) 6 b) 5 c) 4 d) 3 e) 2

4) (Insper-04) Um indivíduo é dito magnético se e somente se para qualquer conjunto de dez pessoas que o conhecem, existe no conjunto pelo menos uma pessoa que simpatiza com ele. Se exatamente 100 pessoas conhecem um indivíduo, para que ele seja magnético
a) é suficiente que dentre as 100 pessoas que conhecem o indivíduo, pelo menos 10 simpatizem com ele.
b) é necessário e suficiente que dentre as 100 pessoas que conhecem o indivíduo, pelo menos 51 simpatizem com ele.
c) é suficiente que dentre as 100 pessoas que conhecem o indivíduo, pelo menos 90 simpatizem com ele.
d) é necessário e suficiente que dentre as 100 pessoas que conhecem o indivíduo, pelo menos 91 simpatizem com ele.
e) é necessário que as 100 pessoas que conhecem o indivíduo simpatizem com ele.

5) (Insper-04) Para aumentar as vendas de um determinado produto, seu fabricante introduziu na embalagem de todas as unidades a serem vendidas um cartão do tipo "raspadinha". Em cada um destes cartões, estão desenhados um retângulo e trinta círculos. No retângulo, está omitido, por uma tinta escura, o nome do prêmio a que o consumidor irá concorrer. Cada um dos 30 círculos esconde um inteiro n, com $0 < n < 21$, conforme ilustra a figura ao lado.



Para justificar a troca do cartão pelo prêmio indicado é necessário e suficiente que uma das seguintes condições seja satisfeita:
(I) a soma dos números de todos os círculos raspados seja exatamente 21;
(II) do conjunto dos números representados nos 30 círculos do cartão não exista subconjunto cuja soma dos elementos resulte 21. Chamaremos os

cartões deste tipo de obrigatoriamente premiados.
É correto afirmar que
a) em qualquer cartão existem pelo menos dois círculos com o mesmo número.
b) uma condição necessária para que um cartão seja obrigatoriamente premiado é que todos os círculos contenham números pares.
c) uma condição suficiente para que um cartão seja obrigatoriamente premiado é que todos os círculos contenham números ímpares.
d) uma condição necessária para que um cartão seja obrigatoriamente premiado é que todos os círculos contenham números menores do que 10.
e) em qualquer cartão existem no máximo nove círculos com mesmo número.

6) (Insper-04) No pátio de uma oficina mecânica existem 12 carros para serem consertados. Os cinco mecânicos desta oficina têm uma estranha maneira de trabalhar: eles se sentam ao redor de uma mesa, sorteiam entre si uma dupla de mecânicos que irá consertar um dos carros quebrados do pátio, enquanto os outros três ficarão esperando. Depois que a dupla sorteada finaliza o carro que lhe foi destinado, os dois mecânicos que a compunham voltam para a mesa e é feito um novo sorteio, até que todos os carros estejam consertados. É correto afirmar que
a) no máximo duas duplas irão consertar mais do que um carro.
b) existe pelo menos uma dupla que não será sorteada.
c) cada um dos mecânicos será sorteado pelo menos uma vez.
d) pelo menos uma dupla irá consertar mais do que um carro.
e) todas as possíveis duplas consertarão pelo menos um carro.

7) (Insper-05) Numa empresa há 4 diretores. Cada projeto realizado nesta empresa deve ser comandado por uma comissão formada por dois diretores. Se 7 projetos estiverem programados para o próximo ano, então
a) todos os diretores participarão da comissão de algum projeto.
b) pelo menos um diretor participará das comissões de 4 projetos.
c) dois diretores irão participar das comissões de 3 projetos e os outros dois irão participar das comissões de 4 projetos.
d) pelo menos um projeto terá uma comissão de 3 diretores.
e) nenhum diretor deverá participar das comissões de mais de 4 projetos.

8) (Insper-07) Um banco opera em 20 estados brasileiros, com pelo menos 120 agências em cada estado, cada uma com pelo menos 1.000 clientes. Cada cliente deve ter uma senha de acesso, composta por seis dígitos numéricos. É correto afirmar que
a) é possível que todos os clientes tenham senhas de acesso distintas.
b) pelo menos três clientes têm senhas iguais.
c) no máximo dois clientes têm senhas iguais.
d) todas as possíveis senhas já foram usadas por pelo menos um cliente.

e) num mesmo estado, não podem existir clientes com a mesma senha.

9) (Insper-09) Uma empresa possui 1.000 funcionários. No último ano, foram realizadas 2.000 reuniões internas nessa empresa (ou seja, reuniões em que todos os participantes são funcionários). Assim, é correto concluir que nesse ano, necessariamente,
a) todos os funcionários da empresa participaram de no mínimo duas reuniões internas.
b) houve funcionários da empresa que participaram de uma única reunião interna.
c) houve reuniões internas na empresa com apenas dois participantes.
d) houve no mínimo duas reuniões internas na empresa com números de participantes diferentes.
e) houve no mínimo duas reuniões internas na empresa com o mesmo número de participantes.

10) (Insper-09) Em uma repartição pública, 112 pastas são guardadas em 15 arquivos, cada arquivo com capacidade para até 200 pastas. Considere a proposição:
"algum arquivo tem n pastas"
O maior valor de n, que torna essa proposição verdadeira, para qualquer distribuição das pastas é:
A) 2 B) 3 C) 6 D) 8 E) 9

11) (Insper-14) Desde o dia da partida inaugural até o dia da final de um torneio de futebol, terão sido transcorridos 32 dias. Considerando que serão disputados, ao todo, 64 jogos nesse torneio, pode-se concluir que, necessariamente,
a) ocorrerão duas partidas por dia no período de disputa do torneio.
b) haverá um único jogo no dia em que for disputada a final.
c) o número médio de jogos disputados por equipe será, no máximo, 2.
d) ocorrerá pelo menos um dia sem jogos no período de disputa do torneio.
e) haverá duas partidas do torneio que ocorrerão no mesmo dia.

12) (Insper-16) Uma urna contém 20 fichas, numeradas de 1 a 20. O menor número de fichas que devemos retirar dessa urna para termos certeza de que três das fichas retiradas estejam marcadas com três números consecutivos é igual a
a) 11. b) 14. c) 15. d) 16. e) 18.

13) (UnB) Em um concurso em que a prova constava de 25 questões de múltipla escolha com 5 opções por questão, compareceram 23.127 candidatos. Considere a afirmação: pelo menos dois candidatos responderam de modo idêntico às K primeiras questões da prova. Determine o maior valor de K para o qual esta afirmação é verdadeira. Exclua as possibilidades:
a) de o candidato deixar questão em branco;
b) de o candidato marcar mais de uma opção por questão.

14) (FGV-05) Uma escola possui 2600 alunos que nasceram em anos de 365 dias. O número mínimo desses alunos da escola que faz aniversário no mesmo dia (e mês) de um outro aluno da escola, e que nasceu no mesmo dia da semana é
a) 36. b) 38. c) 42. d) 46. e) 54.

15) (Fundação Casa-13) Para a preparação de eventos e festividades na Fundação CASA, organizam-se reuniões. Sobre uma dessas reuniões, contendo 15 pessoas, é correto afirmar que, necessariamente, há
a) duas mulheres.
b) mais de cinco homens.
c) duas pessoas com a mesma idade.
d) pessoas que aniversariam no mesmo mês.
e) pessoas com o mesmo número de fios de cabelo.

16) (IME-78) Mostre que, em toda reunião constituída de seis pessoas, uma das hipóteses necessariamente ocorre (podendo ocorrer ambas):
I) Existem três pessoas que se conhecem mutuamente (isto é, das três cada duas se conhecem).
I) Existem três pessoas que se esconhecem mutuamente (isto é, das rês cada duas se desconhecem).

17) (IME-01) Prove que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo (algarismo das unidades).

18) (IME-00) Considere quatro números inteiros *a, b, c* e *d*. Prove que o produto: $(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$ é divisível por 12.

Exercícios Gerais

19) Que número mínimo de participantes deve ter a Olimpíada Brasileira de Matemática para que se tenha certeza de que existem dois participantes naturais do mesmo estado fazendo aniversário no mesmo dia?

20) Prove que, para todo conjunto de 5 pontos no interior de um quadrado de lado 2, pode-se escolher 2 de modo que a distância entre eles é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

21) Dezenove flechas são arremessadas sobre um alvo com o formato de um hexágono regular de lado 1. Mostre que duas destas flechas estão a uma distância de no máximo $\frac{\sqrt{3}}{3}$ uma da outra.

22) Prove que, entre 7 reais $y_1, y_2, ..., y_7$, podemos escolher y_i e y_j $(i \neq j)$, tais que $0 \leq \frac{y_i - y_j}{1 + y_i y_j} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

23) a) Dado um conjunto de 101 inteiros positivos, nenhum dos quais excede 200, mostre que pelo menos um membro deste conjunto deve dividir outro membro do conjunto.
b) Construa um conjunto de 100 inteiros positivos, menores ou iguais a 200, tal que nenhum membro deste conjunto divida outro membro do conjunto.
c) Prove que se escolhermos 100 elementos do conjunto {1, 2, ..., 200} e um deles for menor que 16, então pelo menos um membro deste subconjunto deve dividir outro membro do conjunto.

24) Durante um treinamento um jogador de xadrez joga pelo menos uma vez por dia e não mais do que 12 dias por semana. Prove que há um período de dias

consecutivos no qual ele joga exatamente 20 vezes.

25) Prove que qualquer conjunto formado por sete inteiros positivos menores ou iguais a 24 possui dois subconjuntos de mesma soma.

26) Cinco pontos distintos, todos de coordenadas (x, y) inteiras, são dados em um plano. Prove que é possível selecionar dois destes pontos de modo que seu ponto médio possua coordenadas inteiras.

27) Uma caixa contem 10 livros de Francês, 20 livros de Espanhol, 8 livros de Alemão, 15 livros de Russo e 25 livros de Italiano. Quantos livros devem ser retirados da caixa (sem reposição) de modo que possamos garantir que foram retirados pelo menos 12 livros de uma mesma língua.

28) Prove que se existem 5 pontos no interior de um triângulo equilátero de 1, então é possível escolher 2 de tal modo que a distância entre eles é menor que 1/2.

29) Suponha que temos 27 números positivos ímpares menores que 100. Mostre que existe um par de números cuja soma é 102.

30) Um paciente deve tomar 48 pílulas em 30 dias, tomando pelo menos uma pílula por dia. Demonstre que existe uma sequência de dias durante os quais ele toma exatamente 11 pílulas.

31) a) Prove que existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível por 1997.
b) Prove que existe uma potência de 3 que termina em 001.

32) Cada uma de um total 9 retas em um plano corta um quadrado (que também pertence ao plano) em dois quadriláteros cujas áreas estão na proporção 2:3. Prove que ao menos 3 destas retas devem passar por um mesmo ponto.

33) Uma cidade possui 10000 diferentes linhas de telefone, numeradas por número de 4 dígitos. Mais da metade das linhas telefônicas estão localizadas no centro da cidade. Prove que existem dois números de telefone no centro cuja soma é também o número de outra linha de telefone no centro.

34) Dados 10 inteiros positivos $a_1, a_2, ..., a_{10}$, mostre que existem números $x_i \in \{+1, 0, -1\}$ $(i = 1, 2, ..., 10)$, não todos nulos, tais que a soma $x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3 + x_4a_4 + x_5a_5 + x_6a_6 + x_7a_7 + x_8a_8 + x_9a_9 + x_{10}a_{10}$ é divisível por 100.

35) Dados 1000 inteiros, prove que existem dois deles cuja soma ou subtração é um múltiplo de 1997.

36) Sejam $a_1 < a_2 < ... < a_{44}$ inteiros positivos não excedendo 125. Prove que entre 43 diferenças consecutivas $d_i = a_{i+1} - a_i$, algum valor deve ocorrer ao menos 10 vezes.

37) Numa gaveta há 6 meias pretas e 6 meias brancas. Qual é o número mínimo de meias a se retirar (no escuro) para garantir que:

a) As meias retiradas contenham um par da mesma cor?
b) As meias retiradas contenham um para de cor branca?

38) Mostre que se n é ímpar e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é uma permutação de 1, 2,..., n, então o produto $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\ldots(a_n - n)$ é par.

Exercícios de Olimpíada

39) (Sergipe-99) O professor Epaminondas, no primeiro dia de aula, apostou que, entre os alunos daquela classe, pelo menos dois fariam aniversário no mesmo dia do mês. O professor tinha certeza de que ganharia a aposta, pois naquela classe o número de alunos era maior ou igual a:
a) 15 b) 32 c) 28 d) 31 e) 30

40) (Rio Grande do Norte-17) Se numa sala existem 75 pessoas, o maior número natural k para o qual seja necessariamente verdadeira a seguinte afirmação:
"Existe um mês do ano em que pelo menos k dessas pessoas aniversariam".
é:
a) 9 b) 8 c) 13 d) 7 e) 10

41) (Rio Grande do Norte-95) Qual é o número mínimo de pessoas que deve haver num grupo para que possamos garantir que nele haja pelo menos 5 pessoas nascidas no mesmo mês?
a) 150 b) 50 c) 5^5 d) 49 e) 120

42) (Rio de Janeiro-98) 100 pessoas jogam a seguinte variação do jogo de bingo: Inicialmente, cada jogador escreve os números de 1 a 100 na ordem que desejar. Em seguida, o diretor do jogo sorteia sucessivamente os números de 1 a 100 em qualquer ordem. Cada jogador ganha 1 real por cada número de sua sequência que apareça na mesma posição na sequência sorteada. Sabendo que todos os participantes receberam quantias diferentes, prove que algum deles recebeu exatamente 100 reais.

43) (Rio Grande do Norte-19) Uma caixa contém 28 bolas vermelhas, 20 bolas verdes, 19 bolas amarelas, 13 bolas azuis, 11 bolas brancas e 9 bolas pretas. O número mínimo de bolas que devem ser retiradas da caixa, sem reposição, para garantir que pelo menos 15 bolas de uma mesma única cor sejam retiradas é:
a) 75 b) 76 c) 79 d) 84 e) 91

44) (OBM-97) Em uma urna há 28 bolas azuis, 20 bolas verdes, 12 bolas amarelas, 10 bolas pretas e 8 bolas brancas. Qual é o número mínimo de bolas que devemos sacar dessa urna para termos certeza que sacaremos pelo menos 15 bolas da mesma cor?
A) 58 B) 59 C) 60
D) 71 E) 72

45) (OBM-11) Qual é a maior quantidade de números do conjunto $\{1,2,3,\ldots,20\}$ que podemos escolher de modo que nenhum deles seja o dobro do outro?
A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

46) (OBM-99) Uma caixa contém 100 bolas de cores distintas. Destas, 30 são vermelhas, 30 são verdes, 30 são azuis e entre as 10 restantes, algumas são

brancas e outras são pretas. O menor número de bolas que devemos tirar da caixa, sem lhes ver a cor, para termos a certeza de haver pelo menos 10 bolas da mesma cor é:
A) 31 B) 33 C) 35 D) 37 E) 38

47) (OBM-00) Uma caixa contém 900 cartões, numerados de 100 a 999. Retiram-se ao acaso (sem reposição) cartões da caixa e anotamos a soma dos seus algarismos. Qual é a menor quantidade de cartões que devem ser retirados da caixa, para garantirmos que pelo menos três destas somas sejam iguais?
a) 51 b) 52 c) 53 d) 54 e) 55

48) (OBM-01) Em um tabuleiro retangular com 6 linhas e 9 colunas, 32 casas estão ocupadas. Podemos afirmar que:
a) Todas as colunas têm pelo menos 3 casas ocupadas.
b) Nenhuma coluna tem mais de 3 casas ocupadas.
c) Alguma coluna não tem casas ocupadas.
d) Alguma linha tem pelo menos 6 casas ocupadas.
e) Todas as linhas têm pelo menos 4 casas ocupadas.

49) (OBM-12) Em uma pesquisa de rua, cada entrevistado respondeu a quatro perguntas, podendo sua resposta ser *sim* ou *não*, para cada uma das perguntas. Qual o número mínimo de entrevistados para garantirmos que duas pessoas responderam igualmente a todas as perguntas?
A) 16 B) 17 C) 9 D) 5 E) 33

50) (Pará-10) Em uma urna existem 17 bolas numeradas de 1 a 17. Uma pessoa, sem olhar o interior da urna, passa a retirar ao acaso bolas da urna e depois anota em uma folha os números das bolas retiradas. As extrações ocorrem sem reposição, ou seja, após cada extração as bolas **não** são colocadas de volta à urna. Determine qual é o menor número de bolas que devem ser retiradas da urna para garantir que existam dois números anotados no papel que somem 18?

51) (International Talent Search) É possível separar aos pares os números 1, 2, 3, ..., 50 de tal maneira que a soma de cada par de números é um diferente número primo?

52) (México) Dos seguintes 34 números: 1, 4, 7, 10, 13, ..., 97, 100, elegem-se 19 deles. Demonstre que entre estes 19 sempre existem 2 cuja soma é 104.

53) (Bélgica-93) Em dezembro, durante as férias escolares, 20 colegas de classe enviam 10 cartões de Natal para 10 diferentes colegas (diferentes deles mesmos).
a) Mostre que pelo menos dois colegas de classe trocaram cartões.
b) Suponha que a classe possua n estudantes, cada um enviando m cartões de Natal para m diferentes (diferentes deles mesmos). Qual a relação entre n e m para que ao menos 2 estudantes tenham trocado cartões.

54) (Espanha-88) Quinze problemas, numerados de 1 a 15, são propostos em um certo exame, todos admitindo somente duas alternativas: verdadeiro ou

falso. Sabe-se que nenhum estudante respondeu corretamente a dois problemas consecutivos. Se 1600 candidatos participaram do teste, prove que ao menos dois dos alunos responderam o teste da mesma forma.

55) (Espanha-93) Em uma reunião existem 201 pessoas de 5 nacionalidades diferentes. Sabe-se que, em cada grupo de 6, ao menos duas tem a mesma idade. Demonstrar que existe ao menos 5 pessoas do mesmo país, da mesma idade e do mesmo sexo.

56) (Espanha-99) Uma caixa contem 900 bilhetes, numerados de 100 a 999. Retiram-se aleatoriamente (sem reposição) bilhetes da caixa e anota-se a soma dos dígitos de cada bilhete extraído. Qual é a menor quantidade de bilhetes que devem ser retirados, para garantir que ao menos três dessas somas sejam iguais?

57) (Inglaterra-98) Um guichê de rodoviária vende passagens de ônibus para 200 destinos. Em um dia, passagens foram vendidas para 3800 passageiros.
a) Mostre que: existem ao menos 6 destinos tal que o número de passageiros que desceram neste destino é o mesmo;
b) a afirmativa a) torna-se falsa se "6" for trocado por 7.

58) (Inglaterra-73) Nove pontos estão no interior de um quadrado de área 1. Prove que existe um triângulo de área $\leq 1/8$ tais que os vértices são três dos pontos.

59) (Inglaterra-71) É dado um conjunto de $n + 1$ inteiros positivos, nenhum deles excedendo $2n$. Prove que ao menos um dos membros do conjunto deve dividir outro membro do conjunto.

60) (Rio Grande do Norte-18) Dados quaisquer seis pontos sobre um círculo, demonstrar que sempre podemos encontrar dois deles cuja distância seja menor ou igual ao raio do círculo. Diga, justificando, se o resultado vale para o caso de somente cinco pontos.

61) (Índia-95) Prove que entre 18 inteiros consecutivos de 3 dígitos existe pelo menos um que é divisível pela soma dos seus dígitos.

62) (Leningrado-88) Um líder de um jogo e 30 jogadores escrevem, cada um, os números de 1 a 30 em alguma ordem. Então, o líder compara as sequências. Um jogador apaga algum número de sua lista toda vez que este número aparecer no mesmo lugar que ocupa na lista do líder. Depois de feitas todas as comparações, cada jogador fala em voz alta a quantidade de números que não foi apagada. Todos os valores falados são distintos. Prove que ao menos um dos jogadores possui uma sequência de números que é igual (mesma ordem) a sequência do líder.

63) (Geórgia-95) a) Cinco números distintos são escritos em uma linha. É sempre possível escolher 3 destes números de modo que estejam escritos de forma crescente ou decrescente?
É sempre possível fazer o mesmo, caso desejamos escolher quatro entre nove números distintos escritos em uma linha?

64) (Número de Ouro-98) Todos os vértices de um quadriculado 6x2 são coloridos de vermelho ou azul. Demonstre que podemos determinar algum retângulo com todos seus vértices da mesma cor.

65) (Japão Seletiva IMO-91) Suponha que A é um inteiro positivo de 16 dígitos. Mostre que é possível determinar alguns dígitos consecutivos de A tal que o produto destes dígitos é um quadrado perfeito.

66) (Torneio das Cidades-96) Oito estudantes foram convocados para resolver 8 problemas. Cada problema foi resolvido por 5 estudantes. Prove que é possível escolher dois estudantes tal que cada problema tenha sido resolvido por pelo menos um deles. Se cada problema tivesse sido resolvido por 2 estudantes, então é possível não mais exista este par de estudantes. Prove isto.

67) (Torneio das Cidades-94) 60 crianças participam de uma colônia de férias. Entre qualquer conjunto de 10 crianças existem 3 ou mais que vivem na mesma barraca. Prove que existem 15 ou mais crianças que vivem na mesma barraca.

68) (IMO-72) Dado todo conjunto de dez números distintos pertencentes ao intervalo 10, 11, ..., 99, prove que nós podemos sempre determinar dois subconjuntos disjuntos com a mesma soma.

69) (Rioplatense-98) Seja M um subconjunto de $\{1, 2, ..., 1998\}$ com 1000 elementos. Demonstrar que sempre é possível encontrar dois elementos a e b de M, não necessariamente distintos, tais que $a + b$ é uma potência de 2.

70) (Rioplatense-98) Prove que entre 101 números inteiros positivos quaisquer, é possível escolher 11 deles cuja soma seja divisível por 11.

71) (OBM-98) Prove que em qualquer pentágono convexo existem dois ângulos internos consecutivos cuja soma é maior ou igual a 216°.

72) (OBM-81) Um clube de matemática tem 100 membros. Suponha que em qualquer grupo de 4 membros, exista um que conheça os outros três. Prove que existe um membro do clube que conhece todos os outros 99 membros. Qual o número mínimo de tais membros?
(Obs: Se o membro A conhece o membro B, então o membro B também conhece o membro A.)

73) (Grécia-96) Dados 25 números naturais cujos divisores primos pertencem ao conjunto {2, 3, 5}, prove que existem 4 números cujo produto é a quarta potência de um inteiro.

74) (Ceará-98) Prove que entre três números inteiros quaisquer podemos escolher dois, digamos a e b, tais que $ab^3 - ba^3$ seja divisível por 10.

MATRIZ

10.1. DEFINIÇÃO

Chama-se matriz de ordem m × n a um conjunto de m.n elementos dispostos em uma tabela com m linhas e n colunas. Se m = 1 a matriz é dita matriz-linha ou vetor-linha e se n = 1 ela será dita matriz-coluna ou vetor-coluna. Os elementos de uma matriz podem ser números reais ou complexos, polinômios, funções, vetores, matrizes, etc...

Normalmente uma matriz é simbolizada por uma letra maiúscula e seus elementos por uma letra minúscula (a mesma que simboliza a matriz) seguida pelo índice do elemento. Por exemplo, se uma matriz é representada por $A_{m\times n}$, significa que possui m linhas e n colunas, sendo seus elementos representados da forma $(a_{ij})_{m\times n}$, onde i é a linha e j a coluna do elemento, com $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$.

10.1.1 Representação de uma matriz A de ordem m × n

Existem duas formas mais usuais para representar uma matriz, escrevendo os elementos dentro de parênteses ou dentro de colchetes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sinteticamente tem-se que $A = (a_{ij})_{m\times n}$. Abaixo existem alguns exemplos de matrizes, com suas respectivas ordens.

$$A_{3\times 5} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 0 & 9 & -2 \\ 4 & -9 & 3 & 3 & 7 \\ 5 & -4 & -1 & -2 & -8 \end{bmatrix}, \quad B_{4\times 1} = \begin{bmatrix} -x \\ x^2 - 1 \\ 4x \\ x^3 + 3x \\ 5x^4 \\ -2x^5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_{4\times 2} = \begin{bmatrix} \text{senx} & \log_2 x^3 \\ 7^{x^2-2x} & -\text{tg}(x+1) \\ x^5 - 5x & \sqrt{x^2+1} \\ \dfrac{1}{x^3-3} & x^x \end{bmatrix}$$

Se m = n, a matriz é denominada quadrada e se m ≠ n ela é chamada de retangular. Quando uma matriz é quadrada, pode-se representar sua ordem apenas por um dos índices. Por exemplo, se uma matriz A é 6×6, pode-se afirmar que A é quadrada de ordem 6 (6 linhas e 6 colunas).

10.1.2. Traço de uma matriz quadrada

Nas matrizes quadradas os elementos de índices iguais constituem a diagonal principal da matriz e a soma desses elementos chama-se traço da matriz. A outra diagonal da matriz chama-se diagonal secundária.

Logo, em uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ os elementos que formam a diagonal principal são a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}. Deste modo, o traço dessa matriz quadrada é igual a $tr(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + ...+ a_{nn}$. Utilizando simbologia de somatório tem-se que $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. A diagonal secundária é formada pelos elementos a_{n1}, $a_{n-1\,2}$, $a_{n-2\,3}$, ..., $a_{2\,n-1}$, a_{1n}.

Por exemplo, em $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ segue que a diagonal principal é formada pelos elementos 1, 5 e 9, sendo o traço de A dado por $tr(A) = 1 + 5 + 9 = 15$. A diagonal secundária é formada pelos elementos – 3, 5 e – 7.

10.1.3. Matrizes Fundamentais

Matriz nula: Seja $A = (a_{ij})_{m\times n}$ com $a_{ij} = 0$, $\forall i$ e $\forall j$. Então A será dita matriz nula e será representada por $O_{m\times n}$ ou simplesmente 0. São exemplos de matrizes nulas:

$$O_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ O_{2\times 7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } O_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Perceba que uma matriz nula pode possuir qualquer ordem.

Matriz identidade: É uma matriz quadrada onde os elementos de mesmos índices são iguais a 1 (um) e de índices diferentes são nulos. Representa-se por I_n ou simplesmente I. Por exemplo:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } I_1 = [1]$$

Note que apenas matrizes quadradas podem ser identidades. O conceito de matriz identidade será muito útil na operação multiplicação de matrizes e no cálculo da inversa de uma matriz quadrada.

10.1.4. Igualdade Matricial

Definição: Dadas duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, afirma-se que $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \forall\, i \text{ e } \forall\, j$.

Por exemplo, suponha que $A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} a & 5 \\ 2 & b \\ -4 & c \end{pmatrix}$ e $B_{3\times 2} = \begin{pmatrix} -9 & e \\ 2 & 0 \\ d & -2 \end{pmatrix}$ são matrizes iguais. Assim, é necessário que:

1) $a_{11} = b_{11} \Rightarrow a = -9$ 2) $a_{12} = b_{12} \Rightarrow e = 5$

3) $a_{21} = b_{21} \Rightarrow 2 = 2$ (confere!) 4) $a_{22} = b_{22} \Rightarrow b = 0$

5) $a_{31} = b_{31} \Rightarrow d = -4$ 6) $a_{32} = b_{32} \Rightarrow c = -2$

10.2. OPERAÇÕES COM MATRIZES

10.2.1. Adição

Definição: Dadas duas matrizes de mesma ordem $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{m\times n}$, chama-se matriz soma $A + B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $\forall i$ e $\forall j$.

Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & -4 \\ 3 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ tem-se que:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 1+2 & 6+8 & 3-4 \\ 4+3 & -2+7 & 5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 14 & -1 \\ 7 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

Propriedades da adição matricial:

1) Fechamento: $C = A + B$ é da mesma ordem de A e B

2) Comutativa: $A + B = B + A$

3) Associativa: $A + (B + C) = (A + B) + C$

4) Elemento neutro: para o conjunto das matrizes $m \times n$ é a matriz nula $O_{m\times n}$ tal que $A + O = O + A = A$.

5) Matriz oposta ou inversa aditiva: Toda matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$ tem uma matriz oposta $(-A)$ tal que $A + (-A) = (-A) + A = O_{m\times n}$. Observe que a matriz oposta é obtida invertendo o sinal de todos os elementos da matriz.

É fácil observar que estas propriedades são idênticas às propriedades da adição de números reais. Assim, pode-se afirmar que a adição de matrizes se comporta de forma muito semelhante à adição de números reais. Entretanto, isso não ocorre com todas as operações envolvendo matrizes, como será apresentado nos próximos tópicos.

10.2.2. Subtração Matricial:

Utilizando o conceito de matriz oposta (verifique a propriedade 5 da adição de matrizes), pode-se afirmar que, caso A e B sejam matrizes de mesma ordem:

$$A - B = A + (-B)$$

Por exemplo, sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$, tem-se que:

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

10.2.3. Multiplicação de um número por uma matriz (multiplicação escalar)

Definição: Dado um número α e uma matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$ chama-se múltipla escalar de A a matriz $B = (b_{ij})_{m \times n} = \alpha.A$ onde $b_{ij} = \alpha.a_{ij}$, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Por exemplo, dados $\alpha = 3$ e $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, segue que:

$$3A = 3.\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 12 \\ 0 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

Caso $\alpha = 0$ o resultado da multiplicação $\alpha.A$ é uma matriz nula de mesma ordem que a matriz A.

Propriedades da multiplicação escalar: Se x e y são números e A e B são matrizes de mesma ordem, são válidas as propriedades:

1) $x.A = A.x$

2) $x(yA) = (xy)A = y(xA)$

3) $x(A + B) = xA + xB$

4) $(x + y)A = xA + yA$

5) $(-1).A = -A$ (matriz oposta de A, já citada nas propriedades de adição matricial)

6) $0.A = 0$ (matriz nula de mesma ordem que a matriz A)

7) $1.A = A$

Todas as demonstrações são elementares e ficam a cargo do leitor.

Repare que as propriedades de multiplicação de um escalar por uma matriz são idênticas às propriedades de multiplicação entre dois números reais. Isso já havia ocorrida na operação adição de matrizes, porém não vai ocorrer na próxima operação entre matrizes.

10.2.4. Multiplicação Matricial

Caso Particular: Dada uma matriz linha $1\times n$, $A = (a_{11}\ a_{12}\ ...\ a_{1n})$ e uma matriz coluna $n\times 1$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ chama-se produto A.B à matriz 1×1, dada por

$$C = (a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + ... + a_{1n}.b_{n1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{1k} b_{k1} \right)$$

Por exemplo, se $A = (2\ \ 1\ \ 3)$ e $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$, o produto A.B é dado por:

$$A.B = (2\ 1\ 3).\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = (2.1 + 1\ 0 + 3.6) = (20)$$

Caso Geral: Dadas as matrizes $A = (a_{ij})_{m\times p}$ e $B = (b_{ij})_{p\times n}$, chama-se produto $A\times B$ a matriz $C = (c_{ij})_{m\times n}$ onde o elemento c_{ij} é obtido pela soma dos produtos dos elementos da i-ésima linha de A pelos elementos correspondentes da j-ésima coluna de B. Assim sendo, tem-se que $c_{ij} = a_{i1}.b_{1j} + a_{i2}.b_{2j} + ... + a_{ip}.b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Por exemplo, se A é uma matriz 3×2 qualquer e B uma matriz 2×2 qualquer, o produto C = A.B é dado por:

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix}$$

É importante observar que:

1) A condição para que $A\times B$ exista é que o número de colunas de A seja igual ao número de linhas de B. Assim sendo, no exemplo anterior não existiria o produto B.A, uma vez que B tem 2 colunas e A tem 3 linhas.

2) A multiplicação é sempre feita com uma linha da 1ª matriz × uma coluna da 2ª matriz.

3) A ordem de $A\times B$ será dada pelo número de linhas de A versus o número de colunas de B. No exemplo dado $A\times B$ é de ordem 3 (linhas de A) × 2 (colunas de B).

Propriedades: Partindo da condição de que A, B e C são matrizes compatíveis para a multiplicação:

1) Associativa: $A(BC) = (AB)C$

2) Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$ e $(B + C)A = BA + CA$

3) De forma geral, não é comutativa: $AB \neq BA$ (leia com calma as observações)

4) $AB = AC \not\Rightarrow B = C$ (não existe a lei do corte)

5) $A.B = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$

6) $k(AB) = A(kB) = (kA)B$, sendo k um número

É útil observar que para as matrizes quadradas de ordem n teremos:

7) A matriz identidade I_n é elemento neutro ou seja $AI = IA = A$

8) Algumas matrizes $A = (a_{ij})_{n\times n}$ tem inversa multiplicativa ou seja $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ (a condição para uma matriz apresentar inversa multiplicativa será analisada no capítulo sobre determinantes)

Observações:

i) Existem matrizes quadradas A e B de modo que $AB = BA$. Neste caso, afirma-se que A e B são matrizes comutativas ou que A e B comutam. Por exemplo, $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{pmatrix}$.

ii) Como, de maneira geral, o produto de duas matrizes não é comutativo, é importante destacar a matriz que está à esquerda e a matriz que está à direita em um produto. Por exemplo, no produto A.B a matriz A está à esquerda do produto e a matriz B está à direita do produto. Mais importante ainda é quando deseja-se multiplicar os dois membros de uma expressão matricial por uma determinada matriz. Por exemplo, suponha que se deseja multiplicar os dois membros da expressão $A = B$ pela matriz C. É necessário indicar se a matriz C será multiplicada à esquerda ou à direita. Se for à esquerda tem-se o resultado $CA = CB$. Se for à direita tem-se como resultado $AC = BC$.

iii) Existem matrizes distintas B e C de modo que $AB = AC$. Por exemplo, observe que $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -5\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Entretanto, $B = C$ é sempre uma possibilidade para $AB = AC$.

vi) Existem matrizes não nulas A e B (quadradas ou não) de modo que $AB = 0$. Por exemplo, $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 2\\ 0 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. Contudo, se $A = 0$ ou $B = 0$ sempre segue que $AB = 0$.

Exercícios Resolvidos

1) A matriz A é tal que $A^2 = 2A - I$, onde I é a matriz identidade. Então, A^n vale:
a) $nA - (n-1)I$ b) $nA - I$ c) $2^{n-1}A - I$
d) $2^{n-1}nA - (n-1)I$ e) $2A - (n-1)I$

Solução: Alternativa A

$A^2 = 2A - I \Rightarrow A^3 = 2A^2 - A = 2(2A - I) - A = 3A - 2I$

$A^4 = 3A^2 - 2A = 3(2A - I) - 2A = 4A - 3I$

A demonstração será feita por indução finita.

Suponhamos que exista k tal que $A^k = kA - (k-1)I$. Assim:

$A^{k+1} = A.A^k = A[kA - (k-1)I] = kA^2 - (k-1)A = k(2A - I) - (k-1)A =$

$= 2kA - kI - (k-1)A = (k+1)A - kI$

Por indução segue que $A^n = nA - (n-1)I$

2) (ITA-80) Sejam A, B e C matrizes quadradas de ordem n e O_n a matriz nula de ordem n. Consideremos as seguintes afirmações:
1) $AB = BA$
2) Se $AB = AC \Rightarrow B = C$
3) Se $A^2 = O_n \Rightarrow A = 0_n$
4) $A(BC) = (AB)C$
5) $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$

A respeito destas afirmações, qual das afirmativas abaixo é verdadeira:
a) Apenas a afirmativa 1 é falsa
b) Apenas a afirmativa 4 é verdadeira
c) A afirmação 5 é verdadeira
d) As afirmações 2 e 3 são verdadeiras
e) As afirmações 3 e 4 são verdadeiras

Solução: Alternativa B

1) é falsa pois a multiplicação matricial não é comutativa;
2) é falsa pois não existe a lei do corte na multiplicação matricial;
3) é falsa pois sendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ temos que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1+1.(-1) & 1.1+1.(-1) \\ (-1).1+(-1).(-1) & (-1).1+(-1).(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) é verdadeira pois a multiplicação matricial é associativa;
5) é falsa pois devido a não comutatividade da multiplicação temos que

$$(A - B)^2 = (A - B)(A - B) = A^2 - AB - BA + B^2$$

sendo que, de maneira geral, $-AB - BA \neq -2AB$.

3) Se $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ e $(aI_2 + bA)^2 = A$ (a e $b \in \mathbb{R}$ e I_2 é a matriz identidade de ordem 2), então:

a) $a = b = \sqrt{2}$ b) $a = b = 1$ c) $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $a = \sqrt{2}$ e $b = -\sqrt{2}$ e) $a = 1$ e $b = -1$

Solução: Alternativa C

Note que $A^2 = -I_2$. Assim:

$(aI_2 + bA)^2 = A \Rightarrow a^2I^2 + b^2A^2 + 2abAI = A \Rightarrow (a^2 - b^2)I + (2ab - 1)A = 0 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a^2-b^2 & 2ab-1 \\ 1-2ab & a^2-b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow a = \pm b \text{ e } 2ab - 1 = 0 \Rightarrow a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

4) Encontre todas as matrizes B que comutam com

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solução:

$$AB = BA \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \cancel{a} = \cancel{a} + 2b \\ b = 2b \\ 2a + 2c = c + 2d \\ 2b + \cancel{2d} = \cancel{2d} \end{cases} \Rightarrow$$

$$b = 0 \text{ e } c = 2d - 2a \Rightarrow B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 2d-2a & d \end{pmatrix}$$

5) (ITA-11) Determine todas as matrizes $M \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ tais que $MN = NM$, $\forall N \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Solução:

Seja $M=\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$. Como $MN = NM$ para toda matriz $N_{2\times2}$, pode-se escolher adequadamente matrizes N. Por exemplo, tomando $N=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, segue que:

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = z = 0$$

Fazendo agora $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = w$$

Assim, M deve ser da forma $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$, com $\in$ IR, de modo que M comute com qualquer matriz. Com efeito, $M = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = k.I_2$, sendo I_2 a matriz identidade de 2ª ordem, conclui-se que $MN = (k.I_2)N = k(I_2.N) = k(N.I_2) = N(k.I_2) = N.M$

6) Seja $M_n(R)$ o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, de coeficientes reais. A função Ψ é definida da seguinte forma:

$$M_n(R) \times M_n(R) \rightarrow M_n(R) \text{ por } \Psi(A, B) = AB - BA.$$

Calcule o valor de $\Psi(\Psi(A, B), C) + \Psi(\Psi(B, C), A) + \Psi(\Psi(C, A), B)$

Solução:

$\Psi(\Psi(A, B), C) + \Psi(\Psi(B, C), A) + \Psi(\Psi(C, A), B) =$

$= \Psi(AB - BA, C) + \Psi(BC - CB, A) + \Psi(CA - AC, B) =$

$= ABC - BAC - CAB + CBA + BCA - CBA - ABC + ACB + CAB - ACB -$

$- BCA + BAC = 0$

7) Determine a quantidade de matrizes $A_{2\times2}$, de elementos reais, tais que $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4 e) infinitas

Solução: Alternativa C

Fazendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ segue que $A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$:

$a^2 + bc = -1$ $\quad ab + bd = -2$ $\quad ac + cd = 4$ $\quad bc + d^2 = -1$

Igualando a 1ª e 4ª equações: $a^2 + bc = bc + d^2 \Rightarrow a^2 = d^2 \Rightarrow a = \pm d$

Se $a = -d$ a 2ª equação não será satisfeita, ou seja, a única possibilidade é $a = d$.

A 2ª e a 3ª equações ficam da forma $ab = -1$ e $ac = 2$.

Substituindo na 1ª equação:

$a^2 + bc = a^2 - 2/a^2 = -1 \Rightarrow (a^2 - 1)(a^2 + 2) = 0 \Rightarrow a = \pm 1$.

Assim, existem duas matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

10.3. MATRIZES ESPECIAIS

10.3.1. Matriz Transposta

Definição: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{m\times n}$, chama-se matriz transposta de A (representa-se por A^t ou A') a matriz obtida de A, trocando-se as linhas pelas colunas. ou seja, a_{ij} é substituído por a_{ji}.

Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ então $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Observe que se A é uma matriz quadrada os elementos da sua diagonal principal são invariantes perante a transposição matricial.

Propriedades:

1) $(A^t)^t = A$

2) Se A é quadrada então $tr(A) = tr(A^t)$

3) Se A e B são matrizes de mesma ordem então $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$

4) Se A é uma matriz e $k \in IR \Rightarrow (kA)^t = kA^t$

5) Se $A = (a_{ij})_{m\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times p} \Rightarrow (AB)^t = B^t.A^t$

6) Se A é uma matriz quadrada então $(A^p)^t = (A^t)^p$ com $p \in N^*$

Demonstrações:

1) Se $B = A^t$ então $b_{ij} = a_{ji}$. Se $C = B^t = (A^t)^t$ então $c_{ij} = b_{ji} = a_{ij}$, ou seja, $C = A$.

2) Sabe-se que os elementos da diagonal principal de uma matriz quadrada e sua transposta são iguais. Logo: $tr(A) = tr(A^t)$

3) Se $C = A \pm B$ então $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$. Se $D = C^t$ então $d_{ij} = c_{ji} = a_{ji} \pm b_{ji}$. Deste modo, segue que $D = C^t = A^t \pm B^t$.

4) Se $B = kA$ então $b_{ij} = ka_{ij}$. Se $C = B^t$ então $c_{ij} = b_{ji} = ka_{ji}$. Se $D = kA^t$ então $d_{ij} = ka_{ji}$. Assim, segue que $C = D$, ou seja, $(kA)^t = kA^t$

5) Se $C = AB$ então $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$. Se $D = C^t$ então $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}b_{jk} = \sum_{k=1}^{n} b_{jk}a_{ki}$. Note que b_{jk} é um elemento da linha j e da coluna k de B e a_{ki} é um elemento da linha j e da coluna i de A. Por outro lado, b_{jk} também é um elemento da linha k e da coluna j de B^t e a_{ki} também é um elemento da linha j e da coluna k de A^t. Fazendo k variar de 1 até n segue que d_{ij} é um elemento de $B^t.A^t$. Assim, tem-se que $(AB)^t = B^t.A^t$.

6) Na propriedade anterior, fazendo B = A: $(A^2)^t = (A^t)^2$. Agora fazendo $B = A^2$: $(A^3)^t = (A^t)^3$. Fazendo indução finita pode-se demonstrar o resultado.

10.3.2. Matriz Simétrica

Definição: Uma matriz quadrada A é dita simétrica se $A^t = A$. É fácil observar que na matriz simétrica tem-se $a_{ij} = a_{ji}$, $\forall i$ e $\forall j$.

Um exemplo de matriz simétrica 3×3 é $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

10.3.3. Matriz Anti-simétrica

Definição: Uma matriz quadrada A é dita anti-simétrica se $A^t = -A$. É claro que na matriz anti-simétrica tem-se $a_{ij} = -a_{ji}$. Perceba que em toda matriz anti-simétrica os elementos da diagonal principal são todos nulos, uma vez que, fazendo j = i, segue que $a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0$.

Um exemplo de matriz anti-simétrica 3×3 é $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

10.3.4. Matriz triangular

Definição: Uma matriz quadrada A será triangular superior se $a_{ij} = 0 \ \forall \ i > j$ e triangular inferior se $a_{ij} = 0 \ \forall \ i < j$. Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular superior e $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ é uma matriz triangular inferior. Repare que uma matriz pode ser, ao mesmo tempo, triangular superior e triangular inferior (leia o próximo item).

10.3.5. Matriz Diagonal

Definição: Uma matriz $A = (a_{ij})_{n \times n}$ será dita diagonal se $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$. É claro que a matriz diagonal é ao mesmo tempo triangular inferior e triangular superior. Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ é uma matriz diagonal. Observe que uma matriz quadrada nula também é classificada como diagonal.

10.3.6. Matriz Escalar

Definição: É toda matriz diagonal onde os elementos da diagonal principal são iguais. Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ é uma matriz escalar. É claro que se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ é escalar então $A = \alpha I_n$, com α sendo um número. A matriz quadrada nula (de ordem qualquer) pode ser também classificada como matriz escalar.

10.3.7. Matriz Periódica

Definição: Se A é uma matriz quadrada tal que $A^{k+1} = A$ com $k \in N^*$ ela será dita periódica e o menor valor de k que satisfaz $A^{k+1} = A$ será o período da matriz. Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -6 \\ -3 & 2 & 9 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ é periódica e seu período é 2, uma vez que $A^3 = A$.

10.3.8. Matriz Idempotente

Definição: É toda matriz A periódica de período 1, ou seja, $A^2 = A$. Por exemplo, a matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ é idempotente. Note também que a matriz identidade I (de qualquer ordem) é idempotente: $I^2 = I$.

10.3.9. Matriz Nilpotente

Definição: Uma matriz quadrada A classificada como nilpotente se $A^p = 0$, com $p \in N^*$, e o menor valor de p tal que $A^p = 0$ chama-se índice da matriz nilpotente. Por exemplo, a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ é nilpotente de índice 3, desde que:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

10.3.10. Matriz Involutória ou Involutiva

Definição: É toda matriz quadrada A tal que $A^2 = I$. Por exemplo, tem-se que a matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ é involutória pois $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

10.3.11. Matriz Ortogonal

Definição: Uma matriz quadrada A será dita ortogonal se $A.A^t = I$. Por exemplo, a matriz $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ é ortogonal, a saber:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}.\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2}+\frac{1}{2}.\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

10.3.12. Matriz Conjugada

Definição: Quando A é uma matriz cujos elementos são números complexos, a matriz formada pelos conjugados dos respectivos elementos de A é dita conjugada de A e representa-se por $\overline{A}$. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1+2i & 3i \\ 3 & 2-i \end{pmatrix}$ então a matriz conjugada de A é $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2i & -3i \\ 3 & 2+i \end{pmatrix}$.

10.3.12.1. Propriedades da Matriz Conjugada

Se $\overline{A}$ e $\overline{B}$ são as matrizes conjugadas de A e B, com A e B são matrizes compatíveis com as operações indicadas, então:

1) $\overline{(\overline{A})} = A$
2) $\overline{(kA)} = \overline{k}.\overline{A}, k \in \mathbb{C}$
3) $\overline{(A+B)} = \overline{A} + \overline{B}$
4) $\overline{(AB)} = \overline{A}.\overline{B}$
5) $\overline{A^t} = (\overline{A})^t$

As demonstrações são elementares e ficam a cargo do leitor.

10.3.13. Matriz Hermitiana

Definição: Uma matriz quadrada será dita hermitiana se $\overline{A^t} = A$. É fácil observar que se A é hermitiana então $a_{ij} = \overline{a}_{ji}$ e, consequentemente, os elementos da diagonal

principal (a_{ij}) são números reais. Por exemplo, a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1-i & 3+2i \\ 1+i & 3 & i \\ 3-2i & -i & 4 \end{pmatrix}$ é hermitiana.

10.3.14. Matriz Inversa

Definição: Uma matriz $A_{n\times n}$ é chamada invertível ou não-singular se existir uma matriz $B_{n\times n}$ tal que $\mathbf{AB = BA = I_n}$. A matriz B é chamada a "inversa de A". Se essa matriz B não existir, então A é chamada singular ou não-invertivel. Perceba que se $AB = BA = I_n$ então A é também uma inversa de B.

Simbolicamente, se B é a inversa de A, pode-se adotar a notação $B = A^{-1}$. Entretanto, o -1 não é um expoente, uma vez que não é definida a operação de divisão de uma matriz. Portanto, se A é uma matriz, segue que $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$, com A^{-1} sendo apenas um símbolo matemático que representa a inversa da matriz A.

Da definição de matriz inversa, caso exista A^{-1}, tem-se $\mathbf{A^{-1}.A = A.A^{-1} = I}$. Contudo, ainda não é possível definir a condição para o qual uma matriz quadrada admita inversa. Essa condição será enunciada e demonstrada no capítulo de determinantes. Por esse motivo, neste capítulo de matrizes, quando for solicitado o cálculo da inversa de uma matriz o leitor pode admitir que a inversa existe.

10.3.14.1. Teorema: Uma inversa de uma matriz, se existir, é única.

Demonstração:

Sejam B e C inversas de A. Então $BA = AC = I_n$.

Portanto: $B = B.I_n = B(AC) = (BA)C = I_n.C = C$.

10.3.14.2. Cálculo da inversa de uma matriz quadrada

Existem várias maneiras de determinar, quando existir, a inversa de uma matriz. Neste livro serão apresentadas as três formas mais conhecidas de calcular a inversa de uma matriz. A primeira delas será apresentada neste tópico e se bascia na multiplicação matricial. As outras duas maneiras de calcular os elementos da inversa de uma matriz quadrada serão apresentadas no capítulo de Determinantes e no capítulo de Sistemas Lineares.

Pela definição de matriz inversa segue que $A^{-1}.A = I$. Sendo conhecidos os elementos da matriz $A_{n\times n}$, pode-se calcular o resultado da multiplicação matricial $A^{-1}.A$ tratando os elementos de A^{-1} como variáveis a serem determinadas. Assim, serão gerados n sistemas lineares n×n (n variáveis e n equações), onde as variáveis de cada sistema linear são os elementos de cada linha de A^{-1}.

Por exemplo, suponha que se deseja calcular a inversa de $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Fazendo $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ e sabendo que $A^{-1}.A = I$, segue que $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Efetuando o produto matricial:

$5a + 2b = 1$ (1) $\quad 7a + 3b = 0$ (2) $\quad 5c + 2d = 0$ (3) $\quad 7c + 3d = 1$ (4)

Resolvendo o sistema forma pelas equações (1) e (2) encontra-se que $a = 3$ e $b = -7$

Resolvendo o sistema forma pelas equações (3) e (4) encontra-se que $c = -2$ e $d = 5$

Logo, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Vamos agora aplicar esta técnica para inverter uma matriz 3×3. Considere que se deseja inverter a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$. Supondo que A^{-1} exista:

$$A^{-1}.A = I \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Multiplicando a 1ª linha de A^{-1} por cada coluna de A:

$$\begin{cases} a - 2b - c = 1 \\ b = 0 \\ -2a - 3b + 3c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = 0 \text{ e } c = 2$$

Multiplicando a 2ª linha de A^{-1} por cada coluna de A:

$$\begin{cases} d - 2e - f = 0 \\ e = 1 \\ -2d - 3e + 3f = 0 \end{cases} \Rightarrow d = 9, e = 1 \text{ e } f = 7$$

Multiplicando a 3ª linha de A^{-1} por cada coluna de A:

$$\begin{cases} g - 2h - i = 0 \\ h = 0 \\ -2g - 3h + 3i = 1 \end{cases} \Rightarrow g = 1, h = 0 \text{ e } i = 1$$

Assim, a inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é a matriz $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 9 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Propriedades da Inversa

1) Se A é uma matriz invertível, então A^{-1} é invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$

Demonstração:

A^{-1} será invertível se podemos encontrar uma matriz B tal que $A^{-1}B = BA^{-1} = I_n$. Como A é invertível, $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I_n$. Como B = A é uma inversa de A^{-1}, e como as inversas são únicas, concluímos que $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) Se A e B são matrizes invertíveis, então A.B é invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.

Demonstração:

Temos $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI^nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ e
$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$
Portanto, AB é invertível. Como a inversa de uma matriz é única: $(BA^{-1}) = B^{-1}A^{-1}$.

3) Se A é uma matriz invertível, então $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Demonstração:

$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}.A)^t = I_n^t = I_n$ e $(A^{-1})^tA^t = (A.A^{-1})^t = I_n^t = I_n$
Assim, segue que a inversa de $(A^{-1})^t$ é A^t, ou seja, $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$.

Exercícios Resolvidos

1) $A = \begin{pmatrix} 0 & x-1 & y+3 \\ -2 & t-4 & 5 \\ 4 & z+1 & 0 \end{pmatrix}$ é anti-simétrica. Calcule $x + y + t - z$.

Solução:

A é anti-simétrica então $a_{ij} = -a_{ji}$:

$$\begin{cases} x-1=2 \Rightarrow x=3 \\ y+3=-4 \Rightarrow y=-7 \\ t-4=0 \Rightarrow t=4 \\ z+1=-5 \Rightarrow z=-6 \end{cases} \Rightarrow x+y+t-z = 3+(-7)+4-(-6) = 6$$

2) Se A, B e C são matrizes quadradas de ordem n então $(ABC)^t = C^t B^t A^t$.

Solução: Pela associatividade e pela propriedade da transposta de um produto temos:
$(ABC)^t = [(AB)C]^t = C^t (AB)^t = C^t B^t A^t$

3) (PUC/SP-84) Se A, B e C são matrizes de ordem n com A e B inversíveis, resolva a equação na matriz X dada por A X B = C.

Solução:

Multiplicando os dois membros da expressão dada por A^{-1}:

$A^{-1}(AXB) = A^{-1}C \Rightarrow (A^{-1}A)(XB) = A^{-1}C \Rightarrow I(XB) = A^{-1}C \Rightarrow XB = A^{-1}C$
Multiplicando os dois membros por B^{-1}:
$(XB)B^{-1} = (A^{-1}C)B^{-1} \Rightarrow X(BB^{-1}) = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow X.I = A^{-1}CB^{-1} \Rightarrow$
$X = A^{-1}CB^{-1}$.

4) Pede-se:
a) Dê exemplo de uma matriz quadrada não nula que seja nilpotente.
b) Mostre que $A^3 = 0 \nRightarrow A^2 = 0$
c) Mostrar que se A é inversível então A não pode ser nilpotente.
Solução:
a) A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ é nilpotente, porém não é nula:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2.A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, A é nilpotente.
b) No item anterior há um exemplo de uma matriz A que satisfaz $A^3 = 0$ e $A^2 \neq 0$.
c) Suponha, por absurdo, que exista uma matriz A nilpotente de índice p e que seja inversível. Então $A^p = A.A.A...A = 0$ (p fatores). Multiplicando à esquerda seguidamente por A^{-1} temos:

$$A^{-1}(A.A.A...A) = A^{-1}(A.A...A) = ... = A^{-1}.A = 0 \Rightarrow I = 0$$

o que é absurdo, logo, se A é inversível A não pode ser nilpotente.

5) Considere as matrizes

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Se x é solução de $M^{-1}NX = P$, então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a:
a) 35 b) 17 c) 38 d) 14 e) 29
Solução: Alternativa A
Multiplicando por M à esquerda dos dois lados
$(M.M^{-1})NX = MP \Rightarrow (I)NX = MP \Rightarrow NX = MP$
Efetuando o produto matricial:

$$\begin{pmatrix}1&0&2\\3&2&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\0&1&0\\2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}x+2z\\3x+2y\\x+y+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2z=-1 & (i)\\3x+2y=1 & (ii)\\x+y+z=3 & (iii)\end{cases}$$

Multiplicando (i) por – 3 e somando com (ii) e multiplicando (iii) por – 3 e somando com (ii), temos:

$$\begin{cases}-6z+2y=4\\-y-3z=-8\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=1\\y=5\\x=-3\end{cases}\Rightarrow x^2+y^2+z^2=35$$

6) (UFSCar-00) Seja $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ uma matriz 2×2 cujos coeficientes são números reais. Vamos chamar de transposta de A à matriz $A^t=\begin{bmatrix}a&c\\b&d\end{bmatrix}$. Dizemos que uma matriz A é simétrica se $A = A^t$ e dizemos que A é anti-simétrica se $A = -A^t$.

a) Dada uma matriz A qualquer, verifique que $B=\frac{1}{2}(A+A^t)$ é uma matriz simétrica e que $C=\frac{1}{2}(A-A^t)$ é uma matriz anti-simétrica.

b) Mostre que toda matriz 2 × 2 é a soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

Solução:

a) $B^t=\frac{1}{2}(A+A^t)^t=\frac{1}{2}[(A)^t+(A^t)^t]=\frac{1}{2}(A^t+A)=B \Rightarrow$ B é simétrica

$C^t=\frac{1}{2}(A-A^t)^t=\frac{1}{2}[(A)^t-(A^t)^t]=\frac{1}{2}(A^t-A)=-C \Rightarrow$ C é anti-simétrica

b) Vamos demonstrar um resultado mais genérico: toda matriz $X_{n\times n}$ é soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.

Para tanto, basta perceber que $B+C=\frac{1}{2}(A+A^t)+\frac{1}{2}(A-A^t)=A$, ou seja, toda matriz A de ordem n×n pode ser escrita como soma de uma matriz simétrica e ou anti-simétrica.

7) Considere as sentenças:

I. As matrizes $\begin{pmatrix}a&b\\b&a\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}c&d\\d&c\end{pmatrix}$ comutam para quaisquer valores de a, b, c e d.

II. Se a matriz A de ordem m é anti-simétrica e se P é uma matriz m × n, então a matriz $B = P^t \cdot A \cdot P$ é anti-simétrica.

III. Sejam as matrizes $A=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 5\\ 1 & -3 & -5\\ -1 & 3 & 5\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, então $A^t.B^n = A$.

São verdadeiras:

a) nenhuma b) todas c) apenas I

d) apenas I e II e) apenas I e III

Solução: Alternativa B

I. Verdadeira

$$\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}c & d\\ d & c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ac+bd & ad+bc\\ bc+ad & bd+ac\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c & d\\ d & c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}$$

II. Verdadeira

Como $A^t = -A \Rightarrow B' = (P^t \cdot A \cdot P)^t = P^t.A^t.(P^t)^t = P^t(-A)P = -P^t \cdot A \cdot P = -B$

III. Verdadeira

Observa-se que $A^2 = A$ e $B^3 = B$.

Assim: $A^5.B^6 = [(A^2)^2.A](B^3)^2 = A^2.A.I^2 = A^2.I = A$

8) (ITA-91) Sejam M e B matrizes quadradas de ordem n tais que $M - M^{-1} = B$. Sabendo que $M^t = M^{-1}$ podemos afirmar que:

a) B^2 é a matriz nula. b) $B^2 = -2I$. c) B é simétrica.

d) B é anti-simétrica e) n.d.a.

Solução: Alternativa B

Perceba que $B^t = (M - M^{-1})^t = M^t - (M^{-1})^t = M^{-1} - (M^t)^t = M^{-1} - M = -B \Rightarrow$

B é anti-simétrica $\Rightarrow$ alternativa B é correta

Vamos agora demonstrar que as demais alternativas estão incorretas.

$B^2 = (M - M^{-1})(M - M^{-1}) = M^2 - M.M^{-1} - M^{-1}M + (M^{-1})^2 = -2I + M^2 + (M^{-1})^2$, entretanto não é possível afirmar que $M^2 + (M^{-1})^2 = 2I$ ou que $M^2 + (M^{-1})^2 = 0$, portanto as alternativas A e B são falsas.

A alternativa D é incorreta uma vez que já foi provado que B é anti-simétrica.

9) (IME-17) Seja M uma matriz real 2×2. Defina uma função f na qual cada elemento da matriz se desloca para a posição seguinte no sentido horário, ou seja, se $M = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, implica que $f(M) = \begin{pmatrix}c & a\\ d & b\end{pmatrix}$. Encontre todas as matrizes simétricas 2×2 reais na qual $M^2 = f(M)$.

Solução:

Seja $M_{2\times2}$ simétrica, $M = \begin{pmatrix}a & b\\ b & d\end{pmatrix}$, com $f(M) = \begin{pmatrix}b & a\\ d & b\end{pmatrix}$, temos que:

$$M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & b(a+d) \\ b(a+d) & d^2 + b^2 \end{pmatrix}.$$

Para $M^2 = f(M)$:

I: $a^2 + b^2 = b$ II: $b(a + d) = a$ III: $b(a + d) = d$ IV: $b^2 + d^2 = b$

De I e IV: $a^2 = d^2 \Rightarrow a = d$ ou $a = -d$

Para $a = d$, temos em II ou III que: $b(d + d) = d \Leftrightarrow d(2b - 1) = 0$

1° caso: $d = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow 0^2 + b^2 = b \Rightarrow b = 0$ ou $b = 1$

2° caso: $2b - 1 = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a = d = \pm\frac{1}{2}$

Para $a = -d$ temos de II, que:

$b(-d + d) = -d \Rightarrow b \cdot 0 = -d \Rightarrow d = 0 \Rightarrow a = 0$ e $b = 0$ ou $b = 1$

Assim, $M = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

10) Sejam A e B matrizes reais $n \times n$ inversíveis. Mostre que se vale a condição $(AB)^k = A^k B^k$ para três valores inteiros consecutivos de k então $AB = BA$.

Solução:

Suponha que $(AB)^k = A^k B^k$, $(AB)^{k+1} = A^{k+1} B^{k+1}$ e $(AB)^{k+2} = A^{k+2} B^{k+2}$, para algum inteiro positivo k.

Temos então $A^{k+1} B^{k+1} = (AB)^{k+1} = (AB)(AB)^k = AB\, A^k B^k$, e logo (multiplicando à esquerda por A^{-1} e à direita por B^{-k}) obtemos $A^k B = BA^k$.

Analogamente, usando a segunda e a terceira igualdades, obtemos $A^{k+1} B = BA^{k+1}$

Assim temos $BA^{k+1} = A^{k+1} B = A \cdot A^k B = A \cdot BA^k$, onde, multiplicando à direita por A^{-k}, obtemos $BA = AB$.

Exercícios de Vestibular

1) (UECE-18) Se o produto das matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & p \\ q & 1 \end{bmatrix}$ e $K = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{bmatrix}$ satisfaz a condição M.K = K.M, então, a expressão $pq - xy$ é igual a

A) $p^2 - x^2$ ou $-xy$.
B) $p^2 + x^2$ ou $-xy$.
C) $p^2 - q^2$ ou $-x^2$.
D) $p^2 \div q^2$ ou $-x^2$.

2) (FGV-17) A fim de dificultar a leitura da palavra, por se tratar de informação secreta, a matriz A é multiplicada pela matriz $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ obtendo-se a matriz codificada B.A. Sabendo que a matriz 3.A é igual a $\begin{bmatrix} -10 & 27 \\ 21 & -39 \end{bmatrix}$, podemos afirmar que a soma dos elementos da matriz A é:

a) 48 b) 46 c) 47
d) 49 e) 50

3) (UFRJ-92) Uma confecção vai fabricar 3 tipos de roupa utilizando materiais diferentes. Considere a matriz $A = (a_{ij})$ abaixo, onde a_{ij} representa quantas unidades do material j serão empregadas para fabricar uma roupa do tipo i. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Quantas unidades do material 3 serão empregadas na confecção de uma roupa do tipo 2?

b) Calcule o total do material 1 que será empregado para fabricar cinco roupas do tipo 1, quatro roupas do tipo 2 e duas roupas do tipo 3.

4) (UFRJ-99) Antônio, Bernardo e Cláudio saíram para tomar chope, de bar em bar, tanto no sábado quanto no domingo. As matrizes a seguir resumem quantos chopes cada um consumiu e como a despesa foi dividida:

$$S = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

S refere-se às despesas de sábado e *D* às de domingo. Cada elemento a_{ij} nos dá o número de chopes que i pagou para j, sendo Antônio o número 1, Bernardo o número 2 e Cláudio o número 3 (a_{ij} representa o elemento da linha i, coluna j de cada matriz). Assim, no sábado Antônio pagou 4 chopes que ele próprio bebeu, 1 chope de Bernardo e 4 de Cláudio (primeira linha de *S*).

a) Quem bebeu mais chope no fim de semana

b) Quantos chopes Cláudio ficou devendo para Antônio?

5) (UFRJ-99) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine $A^3 = A.A.A$

b) Se A^n denota o produto de A por A n vezes, determine o valor do número natural k tal que $A^{k^2} - A^{5k} + A^6 = I$ onde I é a matriz identidade.

6) (FGV-17) Dadas as matrizes: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, a

matriz X que satisfaz a equação matricial A.X.B = C tem como soma de seus elementos o valor:

a) 16 b) 14 c) 18
d) 12 e) 20

7) (UEM-98) Se A é uma matriz quadrada, definem-se: $A^2 = A.A$; $A^3 = A.A.A$; ...; $A^n = A.A...A$ (n vezes). Considere $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e b o elemento da 2ª linha e 1ª coluna da matriz $B = \frac{1}{10}\left(A + A^2 + ... + A^{20}\right)$. Então, b é igual a ...

8) (AFA-95) Dadas as matrizes: $A = (a_{ij})_{8\times3}$ e $B = (b_{ij})_{3\times7}$, onde $a_{ij} = 2i - j$ e $b_{ij} = i.j$, o elemento c_{56} da matriz $C = (c_{ij}) = A\times B$ é:

a) 74 b) 162 c) 228 d) 276

9) (Insper-16) Uma matriz X de tamanho 7×5 é tal que $\det(X^t X) \neq 0$, sendo que X^t representa a matriz transposta de X. Nessas condições, chama-se matriz de projeção de X a matriz P definida como:

$$P = X (X^t X)^{-1} X^t$$

O tamanho da matriz P e o resultado da multiplicação PX são, respectivamente,

a) 5×5 e X^t. b) 5×5 e X.
c) 5×7 e XX^t. d) 7×7 e X^t.
e) 7×7 e X.

10) (AFA-12) Uma montadora de automóveis prepara três modelos de carros, a saber:

MODELO	1	2	3
CILINDRADA (em litro)	1.0	1.4	1.8

Essa montadora divulgou a matriz abaixo em que cada termo a_{ij} representa a distância percorrida, em km, pelo modelo i, com um litro de combustível, à velocidade 10j km/ h.

$$\begin{bmatrix} 6 & 7,6 & 7,2 & 8,9 & 8,2 & 11 & 10 & 12 & 11,8 \\ 5 & 7,5 & 7 & 8,5 & 8 & 10,5 & 9,5 & 11,5 & 11 \\ 3 & 2,7 & 5,9 & 5,5 & 8,1 & 7,4 & 9,8 & 9,4 & 13,1 \end{bmatrix}$$

Com base nisso, é correto dizer que

a) para motoristas que somente trafegam a 30 km/h, o carro 1.4 é o mais econômico.
b) se durante um mesmo período de tempo um carro 1.4 e um 1.8 trafegam a 50 km/h, o 1.4 será o mais econômico.
c) para motoristas que somente trafegam a velocidade de 70 km/h, o carro 1.8 é o de maior consumo.
d) para motoristas que somente trafegam a 80 km/ h, o carro 1.0 é o mais econômico.

11) (Unesp-02) Considere três lojas, L_1, L_2 e L_3, e três tipos de produtos, P_1, P_2 e P_3. A matriz a seguir descreve a quantidade de cada produto vendido por cada loja na primeira semana de dezembro. Cada elemento a_{ij} da matriz indica a quantidade do produto P_i vendido pela loja L_j, i, j = 1, 2, 3.

	L_1	L_2	L_3
P_1	30	19	20
P_2	15	10	8
P_3	12	16	11

Analisando a matriz, podemos afirmar que

a) a quantidade de produtos do tipo P_2 vendidos pela loja L_2 é 11.
b) a quantidade de produtos do tipo P_1 vendidos pela loja L_3 é 30.
c) a soma das quantidades de produtos do tipo P_3 vendidos pelas três lojas é 40.

d) a soma das quantidades de produtos do tipo P_i vendidos pelas lojas L_i, $i = 1,2,3$, é 52.

e) a soma das quantidades dos produtos dos tipos P_1 e P_2 vendidos pela loja L_1 é 45.

12) (Unesp-06) Numa pequena cidade realizou-se uma pesquisa com certo número de indivíduos do sexo masculino, na qual procurou-se obter uma correlação entre a estatura de pais e filhos. Classificaram-se as estaturas em 3 grupos: alta (A), média (M) e baixa (B). Os dados obtidos na pesquisa foram sintetizados, em termos de probabilidades, na matriz

$$\begin{array}{c} \\ \text{Pai} \end{array} \begin{array}{c} \overbrace{}^{\text{Filho}} \\ \begin{matrix} A & M & B \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ M \\ B \end{matrix} \end{array} \begin{bmatrix} 5/8 & 1/4 & 1/8 \\ 3/8 & 3/8 & 1/4 \\ 1/8 & 3/8 & 1/2 \end{bmatrix}$$

O elemento da primeira linha e segunda coluna da matriz, que é 1/4, significa que a probabilidade de um filho de pai alto ter estatura média é 1/4. Os demais elementos interpretam-se similarmente. Admitindo-se que essas probabilidades continuem válidas por algumas gerações, a probabilidade de um neto de um homem com estatura média ter estatura alta é:

a) 13/32 b) 9/64 c) 3/4
d) 25/64 e) 13/16

13) (Unicamp-08) Uma matriz real quadrada P é dita ortogonal se $P^T = P^{-1}$, ou seja, se sua transposta é igual a sua inversa.

a) Considere a matriz P abaixo. Determine os valores de a e b para que P seja ortogonal. Dica: você pode usar o fato de que $P^{-1}P = I$, em que I é a matriz identidade.

$$P = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 \\ -2/3 & a & -1/3 \\ -2/3 & b & 2/3 \end{bmatrix}$$

b) Uma certa matriz A pode ser escrita na forma A = QR, sendo Q e R as matrizes abaixo. Sabendo que Q é ortogonal, determine a solução do sistema Ax = b, para o vetor b dado, sem obter explicitamente a matriz A.

Dica: lembre-se de que $x = A^{-1}b$.

$$Q = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 1/2 & -1/2 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

14) (FGV-04) Com relação à matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, a opção correta é:

a) $A^{24} = I_2$, sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2.
b) $A^{22} = I_2$, sendo I_2 a matriz identidade de ordem 2.
c) $A^{21} = A$
d) $A^{21} = A^2$
e) $A^{22} = A^2$

15) (FGV-05) O montante aplicado de R$ 50.000,00 foi dividido em duas partes, x e y, uma tendo rendido 1% em um mês, e a outra 10% no mesmo período. O total dos rendimentos dessa aplicação foi de R$ 4.000,00. Sendo M, P e Q as matrizes $M = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 50 \\ 4 \end{bmatrix}$ e

$Q=\begin{bmatrix}1 & 0{,}01\\ 1 & 0{,}1\end{bmatrix}$, a matriz M pode ser obtida pelo produto

a) $1000.(P^t.Q)^{-1}$ b) $P^t.Q.1000$
c) $Q^{-1}.P.1000$ d) $1000.(Q^t)^{-1}.P$
e) $(Q^{-1}).P^t.1000$

16) (Insper-16) Matrizes de Vandermonde são matrizes quadradas em que os elementos ao longo de cada linha formam progressões geométricas de primeiro termo igual a 1, não necessariamente com a mesma razão para cada linha. Por exemplo, a matriz B a seguir, de ordem 4, é de Vandermonde:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 5 & 25 & 125\\ 1 & 3 & 9 & 27\\ 1 & -3 & 9 & -27\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8}\end{bmatrix}$$

Seja V uma matriz de Vandermonde de ordem 3 em que a PG formada com os elementos da 1.ª linha tem razão 2, a PG formada com os elementos da 2.ª linha tem razão 3 e a PG formada com os elementos da 3.ª linha tem razão – 2. Considere a matriz X, do tipo 3×1, tal que $V.X=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$, sendo a, b e c constantes reais. O valor do elemento que ocupa a 2.ª linha de X é necessariamente igual a

a) 1 b) (a + c)/2 c) 0
d) (a – c)/2 e) b + c

17) (UFMT-04) Uma maneira para codificar ou decodificar uma mensagem é utilizar a multiplicação de matrizes. Para tanto, associam-se as letras do alfabeto e alguns símbolos aos números, segundo a correspondência a seguir.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	.	,	#
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29

Nesse exemplo, o símbolo # indica um espaço entre as palavras. A mensagem codificada a ser enviada 63 20 42 12 113 44 15 32 11 84 está representada pela matriz:

$$N=\begin{pmatrix}63 & 20 & 42 & 12 & 113\\ 44 & 15 & 32 & 11 & 84\end{pmatrix},$$

obtida do produto entre a matriz $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ e a matriz M que contém a mensagem original decodificada (N = A.M). Para decodificar a mensagem, multiplica-se a matriz inversa de A pela matriz N obtendo-se a matriz M ($M = A^{-1}.N$). Assim sendo, a mensagem, após decodificada, será

a) AME O BEM
b) SONHE ALTO
c) CANTE ALTO
d) SEJA FELIZ
e) VIVA A PAZ

18) (Fuvest-12) Considere a matriz $A=\begin{bmatrix}a & 2a+1\\ a-1 & a+1\end{bmatrix}$ em que a é um número real. Sabendo que A admite inversa A^{-1} cuja primeira coluna é $\begin{bmatrix}2a-1\\ -1\end{bmatrix}$, a soma dos elementos da diagonal principal de A^{-1} é igual a

a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

19) (UERJ-99) João comeu uma salada de frutas com a, m e p porções de 100 g

de abacaxi, manga e pêra, respectivamente, conforme a matriz X. A matriz A representa as quantidades de calorias, vitamina C e cálcio, em mg, e a matriz B indica os preços, em reais, dessas frutas em 3 diferentes supermercados. A matriz C mostra que João ingeriu 295,6 cal, 143,9 mg de vitamina C e 93 mg de cálcio.

MATRIZ X (Porções de 100 g)

Abacaxi	a
Manga	m
Pêra	p

MATRIZ A (por cada 100g)

	Abacaxi	Manga	Pêra
Calorias	5,2	64,3	63,3
Vitamina C	27,2	43	3,5
Cálcio	18	21	15

MATRIZ B (por cada 100g)

	Abacaxi	Manga	Pêra
Custo bom	0,15	0,30	0,40
Compremais	1,16	0,25	0,45
Bon Compra	0,20	0,27	0,35

MATRIZ C

Calorias	295,6
Vitamina C (mg)	143,9
Cálcio (mg)	93

Considerando que as matrizes inversas de A e B são A^{-1} e B^{-1}, o custo dessa salada de frutas, em cada supermercado, é determinado pelas seguintes operações:

a) $B.A^{-1}.C$ b) $C.A^{-1}.B$
c) $A^{-1}.B^{-1}.C$ d) $B^{-1}.A^{-1}.C$
e) $A.B^{-1}.C$

20) (UFC-04) A matriz quadrada M de ordem $n > 1$, satisfaz a equação $M^2 = M - I$, onde I é a matriz identidade de ordem $n > 1$. Determine, em termos de M e I, a matriz M^{2003}.

21) (UECE-15) Para cada inteiro positivo n, defina a matriz $M_n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A soma dos elementos da matriz produto $P = M_1.M_2.M_3...M_{21}$ é

A) 229. B) 231. C) 233. D) 235.

22) (FGV-18) Seja $A = (a_{ij})_{22}$ uma matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} -j^i, \text{ se } i = j \\ (-i)^j, \text{ se } i \neq j \end{cases}$. A inversa da matriz A, denotada por A^{-1}, é a matriz

a) $\begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1/6 & -2/3 \\ 1/6 & -2/3 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -1/6 & -2/3 \\ 1/6 & 2/3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -2/3 & -1/6 \\ 1/3 & -1/6 \end{bmatrix}$

23) (AFA-99) Se os elementos da matriz $A_{3\times4}$ são definidos por $a_{ij} = 2i - j$, então, o elemento b_{23} da matriz $B = 2^{-1}A.A^t$ é

a) 1. b) 7. c) 10. d) 13.

24) (Escola Naval-14) Considere as seguintes matrizes

$$R = \begin{bmatrix} 4 & 16^x & -1 \\ 9^x & a & 0 \end{bmatrix};$$

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 4^{2y-1} & 2^{-1} \\ 3^x & b & 1 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$T = \begin{bmatrix} b & 2^{2y-1} - 10 & c \\ 27 & 13 & -6 \end{bmatrix}$$

A soma dos quadrados das constantes reais x, y, a, b, c que satisfazem à equação matricial $R - 6S = T$ é

a) 23 b) 26 c) 29 d) 32 e) 40

25) (ITA-83) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, onde $a = 2^{(1+\log_2 5)}$; $b = 2^{\log_2 8}$; $c = \log_{\sqrt{3}} 81$ e $d = \log_{\sqrt{3}} 27$. Uma matriz real quadrada B, de ordem 2, tal que AB é a matriz identidade de ordem 2 é:

a) $\begin{bmatrix} \log_{\sqrt{3}} 27 & 2 \\ 2 & \log_{\sqrt{3}} 81 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ \sqrt{3} & -5 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 2 \\ 2 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \log_2 5 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} \log_2 5 & 3\log_{\sqrt{3}} 81 \\ 5 & -2^{\log_2 81} \end{bmatrix}$

26) (ITA-77) Seja $X = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ uma matriz quadrada 2×2 onde *m* é um número inteiro qualquer. Se P = (a_{ij}) é uma matriz definida por $P = X^n + X^{n-1} + X^{n-2} + \ldots + X$, onde n é um número inteiro positivo ($n \geq 1$), então podemos afirmar que:
a) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m.n.(n+1)/2$
b) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $m.n.(n-1)/2$
c) um elemento a_{ij} da matriz P é igual a $n.m.(m-1)/2$
d) P é uma matriz cujos elementos são todos inteiros, se, e somente se, *m* é par.
e) nenhuma das respostas anteriores

27) (ITA-87) Considere P a matriz inversa da matriz M, onde $M = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/7 & 1 \end{bmatrix}$. A soma dos elementos da diagonal principal da matriz P é:
a) 9/4 b) 4/9 c) 4 d) 5/9 e) −1/9

28) (ITA-02) Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação

$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \quad (1)$$

Então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

29) (IME CG-03) Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, calcule:
a) A^4;
b) A^k, como função de k, para k inteiro e maior que 1.

30) (ITA-99) Sejam x, y e z números reais com $y \neq 0$. Considere a matriz inversível $A = \begin{bmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Então:
a) A soma dos termos da primeira linha de A^{-1} é igual a x + 1.
b) A soma dos termos da primeira linha de A^{-1} é igual a 0.
c) A soma dos termos da primeira coluna de A^{-1} é igual a 1.
d) O produto dos termos da segunda linha de A^{-1} é igual a y.
e) O produto dos termos da terceira coluna de A^{-1} é igual a 1.

31) (ITA-01) Sejam A e B matrizes n×n, e B uma matriz simétrica. Dadas as afirmações:
I. $AB + BA^T$ é simétrica.
II. $(A + A^T + B)$ é simétrica.
III. ABA^T é simétrica.
temos que:
a) apenas I é verdadeira
b) apenas II é verdadeira
c) apenas III é verdadeira
d) apenas I e III são verdadeiras
e) todas as afirmações são verdadeiras

32) (ITA-00) Sendo x um número real positivo, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} \log_{1/3} x & \log_{1/3} x^2 & 1 \\ 0 & -\log_3 x & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \log_{1/3} x^2 \\ 1 & 0 \\ -3\log_{1/3} x & -4 \end{pmatrix}$$

A soma de todos os valores de x para os quais $(AB) = (AB)^T$ é igual a:

a) $\frac{25}{3}$ b) $\frac{28}{3}$ c) $\frac{32}{3}$ d) $\frac{27}{2}$ e) $\frac{25}{2}$

33) (ITA-01) Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{bmatrix}$$

. soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa de A é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

34) (ITA-02) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem n tais que AB = A e BA = B. Então, $[(A + B)^t]^2$ é igual a:

a) $(A + B)^2$. b) $2(A^t . B^t)$.
c) $2(A^t + B^t)$. d) $A^t + B^t$.
e) $A^t B^t$.

35) (ITA-04) Se A é uma matriz real, considere as definições:

I – Uma matriz quadrada A é ortogonal se e só se A for inversível e $A^{-1} = A^T$.

II – Uma matriz quadrada A é diagonal se e só $a_{ij} = 0$, para todo $i, j = 1, \ldots n$, com $i \neq j$.

Determine as matrizes quadradas de ordem 3 que são, simultaneamente, diagonais e ortogonais.

36) (IME-81) Mostre que não existem matrizes quadradas A e B que verifiquem AB – BA = I, onde I é a matriz identidade de uma ordem n qualquer.

37) (ITA-76) Se $P = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$ é matriz 3×3, então uma solução da equação $(P + X)^2 = P^2 + X^2 + 2PX$ é:

a) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

b) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

c) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

d) $X = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

e) n.d.r.a.

38) (IME CG-82) Determine a matriz *H* tal que *HA* = *B* onde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 5 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

39) (IME-87) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Encontre todas as matrizes B, 2×2, que comutam com A.
b) Calcule A^{-1}.
c) Mostre que $A^2 = 2A - I$, onde $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
d) Encontre a fórmula para A^n em função de A e I, e calcule A^{100}.

40) (IME CG-90) Determine todas as matrizes X reais, 2×2 tais que:

$$X^2 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

41) (IME-91) Determine todas as matrizes X reais, de dimensões 2×2, tais que AX = XA, para toda matriz A real 2×2.

42) (IME-99) Determine uma matriz não singular **P** que satisfaça à equação matricial $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, onde $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$.

43) (IME-02) Uma matriz quadrada é denominada ortogonal quando a sua transposta é igual a sua inversa. Considerando esta definição, determine se a matriz [R], abaixo, é uma matriz ortogonal, sabendo-se que n é um número inteiro e α é um ângulo qualquer. Justifique a sua resposta.

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos(n\alpha) & -\text{sen}(n\alpha) & 0 \\ \text{sen}(n\alpha) & \cos(n\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

44) (ITA-07) Sejam $A = (a_{jk})$ e $B = (b_{jk})$, duas matrizes quadradas n x n, onde a_{jk} e b_{jk} são, respectivamente, os elementos da linha j e coluna k das matrizes A e B, definidos por $a_{jk} = \binom{j}{k}$, quando $j \geq k$, $a_{jk} = \binom{k}{j}$, quando $j < k$ e $b_{jk} = \sum_{p=0}^{jk} (-2)^p \binom{jk}{p}$. O traço de uma matriz quadrada (c_{jk}) de ordem n×n é definido por $\sum_{p=1}^{n} C_{PP}$. Quando n for ímpar, o traço de A + B é igual a.
a) $n(n-1)/3$
b) $(n-1)(n+1)/4$
c) $(n^2 - 3n + 2)/(n-2)$
d) $3(n-1)/n$
e) $(n-1)/(n-2)$

45) (ITA-09) Dados $A \in M_{3\times 2}(IR)$ e $b \in M_{3\times 1}(IR)$, dizemos que $X_0 \in M_{2\times 1}(IR)$ é a melhor aproximação quadrática do sistema AX = b quando $\sqrt{(AX_0 - b)^t (AX_0 - b)}$ assume o menor valor possível. Então, dado o sistema: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, a sua melhor aproximação quadrática é:
a) $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

46) (ITA-15) Seja $A = (a_{ij})_{5\times 5}$ a matriz tal que $a_{ij} = 2^{i-1}(2j - 1)$, $1 \leq i, j \leq 5$. Considere as afirmações a seguir:
I. Os elementos de cada linha *i* formam uma progressão aritmética de razão 2^i.

II. Os elementos de cada coluna j forma uma progressão geométrica de razão 2
III. tr A é um número primo.
É (são) verdadeira(s)

a) apenas I
b) apenas I e II
c) apenas II e III
d) apenas I e III
e) I, II e III

47) (ITA-16) Se $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, então $MN^T - M^{-1}N$ é igual a.

a) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$
b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$
c) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$
d) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$
e) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{11}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$

48) (ITA-16) Seja A a matriz de ordem 3×2, dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

a) Determine todas as matrizes B tais que $BA = I_2$.
b) Existe uma matriz B com $BA = I_2$ que satisfaça $BB^T = I_2$? Se sim, dê um exemplo de uma dessas matrizes.

49) (IME-10) Demonstre que a matriz $\begin{bmatrix} y^2+z^2 & xy & xz \\ xy & x^2+z^2 & yz \\ xz & yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$, onde x, y, z ∈ IN, ser escrita como o quadrado de uma matriz simétrica, com traço igual a zero, cujos elementos pertencem ao conjunto dos números naturais.
OBS: Traço de uma matriz é a soma dos elementos de sua diagonal principal.

50) (IME-13) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Seja a matriz $B = \sum_{k=1}^{n} A^k$, com k e n números inteiros. Determine a soma, em função de n, dos quatro elementos da matriz B.

51) (IME-16) Seja $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. O maior valor de a, com $a \neq 1$, que satisfaz $A^{24} = I$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
d) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$
e) $\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$

52) (ITA-21) Seja A uma matriz real quadrada de ordem 2 tal que

$$A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$A\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ y+1 & 1 \end{pmatrix}$$

Então, o traço da matriz A é igual a:
a) 0. b) 1. b) 2. d) 3. e) 4.

Exercícios Gerais

53) Sendo A, B matrizes n×n, mostre que:
a) $(AB)^t = B^tA^t$
b) $A + A^t$ é simétrica
c) AA^t é simétrica
d) $A - A^t$ é anti-simétrica
e) $(A^2)^t = (A^t)^2$
f) $(A^3)^t = (A^t)^3$

54) Mostre que se a terceira linha de uma matriz m×n A é quatro vezes a primeira linha, então a terceira linha de AB é também igual a quatro vezes a primeira linha, sendo B uma matriz n×p.

55) Mostre que se

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

$\forall\, b_1, b_2 \in \Re$, então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}.$$

56) Uma matriz anti-simétrica é definida como sendo uma matriz tal que $A^t = -A$. Mostre que uma matriz anti-simétrica é quadrada, e que os elementos da diagonal são nulos.

57) Mostre que toda matriz quadrada n×n pode ser decomposta de maneira única na soma de uma matriz simétrica e de matriz anti-simétrica, isto é, dada A matriz n×n existem únicas matrizes n×n, B e C, tais que $B^t = B$, $C^t = -C$ e $A = B + C$.

58) Dizemos que uma matriz quadrada é não-singular se possui inversa. Sejam A e B matrizes n×n não-singulares, mostre que:
a) $(A^{-1})^{-1} = A$ b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

59) Achar todas as matrizes X 2×2 tais que $X^2 = I$, onde I é a matriz identidade 2×2.

60) Uma matriz n×n A é nilpotente se $A^r = O$ para algum inteiro positivo r. Dê exemplo de uma matriz não-nula 2×2 nilpotente.

61) Uma matriz quadrada é idempotente se $A^2 = A$. Dê exemplo de uma matriz idempotente diferente da matriz nula e da matriz identidade.

62) Construa matrizes A e B, 2×2, sem coeficientes nulos, e tais que $AB = O$.

63) Ache duas matrizes 2×2, X e Y, tais que nenhuma delas seja a matriz nula, e tais que $X^2 + Y^2 = O$.

64) Que matrizes reais satisfazem $A^tA = O$?

65) Suponha que A é uma matriz 2×2 que comuta com qualquer matriz 2×2. Mostre que A deve ser múltiplo da matriz identidade.

66) Mostre que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$, logo conclua que se A é simétrica então A^{-1} também o é, sendo A uma matriz quadrada inversível.

67) O traço de uma matriz quadrada, representado por tr A, é a soma de seus

elementos sobre a diagonal, isto é, $\text{tr } A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Mostre que:

a) Se $k \in \Re$, $\text{tr}(k.A) = k.\text{tr } A$,
b) $\text{tr}(A \pm B) = \text{tr } A \pm \text{tr } B$,
c) $\text{tr } AB = \text{tr } BA$,
d) $\text{tr}(B^{-1}AB) = \text{tr } A$,
e) $\text{tr}(AA^t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})^2$.

68) Uma matriz real n×n A que satisfaz as relações $AA^t = A^tA = I$ é chamada ortogonal.
a) Dê exemplo de uma matriz ortogonal 2×2, distinta da identidade.
b) Ache a matriz ortogonal geral 2×2.
c) Mostre que o produto de duas matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.
d) Mostre que a inversa de uma matriz ortogonal é uma matriz ortogonal.

69) Prove que A^2 é simétrica quer A seja simétrica quer seja A anti-simétrica.

70) Se A e B são ambas simétricas, prove que:
a) A + B é simétrica.
b) AB é simétrica se, e somente se, A e B comutam.

71) Resolver o sistema: $\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = 2B \end{cases}$ onde $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$

72) Determinar x e y de modo que as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{bmatrix}$ comutem.

73) Obter todas as matrizes *B* que comutam com $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$.

74) Calcular as matrizes X, quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = O$.

75) Calcular as matrizes X, quadradas de ordem 2, tais que $X^2 = X$.

76) Sabendo que A, B e C são matrizes quadradas de ordem n inversíveis e AXB = C, prove que $X = A^{-1}CB^{-1}$

77) Sendo A e B matrizes inversíveis de ordem n, isolar X a partir de cada equação abaixo:

a) $AX = B$ d) $BAX = A$
b) $AXB = I_n$ e) $(AX)^t = B$
c) $(AX)^{-1} = B$ f) $(A + X)^t = B$

78) Demonstrar que se A e B são matrizes 2×2 inversíveis então:
$(ABA^{-1})^{-1} = AB^{-1}A^{-1}$.

79) Prove que $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

80) Prove que:
$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$$

81) Prove que se AB = BA, então $A^{-1}B = BA^{-1}$

82) Uma matriz diz-se fragmentada se for dividida em matrizes mais pequenas (submatrizes) por traços horizontais ou verticais traçados entre linhas e colunas inteiras. As operações aritméticas

definidas para as matrizes contendo elementos escalares aplicam-se também às matrizes fragmentadas. Determine AB se $A = \begin{bmatrix} C & D \\ E & C \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} F & G \\ F & E \end{bmatrix}$, onde C, D, E, F e G são matrizes 2×2.

83) A matriz quadrada A diz-se nilpotente se $A^p = 0$ para alguns inteiros positivos p. Se p for o menor inteiro positivo para o qual $A^p = 0$, então A diz-se nilpotente de índice p. Mostre que $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$ é nilpotente de índice 3.

84) Uma matriz quadrada diz-se idempotente se $A^2 = A$. Prove que, se A for idempotente, então também o é $I - A$.

85) Prove que a inversa de uma matriz triangular inferior A com elementos com os elementos da diagonal diferentes de zero é ela própria uma matriz triangular inferior.

86) Uma matriz A é congruente com uma matriz B com a mesma ordem se existir uma matriz real P não-singular tal que $A = PBP^T$.
a) Mostre que se A é congruente com B e B é congruente com C então A é congruente a C.
b) Mostre que se A é congruente com B, então B é congruente com A.

87) Se $A^k = O$, prove que: $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1}$

88) Achar a potência enésima da matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

89) Prove que a solução do sistema de equações matriciais $\begin{cases} AX + BY = C \\ BX + CY = A \end{cases}$ é dada por $Y = (B^2 - AC)^{-1}.(BC - A^2)$ e $X = C - B(B^2 - AC)^{-1}(BC - A^2)$

90) Prove que toda matriz 2×2 $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$ satisfaz a equação:
$X^2 - (a + d)X + (ad - bc)I = 0.$

91) Determine todas as matrizes que comutam com:
a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$;
b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

92) Considere uma matriz A de ordem 2×2 tal que $A^3 = 0_{2\times2}$. Demonstre que $A^2 = 0_{2\times2}$.

93) Determine a matriz X que satisfaz a seguinte equação:
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

94) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calcule o valor de:

$tr[(I + A)(I + 2A)(I + 3A)...(I + 2018A)]$

95) Considere a matriz $A_{3\times3}$ dada por $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Se n é um número inteiro positivo, demonstre que:

$$A^n = (-1)^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{2^n - (-1)^n}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

96) Considere as afirmações:

I – Em $\left[\left(A^{-1} \cdot X \cdot B^t \cdot C - 1\right)^{-1} + A\right]^t = I$, a matriz **X** é igual a: $A \cdot \left[\left(I - A\right)^{-1} + I\right] \cdot C^{-1} \cdot \left(B^t\right)^{-1}$

II – Se $A^3 = 0$, então $(I - A)^{-1} = I + A + A^2$, com $A_{n\times n}$, $O_{n\times n}$, $X_{n\times n}$, $I_{n\times n}$.

III – Se as matrizes **A** e **B** comutam, **A** é simétrica e **B** é anti-simétrica, então **(A.B)** é anti-simétrica.

IV – Existe uma única matriz $X = (x_{ij})$, tal que $AX - XA = I$, com $A_{n\times n}$, $X_{n\times n}$, e $I_{n\times n}$.

São verdadeiras:

a) todas
b) nenhuma
c) apenas I e II
d) apenas II e III
e) N. D. A.

97) Sejam A e B matrizes n×n. Prove que se I – AB é invertível, então I – BA também é invertível e:

$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}.A$.

98) Determine todas as matrizes 2×2 cujos cubos são iguais à matriz identidade de ordem 2.

99) Determine todas as matrizes 2×2 cujas quartas potências são iguais à matriz identidade de ordem 1.

100) Se A é uma matriz n×n tal que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

demostre que:

$$A^{n-1} = \begin{pmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

101) Comprovar que quaisquer das três propriedades da matriz quadrada: ser simétrica, ser ortogonal ou ser involutiva, se demonstram a partir da ocorrência das outras duas.

102) Demonstrar que:

a) se P é idempotente 2P – I é involutiva.

b) Se X é involutiva, P = (X + I)/2 é idempotente.

DETERMINANTE

11.1. DEFINIÇÃO

Determinante é um número associado à uma matriz quadrada, cujo cálculo envolve todos os elementos da matriz. Não é definido determinante para matrizes que não são quadradas.

A notação da operação determinante em uma matriz quadrada A pode ser representada por det(A), por |A| ou mesmo escrevendo os elementos da matriz dentro de barras verticais. Por exemplo, se $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ então pode-se escrever que $\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}$. Apesar de possuir uma notação idêntica ao módulo de números reais e complexos, o determinante de uma matriz pode assumir valores negativos.

A aplicação de determinantes é bastante extensa, inclusive em outras disciplinas, como a Física. Vamos destacar as duas aplicações mais usadas pelos alunos no ensino médio. A primeira aplicação importante de determinantes é na geometria analítica. Se $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ e $C(x_C, y_C)$ são as coordenadas de três pontos distintos no plano cartesiano, os pontos A, B e C serão colineares se e somente o determinante $\begin{vmatrix}x_A & y_A & 1\\ x_B & y_B & 1\\ x_C & y_C & 1\end{vmatrix}$ for nulo. Caso não seja nulo, o módulo do valor do determinante é igual ao dobro da área do triângulo ABC.

A segunda aplicação mais conhecida de determinantes é na resolução de sistemas lineares. Por exemplo, considere um sistema linear 2×2 que possua solução única: $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$. Resolvendo o sistema, encontra-se como conjunto solução $x=\dfrac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$ e $y=\dfrac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}$. Perceba que os denominadores de x e y são iguais e seus valores envolvem todos os coeficientes de x e y no sistema linear. Isto ocorre em todos os sistemas n×n com solução única: é possível determinar fórmulas para os valores das variáveis e em todas as fórmulas os denominadores são todos iguais e envolvem apenas os coeficientes das variáveis. Esses denominadores idênticos são iguais ao determinante da matriz formada pelos coeficientes do sistema linear, também conhecido como matriz principal do sistema. No caso de um sistema 2×2 do tipo $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y=b_2\end{cases}$, segue que $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$.

11.2. FÓRMULAS PARA MATRIZES 1×1, 2×2 E 3×3

No próximo item será enunciada a definição geral de determinante de uma matriz quadrada n×n, que permitirá calcular o determinante de qualquer matriz quadrada. Entretanto, para os casos de matrizes de ordens 1×1, 2×2 e 3×3 é possível encontrar fórmulas simples para seus determinantes em função dos elementos da matriz. As demonstrações das fórmulas dos casos de matrizes 1×1, 2×2 e 3×3 serão feitas no próximo item, quando for definida a operação determinante de uma matriz quadrada n×n.

11.2.1. Matriz 1×1

Seja a matriz $A_{1\times1} = (a_{11})$, então seu determinante tem como valor o único elemento da matriz: **det A = a_{11}**. Por exemplo, se $A = (-6)_{1\times1}$, então det A = – 6.

11.2.2. Matriz 2×2

Se $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ então **det A = $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$**. Por exemplo, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, então det A = 1.4 – 2.3 = 4 – 6 = – 2.

11.2.3. Matriz 3×3

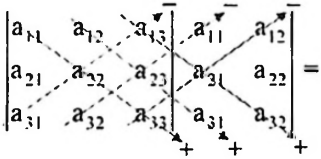
O caso de matriz quadrada 3×3 é o limite em que existe uma fórmula simples para ser memorizada. Se $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ então:

det A = $a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, a_{31} - a_{11}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, a_{21}\, a_{33}$

Essa expressão pode ser facilmente obtida usando um dispositivo prático conhecido como regra de Sarrus:

1) Repete-se, em ordem e no lado direito do quadro matricial, as duas primeiras colunas da matriz;

2) Se calcula todos os produtos com 3 elementos que ocupam posições paralelas às diagonais principais e secundária da matriz, sendo que os obtidos segundo a direção da diagonal principal conservarão o sinal enquanto os obtidos segundo a direção da diagonal secundária mudarão de sinal.



= ($a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$) – ($a_{12}\, a_{21}\, a_{33} + a_{11}\, a_{23}\, a_{32} + a_{13}\, a_{22}\, a_{31}$)

Vamos agora aplicar agora a regra de Sarrus para calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$= 1.1.3 + 0.(-3).(-1) + (-2).(-2).0 - (-1).1.(-2) - 0.(-3).1 - 3.(-2).0 =$
$= 3 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = 1.$

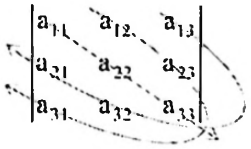
Também é possível aplicar a Regra de Sarrus para calcular o valor do determinante de matrizes cujos elementos são expressões algébricas. Por exemplo, usando um pouquinho de álgebra é possível aplicar a regra de Sarrus para calcular o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{bmatrix}$:

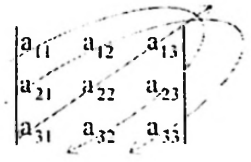
$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c & -2a & a+b \\ a+b & -2b & b+c & a+b & -2b \\ a+c & b+c & -2c & a+c & b+c \end{vmatrix} =$$

$= -8abc + (a+b)(b+c)(a+c) + (a+c)(a+b)(b+c) + 2b(a+c)^2 + 2a(b+c)^2 + 2c(a+b)^2 =$
$= 2(a+b)(a+c)(b+c) - 8abc + 2a^2b + 4abc + 2bc^2 + 2ab^2 + 4abc + 2ac^2 + 2a^2c + 4abc + 2b^2c =$
$= 2(a+b)(a+c)(b+c) + 2(a^2b + ab^2 + a^2c + abc + ac^2 + bc^2 + b^2c + abc) =$
$= 2(a+b)(a+c)(b+c) + 2[ab(a+b) + ac(a+b) + c^2(a+b) + bc(a+b)] =$
$= 2(a+b)(a+c)(b+c) + 2(a+b)(ab + ac + c^2 + bc) =$
$= 2(a+b)(a+c)(b+c) + 2(a+b)[a(b+c) + c(b+c)] =$
$= 2(a+b)(a+c)(b+c) + 2(a+b)(a+c)(b+c) =$
$= 4(a+b)(a+c)(b+c)$

Observação:

(1) Depois de calcular algumas vezes um determinante de uma matriz 3×3 pela regra de Sarrus, o leitor poderá verificar que não será mais necessário escrever as duas primeiras colunas na continuação da última coluna da matriz. A prática levará ao leitor a fazer o cálculo mentalmente, olhando diretamente para a matriz original.





Exercícios Resolvidos

1) Calcule o valor de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

Solução:

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \\ 3 & 5 \end{matrix} = (0 + 12 + 60) - (8 + 10 + 0) = 72 - 18 = 54$$

2) Resolva a equação $\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$

Solução:

Aplicando a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & x \end{vmatrix} \begin{matrix} x & 1 \\ 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{matrix} = (4x^2 - 4 + 30) - (3x - 5x + 32) = 4x^2 + 26 + 2x - 32 =$$

$$= 4x^2 + 2x - 6 = 2(x - 1)(2x + 3) = 0 \Rightarrow x' = 1 \text{ e } x'' = -\frac{3}{2}$$

3) A equação $\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 13 & x \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix}$ é válida para todo x pertencente ao conjunto:

a) {1, 6} b) {1, 7} c) {1, -7} d) {-1, 7} e) {-1, -7}

Solução: Alternativa D

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 13 & x \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & x \\ 2 & 13 \\ 1 & 3 \end{matrix} = (0 + x^2 + 6) - (0 + 3x + 13) = x^2 - 3x - 7 \text{ e } \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 3x$$

Logo: $x^2 - 3x - 7 = 3x \Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0 \Rightarrow x' = 7$ e $x'' = -1$

4) Considere a equação $\det(A - xI) = 0$ onde $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. A soma das raízes dessa equação é:

Solução:

Perceba que: $A - xI = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & 4-x \end{vmatrix} = (1-x)(4-x) - 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 5x - 2 = 0 \Rightarrow S = x' + x'' = 5$$

5) Determine o valor máximo do determinante de uma matriz 3×3 cujos elementos são todos iguais a 1 ou – 1.

Solução:

Seja $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Pela regra de Sarrus sabe-se que:

$\det A = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{12}\,a_{23}\,a_{31} + a_{13}\,a_{21}\,a_{32} - a_{12}\,a_{21}\,a_{33} - a_{11}\,a_{23}\,a_{32} - a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$

Como todos os elementos da matriz são iguais a ± 1, todos os produtos de três elementos da matriz também são iguais a ± 1. Assim, o primeiro candidato a valor máximo do determinante de A é 6, que ocorreria caso todas as três parcelas positivas da regra de Sarrus fossem iguais a 1 e as três parcelas negativas da regra de Sarrus fossem iguais a – 1. Vamos verificar se isso é possível de ocorrer:

$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} = 1 \quad a_{12}\,a_{23}\,a_{31} = 1 \quad a_{13}\,a_{21}\,a_{32} = 1$

$a_{12}\,a_{21}\,a_{33} = -1 \quad a_{11}\,a_{23}\,a_{32} = -1 \quad a_{13}\,a_{22}\,a_{31} = -1$

Multiplicando essas seis igualdades:

$(a_{11}a_{22}a_{33})(a_{12}a_{23}a_{31})(a_{13}a_{21}a_{32})(a_{12}a_{21}a_{33})(a_{11}a_{23}a_{32})(a_{13}a_{22}a_{31}) = 1.1.1.(-1)(-1)(-1) \Rightarrow$

$(a_{11}a_{12}a_{13}a_{21}a_{22}a_{23}a_{31}a_{32}a_{33})^2 = -1$, que é um absurdo!!!

Logo, não é possível que o determinante de uma matriz 3×3, cujos elementos sejam iguais a + 1 ou – 1, seja igual a 6.

O próximo candidato a valor máximo do determinante é 4, que ocorre quando as três parcelas positivas da regra de Sarrus são iguais a 1, duas das parcelas negativas são iguais a – 1 e a terceira parcela negativa é igual a 1.

$$\det A = +1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 4$$

Neste caso, basta dar um exemplo de matriz em que isso ocorra. Observe que a matriz abaixo satisfaz o determinante valer 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Assim, conclui-se que o valor máximo do determinante de uma matriz 3×3, cujos elementos são todos iguais a + 1 ou – 1, é igual a 4.

11.3. DEFINIÇÃO GERAL DE DETERMINANTE

Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz real quadrada de ordem n. Consideremos um produto da forma:

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$$

onde σ é uma permutação dos números 1, 2, ..., n. Neste produto aparece apenas um elemento de cada linha de A e apenas um elemento de cada coluna de A. Este produto será multiplicado por $(-1)^k$, onde k é a quantidade de vezes que $\sigma(i) > \sigma(j)$, para todos os pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$. Por exemplo, no cálculo do determinante de uma matriz 5×5, a parcela $a_{13}.a_{21}.a_{32}.a_{45}.a_{54}$ apresenta k = 3, uma vez que na permutação $\underline{3}\ \underline{1}\ \underline{2}\ \underline{5}\ \underline{4}$ tem-se 3 > 1, 3 > 2 e 5 > 4. Logo, a parcela completa é dada por:

$$-a_{13}.a_{21}.a_{32}.a_{45}.a_{54}$$

A soma de todas as n! parcelas da forma $(-1)^k a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$, obtidas fazendo σ percorrer todas permutações de 1, 2, ..., n, é o determinante de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$:

$$\det A = \sum_{\sigma}(-1)^k a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$$

Vamos agora aplicar a definição geral de determinante para demonstrar a fórmula do determinante da matriz 3×3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$. Todas as parcelas são da forma $(-1)^k a_{1x}a_{2y}.a_{3z}$, onde $\underline{x}\ \underline{y}\ \underline{z}$ é uma permutação de $\underline{1}\ \underline{2}\ \underline{3}$ onde k é a quantidade de vezes que ocorre x > y ou y > z ou x > z. Vamos agora avaliar o valor do k de cada parcela:

i) em $a_{11}.a_{22}.a_{33}$ tem-se k = 0: $+ a_{11}.a_{22}.a_{33}$
ii) em $a_{11}.a_{23}.a_{32}$ tem-se k = 1 (2 > 3): $- a_{11}.a_{23}.a_{32}$
iii) em $a_{12}.a_{21}.a_{33}$ tem-se k = 1 (2 > 1): $- a_{12}.a_{21}.a_{33}$
iv) em $a_{12}.a_{23}.a_{31}$ tem-se k = 2 (2 > 1 e 3 > 1): $+ a_{12}.a_{23}.a_{31}$
v) em $a_{13}.a_{22}.a_{31}$ tem-se k = 3 (3 > 2, 3 > 1 e 2 > 1): $- a_{13}.a_{22}.a_{31}$
vi) em $a_{13}.a_{21}.a_{32}$ tem-se k = 2 (3 > 1 e 3 > 2): $+ a_{13}.a_{21}.a_{32}$

Somando as seis parcelas:

$$\det(A) = + a_{11}.a_{22}.a_{33} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} - a_{13}.a_{22}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$$

Como o leitor pode verificar, bate perfeitamente com a fórmula obtida pela regra de Sarrus. Entretanto, o autor desse livro sugere fortemente que seja usada a regra de Sarrus para o cálculo do determinante de uma matriz 3×3. A utilização aqui da definição de determinante foi apenas no sentido de fazer uma demonstração da regra de Sarrus.

Pode-se aplicar o mesmo processo pra determinar o determinante de uma matriz 4×4 qualquer. Se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$ e D = det A então:

$$D = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + a_{11}a_{23}a_{34}a_{42} + a_{11}a_{24}a_{32}a_{43} + a_{12}a_{21}a_{34}a_{43} + a_{12}a_{23}a_{31}a_{44} + a_{12}a_{24}a_{33}a_{41} +$$
$$+ a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} + a_{13}a_{21}a_{32}a_{44} + a_{13}a_{24}a_{31}a_{42} + a_{14}a_{21}a_{33}a_{42} + a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} + a_{14}a_{22}a_{31}a_{43} -$$
$$- a_{11}a_{22}a_{34}a_{43} - a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} - a_{11}a_{24}a_{33}a_{42} - a_{12}a_{21}a_{33}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} - a_{12}a_{24}a_{31}a_{43} -$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31}a_{44} - a_{13}a_{21}a_{34}a_{42} - a_{13}a_{24}a_{32}a_{41} - a_{14}a_{21}a_{32}a_{43} - a_{14}a_{23}a_{31}a_{42} - a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$$

Nessa altura o desespero deve ter pairado na cabeça dos leitores! Certamente a frase "Mas eu vou ter que decorar essa fórmula com 24 parcelas?" surgiu imediatamente na mente de muitos. O autor se sente na obrigação de tranquilizar todos os leitores: **NÃO** é necessário decorar nenhuma fórmula de determinantes obtida a partir da definição. A partir do próximo tópico serão enunciados algoritmos práticos para o cálculo de determinantes de matrizes quadradas de ordem maior que 3. O intuito mesmo foi mostrar que nenhum determinante é calculado pela definição, sempre existem regras, algoritmos ou propriedades que deixam o cálculo bem mais simples.

Observações:

(1) Note que, pela definição, o cálculo de um determinante envolve a soma ou subtração de n! parcelas. Porém, se um elemento for nulo, (n – 1)! parcelas são nulas, facilitando o cálculo.

(2) Existe um outro motivo pelo qual esse livro dá tanta atenção para a definição de determinantes, além de mostrar que o cálculo de um determinante pela definição nunca é a melhor opção. Várias propriedades de determinantes são demonstradas de forma mais simples utilizando a definição.

11.4. ALGORITMOS PRÁTICOS PRO CÁLCULO DO DETERMINANTE

11.4.1. Menor Complementar de um Elemento

Definição: Dada uma matriz A de ordem $n \geq 2$ chama-se menor complementar de um elemento a_{ij} e representa-se por M_{ij} ao determinante da submatriz de A obtida pelas eliminações da linha i e coluna j de A. Por exemplo, pode-se calcular o valor de $M_{21} + M_{33}$ da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 21 = -11 \\ 2)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 1 \\ 0 & 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 8 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow M_{21} + M_{33} = -11 - 2 = -13$$

11.4.2. Cofator ou Complemento Algébrico de um Elemento

Definição: Dada uma matriz quadrada A, de ordem $n \geq 2$, chama-se cofator de um elemento a_{ij} e representa-se por A_{ij} ao número $(-1)^{i+j}.M_{ij}$. Por exemplo, na matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & -8 \end{pmatrix}$ é possível calcular A_{23}:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 7 & 6 & -8 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3}.M_{23} = (-1)^5.\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = (-1).(6 - 14) = 8$$

Observação:

(1) Pelos exemplos acima verificamos que o cofator de um elemento a_{ij} será igual ao menor complementar se i + j é par e será simétrico se i + j for ímpar.

(2) O próprio elemento não participa do cálculo do cofator.

11.4.3. Regra de Laplace

O determinante da matriz A de ordem $n \geq 2$ é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos seus respectivos cofatores. Se escolhermos a linha i da matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{in}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Então: $\det A = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \ldots + a_{in}.A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij}$

Se escolhermos a coluna j de A teremos:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \boxed{a_{2j}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \boxed{\cdots} & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nj}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Então: $\det A = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \ldots + a_{nj}.A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.A_{ij}$

Demonstração:

A demonstração da regra de Laplace será feita lançando mão do recurso da indução finita. Inicialmente vamos provar que o resultado é válido para n = 2, ou seja, válido para uma matriz da forma $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Aplicando a regra na 1ª linha:

$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}.(-1)^2.a_{22} + a_{12}.(-1)^3.a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$

De forma análoga, pode-se demonstrar que o resultado é válido também para a aplicação da regra de Laplace na 2ª linha, 1ª coluna ou 2ª coluna de A. Suponhamos agora que a proposição é válida para todas as matrizes quadradas de ordem n – 1. Note que os menores complementares de A são matrizes quadradas de ordem n – 1. Suponha que M_{ij} seja o menor complementar do elemento a_{ij} de A e M_{ij}^{kl} o menor complementar obtido eliminando as linhas i e k e as colunas j e l na matriz A. Fixando a coluna k da matriz A ($1 < k \leq n$), pode-se escrever que:

$$D = a_{1k}.(-1)^{1+k}.M_{1k} + a_{2k}.(-1)^{2+k}.M_{2k} + \ldots + a_{nk}.(-1)^{n+k}.M_{nk}$$

Desenvolvendo os determinantes M_{1k}, M_{2k}, ... e M_{nk} pela 1ª coluna:

$$D = a_{1k}.(-1)^{1+k}\left(\sum_{i>1} a_{i1}.(-1)^{i}.M_{1k}^{i1}\right) + a_{2k}.(-1)^{2+k}\left(a_{11}M_{2k}^{11} + \sum_{i>2} a_{i1}.(-1)^{i}.M_{2k}^{i1}\right) + \ldots +$$

$$+ a_{nk}.(-1)^{n-k}\left(a_{11}D_{nk}^{11} - a_{21}M_{nk}^{21} + \ldots \pm a_{n-1\,1}M_{nk}^{n-1\,1}\right)$$

Nesta expressão de D, considere apenas as parcelas que possuem a_{11}:

$$a_{11}\left[a_{2k}(-1)^{2-k}M_{2k}^{11} + a_{3k}(-1)^{3+k}M_{3k}^{11} + \ldots + a_{nk}(-1)^{n+k}M_{nk}^{11}\right] =$$

$$= a_{11}\left[a_{2k}(-1)^{k}M_{2k}^{11} + a_{3k}(-1)^{k+1}M_{3k}^{11} + \ldots + a_{nk}(-1)^{n+k-2}M_{nk}^{11}\right] = a_{11}M_{11}$$

Agora contabilizando apenas as parcelas que possuem a_{21}:

$$a_{21}\left[a_{1k}(-1)^{1+k}M_{1k}^{21} - a_{3k}(-1)^{3+k}M_{3k}^{21} - \ldots - a_{nk}(-1)^{n+k}M_{nk}^{21}\right] =$$

$$= a_{21}\left[-a_{1k}(-1)^{k}M_{1k}^{21} - a_{3k}(-1)^{k+1}M_{3k}^{21} - \ldots - a_{nk}(-1)^{n+k-2}M_{nk}^{21}\right] = -a_{21}M_{21}$$

Continuando com esse processo, a parcela com a_{31} vale $a_{31}M_{31}$, a parcela com a_{41} é igual a $-a_{41}M_{41}$ e assim por diante.

Portanto, segue que $D = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31} - a_{41}M_{41} + \ldots \pm a_{n1}M_{n1} = \det A$.

Observe que este resultado é válido para qualquer coluna k de A, com $1 < k \leq n$. Fazendo cálculos análogos pode-se demonstrar que a propriedade também é válida para qualquer linha i de A ($1 < i \leq n$), para a 1ª coluna de A e também para a 1ª linha de A. Desta forma, por indução finita, segue que a regra de Laplace é válida para qualquer matriz quadrada A.

Observações:

(1) Como temos liberdade de escolha da fila, devemos escolher aquela que apresenta maior número de zeros. Isso simplifica muito as contas, pois não será necessário calcular os cofatores dos elementos nulos da matriz.

(2) A regra de Laplace é muito mais prática para o cálculo de um determinante de uma matriz quadrada de ordem maior ou igual a 4 que a utilização da definição de determinante, sobretudo se for aplicada sobre uma linha ou coluna com a maior quantidade possível de zeros na matriz.

Vamos agora aplicar a regra de Laplace para calcular o determinante da matriz $A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$. O 1° passo é escolher a fila que será aplicada a regra, sendo sempre escolhida a que possuir a maior quantidade de zeros, no nosso exemplo a 4ª coluna. Desde que a_{24} e a_{34} são nulos, não será necessário calcular os seus respectivos cofatores. Desta forma:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}4&1&2&3\\6&2&1&0\\3&1&4&0\\1&0&2&5\end{vmatrix}=a_{14}.A_{14}+a_{44}.A_{44}=3.(-1)^{1+4}.\begin{vmatrix}6&2&1\\3&1&4\\1&0&2\end{vmatrix}+5.(-1)^{4+4}.\begin{vmatrix}4&1&2\\6&2&1\\3&1&4\end{vmatrix}$$

Calculando os menores complementares pela regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix}6&2&1\\3&1&4\\1&0&2\end{vmatrix}\begin{matrix}6&2\\3&1\\1&0\end{matrix}=(12+8+0)-(12+0+1)=7$$

$$\begin{vmatrix}4&1&2\\6&2&1\\3&1&4\end{vmatrix}\begin{matrix}4&1\\6&2\\3&1\end{matrix}=(32+3+12)-(24+4+12)=47-40=7$$

Logo, o valor do determinante vale:

$$\det(A)=(-3).7+5.7=-21+35=14$$

11.4.4. Regra de Chió

O emprego da Regra de Laplace apresenta-se bastante trabalhoso quando o determinante é de ordem $n > 3$ e não apresenta zeros. Assim, uma matriz de 5ª ordem poderia dar origem ao cálculo de 20 determinantes de 3ª ordem, o que seria extremamente demorado. Muitas vezes devemos aplicar propriedades (serão apresentadas posteriormente) que fazem surgir vários zeros na mesma fila ou empregar outra regra de abaixamento de ordem do determinante original. A regra mais utilizada de abaixamento de ordem de determinantes é conhecida como regra de Chió, que se baseia nos seguintes conceitos:

(1) a regra pode ser aplicada em uma matriz quadrada A, de ordem $n \geq 2$, apresentando pelo menos um elemento $a_{ij} = 1$.

(2) elimine em A a linha e a coluna que se cruzam no elemento $a_{ij} = 1$, no caso a linha i e a coluna j. Perceba que será obtido o menor complementar do elemento a_{ij}.

(3) Os elementos do menor complementar devem ser substituídos pela subtração do próprio elemento pelo produto dos elementos que se encontram na mesma linha e na mesma coluna que foram eliminadas do determinante original. Em linguajar matemático, considerando índices na matriz original A, o elemento a_{kl} ($k \neq i$ e $l \neq j$) será substituído por $a_{kl} - a_{il}.a_{kj}$ no menor complementar.

(4) Multiplique o determinante obtido por $(-1)^{i+j}$.

(5) O determinante original $\det(A_{n\times n})$ e o determinante obtido $\det(B_{n-1\times n-1})$ são iguais.

Demonstração:

Nesta demonstração será usada a seguinte propriedade de determinantes, que será provada posteriormente neste livro: Uma matriz B, obtida por meio de combinações lineares das colunas de uma matriz A, possui o mesmo determinante que A.

Sabe-se que o elemento unitário pode estar em qualquer posição na matriz, porém, para facilitar os cálculos, será considerado que $a_{11} = 1$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Considere B a matriz obtida a partir de A por meio das seguintes combinações lineares:

i) coluna 1 de B = coluna 1 de A;

ii) coluna 2 de B = coluna 2 de A – a_{12}×coluna 1 de A;

iii) coluna 3 de B = coluna 3 de A – a_{13}×coluna 1 de A;

...

iv) coluna n de B = coluna n de A – a_{1n}×coluna 1 de A.

Será obtida uma matriz B, cujo determinante é igual ao de A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \cdots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{31} & a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \cdots & a_{3n} - a_{13}a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \cdots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}_{n \times n}$$

Aplicando a regra de Laplace na 1ª linha neste último determinante:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{23} - a_{21}a_{13} & \cdots & a_{2n} - a_{21}a_{1n} \\ a_{32} - a_{31}a_{12} & a_{33} - a_{31}a_{13} & \cdots & a_{3n} - a_{13}a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} - a_{n1}a_{12} & a_{n3} - a_{n1}a_{13} & \cdots & a_{nn} - a_{n1}a_{1n} \end{vmatrix}_{n-1 \times n-1}$$

Onde segue a validade da regra de Chió.

Observações:

(1) Caso nenhum elemento da matriz A seja igual a 1, é possível fazer operações simples (que serão apresentadas futuramente) de modo a obter pelo menos um elemento igual a 1, sem alterar o valor do determinante.

(2) Apesar de poder ser aplicado para qualquer elemento unitário do determinante, na maioria das situações a regra de Chió é aplicada quando $a_{11} = 1$. Caso $a_{11} \neq 1$, mas exista um outro elemento da matriz igual a 1, é possível fazer operações nas filas da matriz (que serão demonstradas na sequência deste livro) de modo a transferir esse 1 para a posição da 1ª linha e 1ª coluna, sem alterar o valor do determinante.

(3) A aplicação sucessiva da regra de Chió até a obtenção de um determinante 3×3, com aplicação posterior da regra de Sarrus, se mostra mais eficiente que a utilização da regra de Laplace, principalmente se a matriz original não apresenta muitos zeros numa mesma fila.

(4) Observa-se que a escolha da unidade é livre, porém, é mais vantajoso escolher aquela em cuja linha ou coluna tenha maior número de zeros.

Vamos agora fazer uma aplicação numérica da regra de Chió no cálculo do determinante $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$. Repare que há apenas um elemento unitário na matriz, que é exatamente $a_{21} = 1$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3-2.3 & 4-2.0 & 5-2.2 \\ 7-2.3 & 4-2.0 & 3-2.2 \\ 2-0.3 & 5-0.0 & 4-0.2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix}$$

O determinante 3×3 obtido apresenta dois elementos unitários e como ambos não apresentam elementos iguais a zero na mesma fila, tanto faz a escolha. Aplicando novamente a regra de Chió, agora no elemento $a_{21} = 1$:

$$-\begin{vmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4-(-3).4 & 1-(-3).(-1) \\ 5-2.4 & 4-2.(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & -2 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 96 - 6 = 90$$

Exercícios Resolvidos

1) Para todo x e y reais, com $x \neq \pm y$, calcule o quociente entre os determinantes $\dfrac{\begin{vmatrix} x+y & x-y & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & x & x^2+y^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix}}$.

Solução:

Aplicando a regra de Laplace na 1ª coluna:

$$\begin{vmatrix} x+y & x-y & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & x & x^2+y^2 \end{vmatrix} = (x+y)\begin{vmatrix} 1 & y \\ x & x^2+y^2 \end{vmatrix} = (x+y).(x^2+y^2-xy)$$

$$\begin{vmatrix} x & y \\ y & x \end{vmatrix} = x^2-y^2$$

Logo: $\dfrac{(x+y).\left(x^2+y^2xy\right)}{(x+y).(x-y)} = \dfrac{x^2+y^2-xy}{x-y}$

2) Calcule o polinômio que representa o determinante $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

Solução:

Aplicando a regra de Laplace na 1ª coluna:

$$D = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = x.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ -1 & x & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

Em cada um dos últimos determinantes deve-se aplicar a regra de Laplace na 1ª linha:

$$D = x.x\begin{vmatrix} x & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + 1.3\begin{vmatrix} -1 & x \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = x^2(-2x+1) + 3(1-0) = -2x^3 + x^2 + 3$$

3) Se $x + y = \frac{\pi}{3}$ calcule o valor de $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} y & \cos y & 0 \end{vmatrix}$.

Solução:

Aplicando a regra de Laplace na 1ª linha:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos x & \operatorname{sen} x & 0 \\ \operatorname{sen} y & \cos y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{vmatrix} = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x + y) =$$

$$= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

4) Resolva a equação $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = 0$

Solução:

Aplicando a regra de Chió em a_{11} temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1-x)-1 & 1-1 & 1-1 \\ 1-1 & (2-x)-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & (3-x)-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus segue que:

$\det = -x(1-x)(2-x) = 0 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$

5) Calcule x em $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Solução:

Aplicando Laplace e depois Chió temos:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & x & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1-2x & 2-4x & 3-6x \\ 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -11 \end{vmatrix}$$

Empregando Sarrus:

$$D = -\begin{vmatrix} 1-2x & 2-4x & 3-6x \\ 3 & 4 & 1 \\ -4 & -5 & -11 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1-2x & 2-4x \\ 3 & 4 \\ -4 & -5 \end{matrix} =$$

$$= -\{[-44(1-2x) - 4(2-4x) - 15(3-6x)] - [-33(2-4x) - 5(1-2x) - 16(3-6x)]\} =$$

$$= 44 - 88x + 8 - 16x + 45 - 90x - 66 + 132x - 5 + 10x - 48 + 96x =$$

$$= -22 + 44x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

6) (IME-21) Calcule o(s) valor(es) de k real(is) para que o determinante da matriz abaixo seja igual a 24.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & k & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução:

Aplicando a regra de Laplace na 3ª coluna:

$$D = 1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1).(-1)^{4+3}.\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & k & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Usando a regra de Chió para baixar a ordem dos dets 3×3 acima:

$$D = \begin{vmatrix} 1-2k & -1 \\ 1-4k & -5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k-3 & 0 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 10k + 1 - 4k - k + 3 = 5k - 1$$

Como D = 24: $5k - 1 = 24 \Rightarrow 5k = 25 \Rightarrow k = 5$

11.5. PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

1. Seja A uma matriz de ordem n e A^t sua transposta, então det A = det A^t.

Demonstração:

Sabe-se que $\det A = \sum_{\sigma}(-1)^k a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$, onde σ é uma permutação dos números 1, 2, ..., n e k é a quantidade de vezes que $\sigma(i) > \sigma(j)$, pra todos os pares (i, j) com $1 \leq i < j \leq n$. Como deve-se tomar um elemento de cada linha e um elemento de cada coluna no cálculo do determinante, as expressões de det A e de det A^t são idênticas, inclusive o $(-1)^k$ de cada parcela, uma vez que permutar os primeiros índices dos termos da matriz A, corresponde a permutar os segundos índices da matriz B. Assim, o determinante de uma matriz pode ser calculado permutando-se os segundos índices da soma de permutações, mantendo a mesma convenção para os sinais dos termos.

2. Quando se trocam as posições de duas filas paralelas de uma matriz de ordem n o seu determinante fica multiplicado por – 1.

Demonstração:

A troca de duas filas paralelas de lugar numa matriz A, obtendo a matriz A', não altera a ocorrência de cada produto da forma $a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$, porém faz com que ocorra uma mudança da paridade de cada k em todas as parcelas de $\det A = \sum_{\sigma}(-1)^k a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}...a_{n\sigma(n)}$. Assim, cada parcela troca de sinal e daí segue diretamente que det A' = – det A.

3. Quando se multiplica uma fila de uma matriz de ordem n por um número real K o seu determinante fica multiplicado por K.

Demonstração:

Suponha que j^a coluna de A seja multiplicada pelo número K, obtendo a matriz A'. Note que os cofatores dos elementos da j^a coluna de A e A' são iguais. Assim, aplicando a regra de Laplace na j^a coluna em A e A':

$\det A = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}$

$\det A' = Ka_{1j}A_{1j} + Ka_{2j}A_{2j} + ... + Ka_{nj}A_{nj} = K(a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}) \Rightarrow$

$\det A' = K.\det A$

Observação.:

(1) É importante ressaltar que se toda a matriz $A_{n\times n}$ for multiplicada por K, todas as filas ficam multiplicadas por K, e assim $\det(KA) = K^n \det A$.

4. Se todos os elementos de uma coluna de um determinante são decompostos como a soma de dois números, o determinante original é igual à soma de dois determinantes, como esquematizado abaixo:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & (b_{1j}+c_{1j}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (b_{2j}+c_{2j}) & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & (b_{3j}+c_{3j}) & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (b_{nj}+c_{nj}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & b_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & b_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & c_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & c_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & c_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & c_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demonstração:

Aplicando a regra de Laplace na j^a coluna:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (b_{ij} + c_{ij}) A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} A_{ij} + \sum_{i=1}^{n} c_{ij} A_{ij} = \det B + \det C$$

11.5.1. Condições para que um determinante seja nulo

1) Uma fila nula

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração:

Aplicando Laplace na fila nula: $\det A = 0.A_{1j} + 0.A_{2j} + \ldots + 0.A_{nj} = 0$

2) Duas filas paralelas iguais

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & x & \cdots & x & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & x & \cdots & x & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & x & \cdots & x & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração:

Trocando essas duas filas de lugar a matriz não muda, porém a troca de lugar de duas filas paralelas inverte o sinal do determinante: $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

3) Duas filas paralelas proporcionais

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & x & \dots & kx & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & x & \dots & kx & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & x & \dots & kx & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ kx & kx & \dots & kx \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração:

Suponha que uma matriz $A_{n\times n}$ possua as linhas (o mesmo vale para colunas) i e k proporcionais, ou seja, existe $k \neq 0$ tal que $a_{ij} = k.a_{kj}$, para todo $j = 1, 2, ..., n$. Tirando esse k em evidência no cálculo de det A obtém-se uma matriz A' com duas linhas iguais. Assim: $\det A = k.\det A' = k.0 = 0$.

4) Quando uma fila de uma matriz de ordem n é combinação linear de outras filas paralelas o det da matriz é nulo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & k_1a_{11}+\dots+k_na_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & k_1a_{21}+\dots+k_na_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & k_1a_{n1}+\dots+k_na_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1a_{11}+\dots+k_na_{n1} & k_1a_{12}+\dots+k_na_{n2} & \dots & k_1a_{1n}+\dots+k_na_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Demonstração:

Suponhamos que, em uma matriz A, a coluna j seja combinação linear das outras colunas. Assim:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & k_1a_{11}+\dots+k_na_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & k_1a_{21}+\dots+k_na_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & k_1a_{n1}+\dots+k_na_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & k_1a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & k_1a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & k_1a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & k_na_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & k_na_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & k_na_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Note que todas as n matrizes obtidas possuem colunas proporcionais, ou seja, seu determinante é nulo. Logo, $\det A = 0$.

O mesmo procedimento pode ser feito caso a combinação linear seja nas linhas.

11.5.2. Propriedade de Jacobi

Quando substituirmos uma fila de uma matriz de ordem n pela soma dela com outras filas paralelas previamente multiplicadas por uma constante o determinante da matriz não se altera.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+k_1a_{11}+\dots+k_na_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j}+k_1a_{21}+\dots+k_na_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+k_1a_{n1}+\dots+k_na_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+k_1a_{11}+\dots+k_na_{n1} & a_{i2}+k_1a_{12}+\dots+k_na_{n2} & \dots & a_{in}+k_1a_{1n}+\dots+k_na_{nn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Demonstração:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j}+k_1a_{11}+\dots+k_na_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j}+k_1a_{21}+\dots+k_na_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj}+k_1a_{n1}+\dots+k_na_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & k_1a_{11}+\dots+k_na_{1n} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & k_1a_{21}+\dots+k_na_{2n} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & k_1a_{n1}+\dots+k_na_{nn} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Da última propriedade, sabe-se que o segundo determinante da expressão acima é nulo. O mesmo procedimento pode ser feito caso a combinação linear seja nas linhas.

11.5.3. Propriedade de Cauchy

A soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer de uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$, ordenadamente, pelos cofatores dos elementos de uma fila paralela, é igual a zero.

Demonstração:

Considere o determinante $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Aplicando a regra de Laplace na j^a linha: $D = a_{j1}.A_{j1} + a_{j2}.A_{j2} + \dots + a_{jn}.A_{jn}$.

Tome agora o determinante D', obtido a partir de D trocando a linha j pela linha i:

$$D' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Como D' possui duas linhas iguais, então D' = 0. Aplicando o teorema de Laplace novamente na j^a linha (observe que os cofatores não alteraram), segue diretamente que $D' = a_{i1}.A_{j1} + a_{i2}.A_{j2} + ... + a_{in}.A_{jn} = 0$.

11.5.4. Propriedade de Binet

Se A e B são matrizes quadradas de ordem n então det (A × B) = det A × det B.

Demonstração:

Sejam $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ e $C = A.B = (c_{ij}) \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}.b_{kj}$ (i, j = 1, 2, 3, ..., n)

Assim, pode-se afirmar que:

$$C = \begin{pmatrix} \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1 1} & \sum_{k_2=1}^{n} a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k_1=1}^{n} a_{nk_1} b_{k_1 1} & \sum_{k_2=1}^{n} a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix}$$

Com isso, segue que:

$$det(A \cdot B) = det(C) = det \begin{pmatrix} \sum_{k_1=1}^{n} a_{1k_1} b_{k_1 1} & \sum_{k_2=1}^{n} a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k_1=1}^{n} a_{nk_1} b_{k_1 1} & \sum_{k_2=1}^{n} a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & \sum_{k_n=1}^{n} a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix}$$

Separando como a soma de vários determinantes:

$$det(A \cdot B) = \sum_{k_1=1}^{n} \sum_{k_2=1}^{n} \cdots \sum_{k_n=1}^{n} det \begin{pmatrix} a_{1k_1} b_{k_1 1} & a_{1k_2} b_{k_2 2} & \cdots & a_{1k_n} b_{k_n n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} b_{k_1 1} & a_{nk_2} b_{k_2 2} & \cdots & a_{nk_n} b_{k_n n} \end{pmatrix}$$

$$det(A \cdot B) = \sum_{(k_1,k_2,\cdots k_n)}^{n} b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} \cdot det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix}$$

Perceba que se $k_i = k_j$ (com i e j variando de 1 até n) o determinante da referida parcela do somatório será igual a zero. Isso ocorre pois existirão duas filas paralelas iguais. Assim, cada sequência (k_1, k_2, ..., k_n) é uma permutação de (1, 2, ..., n) e designemos por P essas permutações e por t o número de inversões da permutação tomada. Assim:

$$det(A \cdot B) = \sum_{P} (-1)^t b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} \cdot det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix}$$

Como

$$\sum_{P} (-1)^t b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} = det(B)$$

conclui-se que

$$det(A \cdot B) = \sum_{P} (-1)^t b_{k_1 1} b_{k_2 2} \ldots b_{k_n n} \cdot det \begin{pmatrix} a_{1k_1} & a_{1k_2} & \cdots & a_{1k_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nk_1} & a_{nk_2} & \cdots & a_{nk_n} \end{pmatrix} = det(B) \cdot det(A)$$

1.5.5. Determinantes Especiais

11.5.5.1. Determinante de Vandermonde

Denomina-se matriz de Vandermonde, ou das potências, toda matriz de ordem $n \geq 2$ do tipo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Os elementos a_1, a_2, ... a_n são chamados elementos característicos da matriz.

det A = $(a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \ldots (a_n - a_1)(a_3 - a_2)(a_4 - a_2) \ldots (a_n - a_2) \ldots (a_n - a_{n-1})$

Demonstração:

Considere o seguinte determinante de Vandermonde: $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^1 & \ldots & a_n^2 \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$

Perceba que se a_n for igual a qualquer um dos outros a_i ($1 \le i \le n-1$) então D_n terá duas colunas iguais e portanto tem-se que $D_n = 0$.

Aplicando a regra de Laplace na nª coluna:

$$D_n = \pm\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.1 \mp \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.a_1 \pm \dots + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}.a_n^{n-1},$$

que é um polinômio de grau $n-1$ na variável a_n, cujas raízes são $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Pelo teorema da decomposição tem-se: $D_n = C(a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1})$, onde C é o coeficiente de a_n^{n-1}, ou seja, $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-2} & a_2^{n-2} & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = D_{n-1}$.

Desta forma tem-se $D_n = (a_n - a_1)(a_n - a_2)\dots(a_n - a_{n-1}).D_{n-1}$.

Continuando com esse processo conclui-se que $D_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.

11.5.5.2. Determinante da Matriz Triangular

O determinante da matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}.a_{22}.a_{33}\dots a_{nn}$$

Demonstração:

Aplicando seguidamente a regra de Laplace na 1ª linha:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$= \dots\dots\dots\dots = a_{11}\, a_{22}\, a_{33} \dots a_{nn}$

Este resultado, produto dos elementos da diagonal principal, é válido também para os determinantes diagonal e escalar.

11.5.5.2.1. Teorema: O determinante da matriz identidade, de qualquer ordem, é igual a 1.

Demonstração:

Perceba que, independentemente da ordem, toda matriz identidade é triangular, com todos os elementos da diagonal principal igual a 1:

$\det I_n = a_{11}.a_{22}...a_{nn} = 1.1...1 = 1$

11.5.5.3. Teorema: Se A é uma matriz inversível então $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Demonstração:

Se A é inversível então $A.A^{-1} = I \Rightarrow \det(A.A^{-1}) = \det I \Rightarrow$

$\det A.\det A^{-1} = 1 \Rightarrow \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

11.5.5.4. Teorema: Considere os determinantes onde todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal secundária são nulos. Neste caso, sendo a matriz de ordem n, o valor do det será o produto dos elementos da diagonal secundária multiplicado por $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{2\,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \cdots & a_{3\,n-2} & a_{3\,n-1} & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,n-2} & a_{n\,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}.a_{2\,n-1}.a_{3\,n-2}...a_{n1}$$

Demonstração:

Troque a 1ª linha com a nª linha. Depois troque a 2ª linha com a n – 1ª linha. Continuando com esse processo até o meio da matriz serão necessárias n(n – 1)/2 trocas para transformar a matriz original em uma matriz triangular, cujo determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

11.5.5.5. Teorema: O determinante de uma matriz anti-simétrica de ordem ímpar é sempre nulo.

Demonstração:

Considere a matriz $A_{n\times n}$ de modo que $A^t = -A$. Assim:

$\det(A^t) = \det(-A) \Rightarrow \det A = (-1)^n \det A$

Se n é ímpar então $\det A = -\det A \Rightarrow \det A = 0$

Exercícios Resolvidos

1) Calcule o valor do determinante $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$.

Solução:

Somando a 1ª coluna, multiplicada por – 1, nas demais colunas:

$$D = \begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & b-a & b-a \\ a & b-a & c-a & c-a \\ a & b-a & c-a & d-a \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra de Laplace na 1ª linha e depois somando a 1ª coluna, multiplicada por – 1, nas demais colunas:

$$D = a\begin{vmatrix} b-a & b-a & b-a \\ b-a & c-a & c-a \\ b-a & c-a & d-a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b-a & 0 & 0 \\ b-a & c-b & c-b \\ b-a & c-b & c-b \end{vmatrix}$$

Novamente aplicando a regra de Laplace na 1ª linha:

$$D = a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & c-b \\ c-b & d-b \end{vmatrix} = a(b-a)\begin{vmatrix} c-b & 0 \\ c-b & d-c \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

2) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \end{pmatrix}$ seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \det A$, então $f(-1)$ vale:

Solução:

Nas duas primeiras passagens serão aplicadas a regra de Laplace na 1ª coluna e na terceira passagem será aplicada a regra de Sarrus:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 8 \\ 0 & 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 8 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = x^2 \left[\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 8 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 0 & x \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right] =$$

$= x^2[(x^3 + 8 + 0) - (0 + 0 + 0)] = x^5 + 8x^2 \Rightarrow f(-1) = (-1)^5 + 8(-1)^2 = 7$

3) O valor do determinante (onde log representa logaritmo na base 10):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \log 2 & \log 20 & \log 200 & \log 2000 \\ (\log 2)^2 & (\log 20)^2 & (\log 200)^2 & (\log 2000)^2 \\ (\log 2)^3 & (\log 20)^3 & (\log 200)^3 & (\log 2000)^3 \end{vmatrix}$$

Solução:

O determinante é de Vandermonde, logo:

$= (\log 20 - \log 2)(\log 200 - \log 2)(\log 200 - \log 2)(\log 200 - \log 20)$
$(\log 2000 - \log 20)(\log 2000 - \log 200) =$

$$= \log \frac{20}{2} . \log \frac{200}{2} . \log \frac{2000}{2} . \log \frac{200}{20} . \log \frac{2000}{20} . \log \frac{2000}{200} =$$

$= \log 10 . \log 100 . \log 1000 . \log 10 . \log 100 . \log 10 = 1 . 2 . 3 . 1 . 2 . 1 = 12$

4) Prove sem desenvolver que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = 0$, independente dos valores a, b e c.

Solução:

Substituindo a 3ª linha pela soma dela com a 2ª linha temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \end{vmatrix}$$

Colocando (a + b + c) em evidência temos:

$(a + b + c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ (duas linhas iguais). Se $a + b + c = 0$ não poderíamos colocá-lo em evidência, mas neste caso, o determinante seria nulo pois tem uma fila nula.

5) Supondo a, b, c números diferentes e não nulos encontre x em:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & a^2+x \end{vmatrix} = 0$$

Solução:

Aplicando a propriedade de soma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a & b & 0 \\ a^2 & b^2 & x \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) + x(b-a) = 0$$

Assim: $x = -(c-a)(c-b) = (b-c)(c-a)$

6) Qual o valor do determinante $\begin{vmatrix} a & y & z \\ b & s & t \\ c+b & d+s & e+t \end{vmatrix}$ se o valor de $\begin{vmatrix} a & y & z \\ b & s & t \\ c & d & e \end{vmatrix} = 25$?

Solução:

$$\begin{vmatrix} a & y & z \\ b & s & t \\ c+b & d+s & e+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & y & z \\ b & s & t \\ c & d & e \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} a & y & z \\ b & s & t \\ b & s & t \end{vmatrix}}_{=0\,(2\text{ linhas iguais})} = \begin{vmatrix} a & y & z \\ b & s & t \\ c & d & e \end{vmatrix} = 25$$

7) (Unicamp-88) Prove a igualdade sendo a, b, c e d reais não nulos:

$$D = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Solução:

Multiplicando a 4ª linha por -1 e somando esse resultado nas 1ª, 2ª e 3ª linhas:

$$D = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & -d \\ 0 & b & 0 & -d \\ 0 & 0 & c & -d \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix}$$

Colocando em evidência a, b, c e d respectivamente em cada uma das colunas:

$$D = abcd\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & \frac{1}{d}+1 \end{vmatrix}$$

Substituindo a 4ª coluna pela soma dela com as outras:

$$D = abcd\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} & 1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \end{vmatrix}$$

Como o último determinante é triangular

$$D = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

8) (IME-12) Calcule as raízes de f(x) em função de a, b e c, sendo a, b, c e $x \in IR$ (real) e $f(x) = \begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix}$.

Solução:

Somando a 1ª coluna às demais colunas: $\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & c & b \\ b & c & x & a \\ c & b & a & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x+a+b+c & a & b & c \\ x+a+b+c & x & c & b \\ x+a+b+c & c & x & a \\ x+a+b+c & b & a & x \end{vmatrix}$

Colocando x + a + b + c em evidência na 1ª coluna:

$$f(x) = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x-a & c-b & b-c \\ 1 & c-a & x-b & a-c \\ 1 & b-a & a-b & x-c \end{vmatrix}$$

Calculando o determinante dessa matriz pela primeira linha utilizando Laplace:

$$f(x) = (x+a+b+c)\begin{vmatrix} x-a & c-b & b-c \\ c-a & x-b & a-c \\ b-a & a-b & x-c \end{vmatrix}$$

Somando a 2ª coluna com a terceira e colocando em evidência o termo x + a – b – c. teremos:

$$f(x) = (x + a + b + c)(x + a - b - c)\begin{vmatrix} 0 & x-a & c-b \\ 1 & c-a & x-b \\ 1 & b-a & a-b \end{vmatrix}$$

Somando a 1ª coluna multiplicada por a – c com a 2ª coluna e somando a 1ª coluna multiplicada por b – a com a 3ª coluna, teremos:

$$f(x) = (x + a + b + c)(x + a - b - c)\begin{vmatrix} 0 & x-a & c-b \\ 1 & 0 & x-a \\ 1 & b-c & 0 \end{vmatrix}$$

Calculando esse determinante 3 por 3:

$$f(x) = (x + a + b + c).(x + a - b - c).\left[(x-a)^2 - (b-c)^2\right]$$

Fatorando: $f(x) = (x + a + b + c)(x + a - b - c)(x - a - b + c)(x - a + b - c)$

Como f(x) = 0, teremos como raízes: – a – b – c, – a + b + c, a + b – c, a – b + c

9) (ITA-87) Seja P o determinante da seguinte matriz real $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 2 & x \\ 2 & 3 & 4 & x^2 \\ 2\sqrt{2} & 3\sqrt{3} & 8 & x^3 \end{bmatrix}$.

Para se obter P < 0 é suficiente considerar x em $\Re$, tal que:

a) $x = (\sqrt{2}+\sqrt{3})/2$ b) $10 < x < 11$ c) $\sqrt{3} < x < 2$

d) $2 < x < 3$ e) $9 < x < 10$

Observação: O enunciado foi corrigido para a questão possuir alternativa correta

Solução: Alternativa C

Como se trata de um determinante de Vandermonde:

$$P(x) = (x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x-2)(2-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

Perceba que $2 > \sqrt{2}$, $2 > \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} > \sqrt{2}$, ou seja, $P(x) = k(x-\sqrt{2})(x-\sqrt{3})(x-2)$, com k > 0. Para que P(x) < 0 é necessário e suficiente que os três termos de 1° grau sejam negativos, que ocorre para $x < \sqrt{2}$, ou apenas um dos termos de 1° grau seja negativo, que ocorre para $\sqrt{3} < x < 2$.

11.6. MATRIZ INVERSA – CÁLCULO POR DETERMINANTE

11.6.1. Matriz Cofatora

Dada $A = (a_{ij})_{n\times n}$, chama-se cofatora de A ou cof (A) a matriz $C = (A_{ij})$ onde A_{ij} é, em A, o cofator do elemento a_{ij}. Por exemplo, na matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, tem-se os seguintes cofatores:

$A_{11} = (-1)^2 3 = 3$, $A_{12} = (-1)^3.(-4) = 4$, $A_{21} = (-1)^3 2 = -2$, $A_{22} = (-1)^4 1 = 1$

Logo, a matriz cofatora de A é $\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

11.6.2. Matriz Adjunta de A

Chama-se matriz adjunta de A ou comatriz de A e se indica por Adj (A), a matriz transposta da cofatora de A, ou seja, **Adj (A) = (cof (A))^t**.

No caso da matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ segue que:

$$\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

Note que no caso de 2ª ordem pode-se obter a matriz adjunta a partir da matriz inicial pela simples troca das posições dos elementos da diagonal principal e pela inversão dos sinais na diagonal secundária. É útil o leitor verificar com exemplos que esta regra é exclusiva para matriz de 2ª ordem.

11.6.3. Teorema: Dada uma matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ então:

$$\mathbf{A \times Adj\,(A) = Adj\,(A) \times A = (\det A) \times I_n}$$

Demonstração:

$$A \times \text{Adj}(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Perceba que há apenas dois possíveis resultados para todos os elementos desse produto:

se $i = j \Rightarrow a_{i1}.A_{j1} + a_{i2}.A_{j2} + \ldots + a_{in}.A_{jn} = \det A$

se $i \neq j \Rightarrow a_{i1}.A_{j1} + a_{i2}.A_{j2} + \ldots + a_{in}.A_{jn} = 0$

Assim segue que: $A \times Adj(A) = \begin{bmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{bmatrix} = \det A \times I_n$

Analogamente, pode-se provar que Adj (A) × A = det A × I_n

11.6.4. Teorema: A condição necessária e suficiente para que uma matriz A de ordem n seja inversível, ou seja exista A^{-1}, é que det A ≠ 0.

Demonstração:

Condição necessária: **A é inversível ⇒ det A ≠ 0**

A inversível ⇒ A^{-1} existe ⇒ $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$ ⇒

$\det (A.A^{-1}) = \det A.\det A^{-1} = \det I_n = 1 \Rightarrow \det A = \frac{1}{\det A^{-1}} \neq 0$

Condição suficiente: **det A ≠ 0 ⇒ A é inversível**

Sendo det A ≠ 0 temos: $A.\left(\frac{Adj(A)}{\det A}\right) = \left(\frac{Adj(A)}{\det A}\right).A = I_n$

E como, na situação de existência de A^{-1}, ocorre que $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_n$, segue que A^{-1} existe e $A^{-1} = \frac{Adj(A)}{\det A}$.

11.6.5. Teorema: Se $A_1, A_2, ..., A_m$ são matrizes quadradas de mesma ordem tais que $A_1.A_2...A_m = k.I_n$, com k ≠ 0, então $A_1, A_2, ..., A_m$ são todas matrizes inversíveis.

Demonstração:

Se $A_1.A_2...A_m = k.I_n \Rightarrow \det(A_1.A_2...A_m) = \det(k.I_n) \Rightarrow$

$\det A_1 \times \det A_2 \times ... \times \det A_m = k^n.\det I_n = k^n \neq 0 \Rightarrow$

$\det A_1 \neq 0, \det A_2 \neq 0, ..., \det A_m \neq 0 \Rightarrow A_1, A_2, ..., A_m$ são todas inversíveis

Observação:

(1) Há duas maneiras de mostrar que uma matriz tem inversa. Se forem dados todos os elementos da matriz basta calcular seu determinante e mostrar que nunca é nulo. Caso a matriz for definida a partir de operações (soma e/ou produto) com outras matrizes, basta encontrar uma expressão equivalente ao do último teorema.

11.6.6. Teorema: Se $A_1, A_2, ..., A_m$ são matrizes quadradas de mesma ordem tais que $A_1.A_2...A_m = 0$, então pelo menos uma das matrizes $A_1, A_2, ..., A_m$ é não inversível.

Demonstração:

Se $A_1.A_2...A_m = 0 \Rightarrow \det(A_1.A_2...A_m) = \det(0_n) \Rightarrow$

$\det A_1 \times \det A_2 \times ... \times \det A_m = 0 \Rightarrow$ pelo menos um dos dets é igual a zero ⇒

pelo menos uma das matrizes $A_1, A_2, ..., A_m$ é não inversível

11.6.7. Determinante da Matriz Adjunta

Se A é uma matriz inversível, então $\det(\text{Adj } A) = (\det A)^{n-1}$.

Demonstração:

Sabe-se que $A \times \text{Adj}(A) = (\det A) \times I \Rightarrow \det[A \times \text{Adj}(A)] = \det[(\det A).I] \Rightarrow$
$\det A \times \det(\text{Adj } A) = (\det A)^n \times \det I \Rightarrow \det A \times \det(\text{Adj } A) = (\det A)^n \Rightarrow$
$\det(\text{Adj } A) = (\det A)^{n-1}$

11.6.8. Determinação da Matriz Inversa

Se $\det A \neq 0$ segue que A^{-1} existe e $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\text{Adj}(A)$. Assim, para calcular a inversa de uma matriz basta calcular seu determinante e encontrar sua matriz adjunta.

Por exemplo, no caso de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, inicialmente devemos calcular o determinante de A (até porque se $\det A = 0$ a inversa nem existe):

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1.5 - 2.3 = -1 \Rightarrow A^{-1} \text{ existe}$$

Calculando agora os cofatores de A:

$A_{11} = (-1)^2.5 = 5$, $A_{12} = (-1)^3.3 = -3$, $A_{21} = (-1)^3.2 = -2$, $A_{22} = (-1)^4.1 = 1$

Assim: $\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj}(A) = [\text{cof}(A)]^t = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Portanto: $A^{-1} = \frac{1}{\det A}.\text{Adj}(A) = \frac{1}{-1}.\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

Observação:

(1) Este é o segundo método de cálculo da matriz inversa. No capitulo anterior foi apresentado o método baseado na multiplicação matricial, onde, para uma matriz n×n, devem ser resolvidos n sistemas lineares n×n. No método baseado no cálculo da matriz adjunta, são calculados n^2 determinantes $(n-1)\times(n-1)$ – os cofatores dos elementos da matriz – e um determinante n×n – determinante de A. Verifica-se que o método da matriz adjunta é mais eficiente para o cálculo da inversa que o método da multiplicação matricial, principalmente se é desejado o cálculo de apenas um elemento específico da inversa. Porém, o método mais eficiente para o cálculo da matriz inversa será apresentado no capítulo de sistemas lineares e é baseado no escalonamento de uma matriz.

Exercícios Resolvidos

1) Ache, se existirem, as inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 9 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Solução:

1) $\det A = 6 - 6 = 0 \Rightarrow A^{-1}$ não existe.

2) $\det B = 9 - 8 = 1 \neq 0 \Rightarrow B^{-1}$ existe.

Calculando os cofatores de B encontra-se que $\text{Adj } B = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$;

Assim: $B^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 2(0 - 6) = -12 \neq 0 \Rightarrow C^{-1}$ existe

Calculando os cofatores de C:

$C_{11} = (-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $C_{12} = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $C_{13} = (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -6$

$C_{21} = (-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $C_{22} = (-1)^4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$, $C_{23} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$

$C_{31} = (-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$, $C_{32} = (-1)^5\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $C_{33} = (-1)^6\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2$

Assim: $\text{cof } C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 2 & -6 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \\ -6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Portanto: $C^{-1} = \frac{1}{\det C}\text{Adj}(C) \Rightarrow C^{-1} = -\frac{1}{12}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 0 & -6 & 0 \\ -6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

2) (ITA-79) Sejam A, B, C matrizes reais 3×3, satisfazendo as seguintes relações: $AB = C^{-1}$, $B = 2A$, se o determinante de $C = 32$, qual o valor do módulo do determinante de A?

Solução:

$AB = A(2A) = C^{-1} \Rightarrow \det(A \times 2A) = \det C^{-1} \Rightarrow \det A \,.\, \det 2A = \frac{1}{\det C} \Rightarrow$

$\det A\,(2^3 \det A) = \frac{1}{32} \Rightarrow 8(\det A)^2 = \frac{1}{32} \Rightarrow (\det A)^2 = \frac{1}{256} \Rightarrow |\det A| = \frac{1}{16}$

3) (ITA-73) Seja Q uma matriz 4×4 tal que $\det Q \neq 0$ e $Q^3 + 2Q^2 = 0$ ($\det Q$ indica determinante de Q). Então temos:

a) $\det Q = 2$ b) $\det Q = 16$ c) $\det Q = -2$

d) $\det Q = -16$ e) N.R.A

Solução: Alternativa B

$Q^3 + 2Q^2 = 0 \Rightarrow Q^2(Q + 2I) = 0$ com o $\det Q \neq 0 \Rightarrow \det Q^2 \neq 0 \Rightarrow$

Q^2 tem inversa $\Rightarrow (Q^2)^{-1}[Q^2(Q + 2I)] = (Q^2)^{-1}.0 = 0 \Rightarrow Q + 2I = 0 \Rightarrow$

$Q = -2I \Rightarrow \det Q = (-2)^4.\det I = 16$

4) (ITA-99) Sejam x, y, z números reais com $y \neq 0$. Considere a matriz inversível

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então:

a) A soma dos temos da 1ª linha de A^{-1} é igual a $x + 1$

b) A soma dos temos da 1ª linha de A^{-1} é igual a 0

c) A soma dos temos da 1ª coluna de A^{-1} é igual a 1

d) O produto dos termos da 2ª linha de A^{-1} é y

e) O produto dos termos da 3ª coluna de A^{-1} é 1

Solução: Alternativa C

$$(1)\ |A| = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 0 \\ z & -1 & 1 \end{vmatrix} = -y \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2y \neq 0$$

(2) Calculando a matriz cofatora de A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0;\ A_{12} = -\begin{vmatrix} y & 0 \\ z & 1 \end{vmatrix} = y;\ A_{13} = \begin{vmatrix} y & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -y$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2;\ A_{22} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ z & 1 \end{vmatrix} = x - z;\ A_{23} = -\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & -1 \end{vmatrix} = x + z$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;\ A_{32} = -\begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix} = y;\ A_{33} = \begin{vmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{vmatrix} = -y$$

$$\text{cof } A = \begin{pmatrix} 0 & -y & -y \\ -2 & x-z & x+z \\ 0 & y & -y \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj } A = (\text{cof } A)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -y & x-z & y \\ -y & x+z & -y \end{pmatrix} = \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj}\,A}{\det A} = \begin{pmatrix} 0 & 1/y & 0 \\ 1/2 & \dfrac{x-z}{-2y} & -1/2 \\ 1/2 & \dfrac{x+z}{-2y} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Logo, a soma dos elementos da 1ª coluna é $0+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

5) (ITA-98) Sejam as matrizes reais de ordem 2, $A = \begin{pmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{pmatrix}$.

Então, a soma dos elementos da diagonal principal de $(AB)^{-1}$ é igual a:

a) $a + 1$ b) $4(a + 1)$ c) $\frac{1}{4}(5 + 2a + a^2)$ d) $\frac{1}{4}(a^2 + 2a + 1)$ e) $\frac{1}{2}(5 + 2a + a^2)$

Solução: Alternativa C

$$1)\ AB = \begin{pmatrix} 2+a & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ a & 2+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+a+2 & a^2+3a+2 \\ a+1 & a+3 \end{pmatrix}$$

(1) $\det(AB) = (a^2 + a + 2)(a + 3) - (a + 1)(a^2 + 3a + 2) = 4$

$$\text{Adj}\,(AB) = \begin{pmatrix} a+3 & -a^2+3a-2 \\ -a-1 & a^2+a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} a+3 & -a^2-3a-2 \\ -a-1 & a^2+a+2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{tr}\,(AB^{-1}) = \frac{1}{4}[(a + 3) + (a^2 + a + 2)] = \frac{a^2+2a+5}{4}$$

6) (ITA-97) Sejam A, B e C matrizes reais, quadradas de ordem n e não nulas. Por 0 denotamos a matriz nula de ordem n. Se AB = AC, considere as afirmações:

I) $A^2 \neq 0$

II) $B = C$

III) $\det B \neq 0$

IV) $\det(B - C) = 0$

Então:

a) Todas são falsas

b) Apenas a afirmação I é verdadeira

c) Apenas a afirmação II é verdadeira

d) Apenas as afirmações I e II são verdadeiras

e) Apenas a afirmação III é verdadeira

Solução:

I) Falsa pois existem matrizes quadradas nulas A, B e C tais que $AB = AC$ e $A^2 = 0$.
Por exemplo sendo:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ temos

$AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

II) Falsa pois $AB = AC$ com $B \neq C$ (item anterior)
III) Falsa pois vemos no item (I) que $\det B = 0$
IV) Verdadeira pois supondo que $\det (B - C) \neq 0$ então $(B - C)^{-1}$ existe e como $AB = AC$ segue que:
$AB = AC \Rightarrow A(B - C) = 0 \Rightarrow A(B - C)(B - C)^{-1} = 0.(B - C)^{-1} = 0 \Rightarrow$
$A(B - C)(B - C)^{-1} = 0 \Rightarrow A.I = 0 \Rightarrow A = 0$
o que é absurdo pois por hipótese $A \neq 0$.
Portanto, a questão foi anulada pois não tinha opção correta.

7) (ITA-08) Sejam A e C matrizes n x n inversíveis tais que $\det (I + C^{-1}.A) = 1/3$ e $\det A = 5$. Sabendo-se que $B = 3(A^{-1} + C^{-1})^t$, então o determinante de B é igual a

a) 3^n b) $2.\frac{3^n}{5^2}$ c) $\frac{1}{5}$ d) $\frac{3^{n-1}}{5}$ e) 5.3^{n-1}

Solução: Alternativa D
Inicialmente note que: $I + C^{-1}.A = A^{-1}.A + C^{-1}.A = (A^{-1} + C^{-1}).A \Rightarrow$

$\det (I + C^{-1}A) = \det [(A^{-1} + C^{-1})A] = \det (A^{-1} + C^{-1}).\det A = \frac{1}{3} \Rightarrow$

$\det (A^{-1} + C^{-1}) = \frac{1}{15}$

Observando a expressão que define a matriz B:

$\det B = \det [3(A^{-1} + C^{-1})^t] = 3^n.\det (A^{-1} + C^{-1})^t = 3^n.\det (A^{-1} + C^{-1}) = 3^n.\frac{1}{15} = \frac{3^{n-1}}{5}$

8) Se A é uma matriz quadrada tal que $(A + I)^4 = 0$, demonstre que A é inversível.
Solução:
Como I comuta com qualquer matriz quadrada:
$(A + I)^4 = A^4 + 4A^3 + 6A^2 + 4A + I = 0 \Rightarrow A(A^3 + 4A^2 + 6A + 4I) = -I$
Aplicando determinante nos dois membros da última expressão:
$\det[A(A^3 + 4A^2 + 6A + 4I)] = \det(-I)$
Aplicando o teorema de Binet e supondo que a ordem de I é n:
$\det(A).\det(A^3 + 4A^2 + 6A + 4I) = (-1)^n \neq 0$
Deste modo, segue que $\det A \neq 0 \Rightarrow$ A é invertível

9) (ITA-18) Sejam A e B matrizes quadradas n×n tais que A + B = A.B e I_n a matriz identidade n×n. Das afirmações:
I. $I_n - B$ é inversível;
II. $I_n - A$ é inversível;
III. A.B = B.A.
é (são) verdadeira(s)
A) Somente I. B) Somente II. C) Somente III.
D) Somente I e II. E) Todas.
Solução: Alternativa E
Se A + B = A.B então AB – A – B = 0
Note que:
$(I - A)(I - B) = I^2 - I.B - A.I + A.B = I - A - B + AB = I - 0 = I$
Aplicando determinante nos dois lados da última expressão:
$\det[(I - A)(I - B)] = \det I \Rightarrow \det(I - A).\det(I - B) = 1$
Assim, $\det(I - A) \neq 0$ e $\det(I - B) \neq 0$ e assim I – A e I – B são ambas inversíveis.
Portanto, as afirmativas I e II são verdadeiras
Como (I – A)(I – B) = I então I – B é a inversa de I – A (e vice versa). Pela definição de matriz inversa, se X é a inversa de Y então XY = YX = I. Logo, segue que:
$I = (I - A)(I - B) = (I - B)(I - A) \Rightarrow I - A - B + AB = I - B - A + BA \Rightarrow$
$AB = BA \Rightarrow$ a afirmativa III é verdadeira

10) (IME-03) Considere uma matriz A, n×n, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = k.A$, prove que a matriz A + I é invertível, onde I é a matriz identidade n×n.
Solução:
O objetivo será encontrar uma matriz B e um número real x, em função apenas de A e k, de modo que (A + I).B = x.I, com x real diferente de 0.
Como $A^3 = k.A$ deve-se iniciar multiplicando A + I por A e A^2.
$(A + I)A = A^2 + A \Rightarrow A^2 = (A + I)A - A$
$(A + I)A^2 = A^3 + A^2 = k.A + (A + I)A - A \Rightarrow (A + I)A^2 - (A + I)A = kA - A \Rightarrow$
$(A + I)(A^2 - A) = (k - 1)A \Rightarrow (A + I)(A^2 - A) = (k - 1)A + (k - 1)I - (k - 1)I \Rightarrow$
$(A + I)(A^2 - A) = (k - 1)(A + I) - (k - 1)I \Rightarrow$
$(A + I)(A^2 - A) - (k - 1)(A + I) = (1 - k)I \Rightarrow (A + I)[A^2 - A - (k - 1)I] = (1 - k)I$
Aplicando determinante nos dois membros da última igualdade matricial:
$\det\{(A + I)[A^2 - A - (k - 1)I]\} = \det[(1 - k)I] \Rightarrow$
$\det(A + I).\det[A^2 - A - (k - 1)I] = (1 - k)^n$
Como o enunciado garantiu que $k \neq 1$, segue que $\det(A + I) \neq 0$, ou seja, A + I é uma matriz invertível.

11.7. DETERMINANTES DE ORDEM N

Determinantes de ordem n são determinantes onde não é especificada a ordem da matriz. Normalmente se deve calcular o determinante em função da ordem n da matriz. Basicamente há duas formas de caracterizar os elementos de um determinante de ordem n:

i) são fornecidos os primeiros elementos das filas, permitindo deduzir um padrão para o cálculo de cada elemento;

ii) é fornecida uma fórmula para a_{ij} em função de i, j, n (ordem da matriz) ou algumas constantes. Por exemplo, $a_{ij} = i.j$, $a_{ij} = \text{sen}\,(2\pi.i)$, $a_{ij} = (i + j)^n$ ou $a_{ij} = i.2^j$.

O fato de a ordem da matriz não ser conhecida faz com que muitos sintam dificuldades em calcular seu determinante. Entretanto, as questões de determinantes de ordem n são elaboradas de modo a serem resolvidas utilizando sempre as mesmas técnicas, a saber:

i) aplicar combinações lineares ou a regra de Chió seguidamente no determinante original de modo a obter uma matriz triangular;

ii) por meio de combinações lineares, regra de Laplace ou regra de Chió obter um outro determinante (de mesmo valor que o original) que satisfaz algumas das condições de determinante nulo (uma fila nula ou duas filas paralelas proporcionais);

iii) analisar casos pequenos e demonstrar o resultado deduzido usando indução finita;

iv) obter uma relação de recorrência do determinante de ordem n em função de determinantes equivalentes de ordens menores (n – 1, n – 2, ...) e depois resolver a equação de recorrência obtida.

Acompanhe agora a solução dos exercícios resolvidos para entender melhor a aplicação das técnicas descritas acima na resolução de determinantes de ordem n.

Exercícios Resolvidos

1) (IME-71) Calcule o valor do determinante de ordem n:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$$

Solução:

O objetivo neste tipo de questão é aplicar operações que não alteram o valor do determinante até obter uma matriz triangular.

Some da 2ª linha até a nª linha e aplique essa combinação linear na 1ª linha:

$$D=\begin{vmatrix} a+n-1 & a+n-1 & a+n-1 & \dots & a+n-1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$D=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & a & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & a \end{vmatrix}$$

Multiplicando a 1ª linha por -1 e aplicando em cada uma das demais linhas:

$$D=(a+n-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-1 \end{vmatrix}$$

Como a matriz obtida é triangular:

$D=(a+n-1).1.(a-1).(a-1)\dots(a-1) \Rightarrow D=(a+n-1)(a-1)^{n-1}$

2) Calcule o valor de $D=\begin{vmatrix} a_1^2 & (a_1+1)^2 & (a_1+2)^2 & \dots & (a_1+n-1)^2 \\ a_2^2 & (a_2+1)^2 & (a_2+2)^2 & \dots & (a_2+n-1)^2 \\ a_3^2 & (a_3+1)^2 & (a_3+2)^2 & \dots & (a_3+n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & (a_n+1)^2 & (a_n+2)^2 & \dots & (a_n+n-1)^2 \end{vmatrix}$, $n \geq 4$.

Solução:

Multiplique a 1ª coluna por -1 e aplique nas demais colunas:

$$D=\begin{vmatrix} a_1^2 & 2a_1+1 & 4a_1+4 & 6a_1+9 & \dots & 2(n-1)a_1+(n-1)^2 \\ a_2^2 & 2a_2+1 & 4a_2+4 & 6a_2+9 & \dots & 2(n-1)a_2+(n-1)^2 \\ a_3^2 & 2a_3+1 & 4a_3+4 & 6a_3+9 & \dots & 2(n-1)a_3+(n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & 2a_n+1 & 4a_n+4 & 6a_n+9 & \dots & 2(n-1)a_n+(n-1)^2 \end{vmatrix}$$

Agora multiplique a 2ª coluna por – 2 e soma na 3ª coluna e depois multiplique a 3ª coluna por – 3 e soma na 4ª coluna:

$$D = \begin{vmatrix} a_1^2 & 2a_1+1 & 2 & 6 & \dots & 2(n-1)a_1+(n-1)^2 \\ a_2^2 & 2a_2+1 & 2 & 6 & \dots & 2(n-1)a_2+(n-1)^2 \\ a_3^2 & 2a_3+1 & 2 & 6 & \dots & 2(n-1)a_3+(n-1)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^2 & 2a_n+1 & 2 & 6 & \dots & 2(n-1)a_n+(n-1)^2 \end{vmatrix}$$

Desde que a 3ª coluna é proporcional à 4ª coluna, segue diretamente que D = 0.

3) (IME-11) Sejam $x_1, \dots, x_n$ os n primeiros termos de uma progressão aritmética. O primeiro termo e a razão desta progressão são os números reais x_1 e r, respectivamente. O determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & \dots & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix} \text{ é:}$$

a) $x_1^n.r^n$ b) $x_1^n.r$ c) $x_1^n.r^{n-1}$ d) $x_1.r^n$ e) $x_1.r^{n-1}$

Solução: Alternativa E

Multiplicando a 1ª linha por – 1 e aplicando o resultado em todas demais linhas:

$$D = \begin{vmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & \dots & x_1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_2-x_1 & \dots & x_2-x_1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_3-x_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \dots & x_n-x_1 \end{vmatrix} = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & r & r & \dots & r \\ 0 & r & 2r & \dots & 2r \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r & 2r & \dots & (n-1)r \end{vmatrix}$$

Multiplique a $(n-1)^a$ coluna por – 1 e aplique na n^a coluna, depois multiplique a $(n-2)^a$ coluna por – 1 e aplique na $(n-1)^a$ coluna, assim por diante até multiplicar a 1ª coluna por – 1 e aplicar na 2ª coluna. Será obtido o seguinte determinante:

$$D = x_1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & r & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & r & r & \dots & r \end{vmatrix}$$

Como esse último determine é triangular, segue que:

$$D = x_1.1.r.r...r \Rightarrow D = x_1.r^{n-1}$$

4) Calcule o valor do seguinte determinante:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 2 & 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & \dots & n-2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \dots & n-3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n-1 & n-2 & n-3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Solução:

Iniciando da última linha, subtraia cada linha da linha imediatamente acima:

$$\xrightarrow[L_3-L_2,\,L_2-L_1]{L_n-L_{n-1},\,L_{n-1}-L_{n-2},\,\dots} D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Agora some a última coluna a cada uma das demais colunas da matriz:

$$\xrightarrow[C_{n-1}+C_n]{C_1+C_n,\,C_2+C_n,\,\dots} D = \begin{vmatrix} n+1 & n+2 & n+3 & n+4 & \dots & n \\ 0 & -2 & -2 & -2 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Como a matriz obtida é triangular, segue que:

$$D = (n+1)(-2)^{n-2}(-1) \quad \Rightarrow \quad D = (-1)^{n-1}.2^{n-2}.(n+1)$$

5) Determine o valor do seguinte determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ 1 & x & x & x & 1 & \dots & n-4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Solução:

Subtraindo as linhas consecutivas (de baixo para cima):

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & 2 & \dots & n-3 \\ 1 & x & x & x & 1 & \dots & n-4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & x & x & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Multiplicando cada linha por $x - 1$ (a partir da 2ª linha) e somando na linha de baixo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & x-1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & x-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & -x & -x & -x & \dots & -x \\ 0 & 0 & 0 & -x & -x & \dots & -x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -x & \dots & -x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

Esta última matriz é triangular, logo

$$\det = 1.(-1).(-x).(-x).(-x)...(-1) = (-1)^{n-1}.x^{n-2}$$

6) Calcule o valor de $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n+1 & n+2 & n+3 & \dots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \dots & 3n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$, $n \geq 3$.

Solução:

Multiplique a 1ª linha por -1 e aplique na 2ª linha e na 3ª linha:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ n & n & n & \dots & n \\ 2n & 2n & 2n & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n^2-n+1 & n^2-n+2 & n^2-n+3 & \dots & n^2 \end{vmatrix}$$

Como as duas primeiras linhas são proporcionais, segue que $D = 0$.

11.7.1. Determinante Tri Diagonal

Determinante tri diagonal consiste em calcular o determinante de uma matriz onde os únicos elementos não nulos são os da diagonal principal e os elementos das linhas imediatamente antes e depois da diagonal principal, no seguinte padrão:

$$\begin{vmatrix} y & z & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & y & z & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & z & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y & z \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \end{vmatrix}_n$$

Existe uma maneira padrão de calcular o determinante de uma matriz tri diagonal. Inicialmente deve-se chamar o determinante original de D_n, uma vez que se trata de uma matriz de ordem n. Depois basta aplicar a regra de Laplace na 1ª linha ou 1ª coluna, obtendo matrizes de ordem n – 1 e verificar como relacionar os menore complementares em função de D_n, normalmente identificando D_{n-1} (ao aplicar regra de Laplace uma vez) ou D_{n-2} (ao aplicar a regra de Laplace uma segunda vez, se necessário). Essa relação entre D_n, D_{n-1} e, eventualmente, D_{n-2}, é uma relação de recorrência linear, cuja solução já foi apresentada neste livro.

Acompanhe com cuidado os exercícios resolvidos para aprender como calcular o determinante de uma matriz tri diagonal.

Exercícios Resolvidos

1) Calcular o valor do determinante de ordem n:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Solução:

Inicialmente, é possível concluir que se trata de uma matriz tri diagonal. Deve-se aplicar a regra de Laplace, onde as melhores filas para aplicação são a 1ª linha ou a 1ª coluna, que possuem apenas dois elementos não nulos.

Aplicando a regra de Laplace na 1ª coluna:

$$D_n = 5\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Note que o primeiro determinante é igual ao original, porém de ordem n – 1, implicando que seu valor é D_{n-1}. O segundo determinante não está ligado diretamente ao valor de D_n, por isso se deve aplicar a regra de Laplace mais uma vez, agora na sua 1ª coluna:

$$D_n = 5D_{n-1} + 2.3.\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}_{n-2} \Rightarrow D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2},$$

que é uma sequência recorrente linear de 2ª ordem, cuja equação característica é $x^2 - 5x + 6 = 0$, com raízes 2 e 3.

Assim, o termo geral da sequência é $D_n = A.2^n + B.3^n$.

Note que $D_1 = |5| = 5$ $D_2 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19$.

Logo: $5 = 2A + 3B$ e $19 = 4A + 9B \Rightarrow A = -2$ e $B = 3$.

Portanto, segue que $D_n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$.

2) Supondo que α e β são números reais distintos, calcule o valor do seguinte determinante n×n:

$$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

Solução:

Aplicando a regra de Laplace na 1ª coluna:

$$D_n = (\alpha+\beta)\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1} + 1.\begin{vmatrix} \alpha\beta & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-1}$$

Note que o primeiro determinante é igual ao original, porém de ordem n – 1, implicando que seu valor é D_{n-1}. No segundo determinante se pode aplicar a regra de Laplace na 1ª linha:

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} + \alpha\beta \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & \dots & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta \end{vmatrix}_{n-2} \Rightarrow$$

$D_n = (\alpha + \beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$

A equação característica dessa recorrência é $x^2 = (\alpha + \beta)x - \alpha\beta$, cujas raízes são α e β. Assim, o termo geral é da forma $D_n = A.\alpha^n + B.\beta^n$.

Note que $D_1 = \alpha + \beta$ e $\Delta_2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$.

Logo: $\begin{cases} A\alpha + B\beta = \alpha + \beta \\ A\alpha^2 + B\beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A\alpha\beta + B\beta^2 = \alpha\beta + \beta^2 \\ A\alpha^2 + B\beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \end{cases} \Rightarrow$

$A(\alpha^2 - \alpha\beta) = \alpha^2 \Rightarrow A = \dfrac{\alpha}{\alpha-\beta}$ e $B = -\dfrac{\beta}{\alpha-\beta}$

Desta forma: $D_n = \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}$.

3) Prove que

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & x & a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}_{n\times n} = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}$$

Solução:

Fazendo $C_n - C_{n-1}$, $C_{n-1} - C_{n-2}$, ..., $C_2 - C_1$

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ -a & x & a & \dots & a & a \\ -a & -a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & -a & -a & \dots & x & a \\ -a & -a & -a & \dots & -a & x \end{vmatrix}_n = \begin{vmatrix} x & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & x+a & a-x & \dots & 0 & 0 \\ -a & 0 & x+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & 0 & 0 & \dots & x+a & a-x \\ -a & 0 & 0 & \dots & 0 & x+a \end{vmatrix}_n$$

Repare o determinante original foi transformado em um determinante tri diagonal. Aplicando Laplace na 1ª linha:

$$D=x(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} x+a & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x+a & a-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+a & a-x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x+a \end{vmatrix}_{n-1} + (a-x)(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -a & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & x+a & a-x & \dots & 0 & 0 \\ -a & 0 & x+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & 0 & 0 & \dots & x+a & a-x \\ -a & 0 & 0 & \dots & 0 & x+a \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= x(x+a)^{n-1} + (x-a)\left(\begin{vmatrix} x & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & x+a & a-x & \dots & 0 & 0 \\ -a & 0 & x+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a & 0 & 0 & \dots & x+a & a-x \\ -a & 0 & 0 & \dots & 0 & x+a \end{vmatrix}_{n-1} + \begin{vmatrix} -a-x & a-x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x+a & a-x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x+a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x+a & a-x \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x+a \end{vmatrix}_{n-1}\right) \Rightarrow$$

$D_n = x(x+a)^{n-1} + (x-a)D_{n-1} - (x-a)(x+a)^{n-1} \Rightarrow D_n - (x-a)D_{n-1} = a(x+a)^{n-1}$

Ao contrário dos exemplos anteriores, a relação de recorrência obtida é de 1ª ordem, porém a presença da parcela $a(x+a)^{n-1}$ impede que a determinação de D_n seja imediata. É necessário fazer uma substituição algébrica para tornar a determinação do termo geral da sequência mais simples.

Fazendo $D_n = (x-a)^{n-1}y_n \Rightarrow (x-a)^{n-1}y_n - (x-a)^{n-1}y_{n-1} = a(x+a)^{n-1} \Rightarrow$

$y_n - y_{n-1} = a\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{n-1}$, que é uma relação de recorrência bastante conhecida.

Substituindo n = 2 até n e depois somando as equações:

$$y_n - y_1 = \frac{a\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)\left[\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^{n-1} - 1\right]}{\dfrac{x+a}{x-a} - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{D_n}{(x-a)^{n-1}} - x = \frac{(x+a)^n - (x+a)(x-a)^{n-1}}{2(x-a)^{n-1}} \Rightarrow$$

$$D_n = x(x-a)^{n-1} + \frac{(x+a)^n - (x+a)(x-a)^{n-1}}{2} = \frac{2x(x-a)^{n-1} + (x+a)^n - (x+a)(x-a)^{n-1}}{2} \Rightarrow$$

$$D_n = \frac{(x+a)^n + (x-a)^n}{2}$$

Exercícios de Vestibular

1) (Mackenzie-16) Se f(sen x) = sen 3x, para todo $x \in \mathbb{R}$ e A(y), para $y \in \mathbb{R}$, é a matriz 3×3,

$$A(y)=\begin{bmatrix} 1 & f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) & 1 \\ f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) & y & f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) \\ \frac{1}{2} & f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) & 1 \end{bmatrix},$$

o valor de y que satisfaz a equação det (A(y)) = 2 é

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

2) (Mackenzie-17) Considerando m e n raízes da equação $\begin{vmatrix} 2^x & 8^x & 0 \\ \log_2 x & \log_2 x^2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} =$ 0, onde x > 0, então m + n é igual a

a) 2/3 b) 3/4 c) 3/2 d) 4/3 e) 4/5

3) (UECE-14) Desenvolvendo o determinante abaixo, obtém-se uma equação do segundo grau.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -x & 0 & 0 & 7x \\ 0 & 5 & 0 & x \\ 0 & 0 & 5 & x \end{vmatrix} = 0$$

A raiz positiva desta equação é

A) 10. B) 15. C) 20. D) 25.

4) (UFPA-99) Sejam **a**, **b**, **c**, **m**, **n**, **p** números naturais tais que **a**, **b**, **c** estão, nesta ordem, em progressão aritmética (PA), enquanto **m**, **n**, **p** estão, nesta ordem, em progressão geométrica (PG). Se a razão da PA e a razão da PG são iguais a 2 e **m** é o dobro de **a**, calcule **a**, **b**, **c**, **m**, **n**, **p** de tal forma que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p-4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5) (UFC-99) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, onde α representa qualquer uma das raízes (complexas) da equação $x^2 + x + 1 = 0$. Se det M simboliza o determinante da matriz M, assinale a opção na qual consta o valor de $(\det M)^2 + (\det M) + 1$.

a) i b) 0 c) -1 d) 1 e) $-i$

6) (FGV-19) Dadas as matrizes quadradas $A = \begin{bmatrix} \cos x & -\operatorname{sen} x \\ \operatorname{sen} x & \cos x \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ -\cos x & \operatorname{sen} x \end{bmatrix}$, o valor de $\frac{\det(A+B)}{\det(A.B)}$ é igual a

a) 0. b) 0,5. c) 1. d) 2. e) 4.

7) (Insper-11) Dado um número inteiro e positivo n, considere a matriz A, de tamanho 2×n, definida por

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, para n = 3, temos que $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Dada a identidade $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ e

representando por A^T a matriz transposta de A, o determinante da matriz $A.A^T$ é
a) $(n^2 - n)/6$ b) $(n^4 - n^2)/12$
c) $(n^4 + n^2 - 2)/18$ d) $(n^2 - n)/12$
e) $(n^4 - n^2)/6$

8) (AFA-94) O determinante associado à matriz $M = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & x & x & x \\ a & x & y & y \\ a & x & y & 1 \end{bmatrix}$ é igual a:
a) $a(x - a)(y - x)^2$
b) $a(x - a)^2(1 - y)$
c) $a(1 - x)(1 - y)(x - a)$
d) $a(x - a)(y - x)(1 - y)$

9) (Mackenzie-17) Para a matriz quadrada $M = \begin{bmatrix} \cos 17° & 0 & \text{sen}\,17° \\ 1 & 1 & 1 \\ \text{sen}\,28° & 0 & \cos 28° \end{bmatrix}$ o valor do determinante de M^{10} é
a) 1/16 b) 1/32 c) 1/64
d) 1/128 e) 1/256

10) (EsPCEx-17) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} a & a^3 - b^3 & b \\ a & a^3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Se a e b são números reais não nulos e det(M) = 0, então o valor de $14a^2 - 21b^2$ é igual a
a) 15 b) 28 c) 35 d) 49 e) 70

11) (EsPCEx-93) Sejam A, B e C matrizes reais 3×3 que satisfazem às seguintes condições: $A.B = C^{-1}$; $B = (1/2)A$. Se o determinante de C é 1/32, então o valor do módulo do determinante de A é:
a) 1/8 b) 1/4 c) 8 d) 16

12) (UFPI-03) Sejam A e B matrizes 2×2 tais que det A = 3 e det B = 5. Se x e y são números inteiros positivos, considere as matrizes M = xA e N = yB. Se det(MN) = 15, podemos afirmar corretamente que:
a) $x - y = 1$ b) $xy = 15$ c) $x + y = 3$
d) $x > y$ e) $x = y = 1$

13) (FGV-05) Seja I a matriz identidade de ordem 3 e M a matriz quadrada $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Se o determinante da matriz (M + xI) é uma função polinomial na variável x, a soma de suas raízes é igual a
a) −1. b) 0. c) 1. d) 2. e) 3.

14) (UFU-04) Considere a matriz invertível $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, cujos elementos são números reais. Se B é a matriz $B = \begin{pmatrix} a_{11} & e^x a_{12} & (e^x)^2 a_{13} \\ e^x a_{21} & (e^x)^2 a_{22} & (e^x)^3 a_{23} \\ (e^x)^2 a_{31} & (e^x)^3 a_{32} & (e^x)^4 a_{33} \end{pmatrix}$ e $\det B = (e^{3x} + 2)\det A$, então o número x pertence ao intervalo
a) (2, 3) b) (− 1, 0) c) (1, 2) d) (0, 1)

15) (FGV-19) Sejam A e I matrizes quadradas de mesma ordem em que a segunda é a matriz identidade. Os autovalores da matriz A são as raízes do polinômio na variável x, det (A − x.I), em que det (A − x.I) é o determinante da matriz A − x.I. Os autovalores da matriz

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ tem por soma e produto, respectivamente:

a) 5 e 2 b) 3 e 4 c) 4 e 3
d) 2 e 5 e) 1 e 6

16) (FGV-18) Seja $A = (a_{ij})_{22}$ uma matriz tal que $a_{ij} = \begin{cases} -j^i, & \text{se } i = j \\ (-i)^j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$. A inversa da matriz A, denotada por A^{-1}, é a matriz

a) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -2 & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$

17) (UFRJ-98) O agente Id Ota inventou o seguinte código secreto para a transmissão de datas de certos fatos importantes: o código transforma uma data *d-m-a*, onde *d* é o dia, *m* é o mês e *a* representa os dois últimos algarismos do ano, em uma nova tripla de números *d'-m'-a'*, de acordo com a regra

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d \\ m \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ m' \\ a' \end{pmatrix}$$

O código revelou-se um desastre. De fato, várias datas originais distintas (*d, m, a*) correspondem a um mesmo código transmitido (*d',m',a'*). Por exemplo, as datas 1/1/97 e 2/2/96 correspondem ao mesmo código 98-98-98, pois:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 98 \\ 98 \\ 98 \end{pmatrix}$$

Id Ota pensou então em alterar o coeficiente central da matriz, a_{22}, igual a 2, para um outro valor *k*. Determine, se possível, os valores de *k* que fazem o código funcionar bem.

18) (UFC-01) O determinante da matriz mostrada na figura adiante é igual a:

$$\begin{bmatrix} \cos\frac{5\pi}{12} & \text{sen}\frac{\pi}{12} & 1 \\ \text{sen}\frac{5\pi}{12} & \text{sen}\frac{\pi}{12} & 1 \\ \cos\frac{5\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} & 1 \end{bmatrix}$$

a) 0 b) 0,5 c) 1 d) 1,5 e) 2

19) (UFPA-97) O determinante da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & y & 0 \\ 1 & 2 & 2y \end{pmatrix}$ é igual a – 2. Se *B* e *C* são as matrizes obtidas respectivamente, pela substituição em *A* do menor e do maior valor de *y* encontrados, calcule a matriz transposta do produto de *B* por *C*.

20) (Unicamp-99) Considere as matrizes:

$M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Calcule o determinante de *M* e a matriz inversa de *M*.
b) Resolva o sistema $MX = Y$

21) (UFPA-98) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} x-1 & 8 & -5 \\ -2 & 7 & 4 \end{bmatrix}$ e $C = A.B^t$, encontre o valor de x para que a matriz C possua inversa.

22) (UECE-17) Se u, v, p, q e s são números reais não nulos e os números p, q, s formam, nesta ordem, uma progressão geométrica crescente e se, além disso, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} u & 2u & 4u \\ v & 3v & 9v \\ p & q & s \end{bmatrix}$ for igual a zero, então, a razão da progressão geométrica pode ser
A) 2 ou 3. B) 3 ou 4.
C) 1,5 ou 3. D) 2,5 ou 4.

23) (UnB-12) Dada uma matriz quadrada A, define-se o traço de A, simbolizado por tr(A), como a soma dos elementos de sua diagonal principal. A partir dessas informações e considerando as matrizes $P = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ e $R = 100.Q^{-1}PQ$, determine o valor do quociente $\frac{\det(R)}{tr(R)}$ em que det(R) é o determinante da matriz R. Despreze, caso exista, a parte fracionária do resultado final obtido, após ter efetuado todos os cálculos solicitados.

24) (Unicamp-14) Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ b & 1 & a \\ 1 & b & 1 \end{bmatrix}$, onde a e b são números reais e distintos. Podemos afirmar que
a) a matriz M não é invertível
b) o determinante de M é positivo.
c) o determinante de M é igual a $a^2 - b^2$.
d) a matriz M é igual à sua transposta.

25) (Unicamp-20) Sabendo que p é um número real, considere a matriz $A = \begin{bmatrix} p & 2 \\ 0 & p \end{bmatrix}$ e sua transposta A^T. Se $A + A^T$ é singular (não invertível), então
a) $p = 0$ b) $|p| = 1$ c) $|p| = 2$ d) $p = 3$

26) (Unicamp-16) Considere a matriz quadrada de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & -\operatorname{sen} x \\ 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sen} x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$, onde x é um número real. Podemos afirmar que
a) A não é invertível para nenhum valor de x.
b) A é invertível para um único valor de x.
c) A é invertível para exatamente dois valores de x.
d) A é invertível para todos os valores de x.

27) (Unicamp-10) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, cujos coeficientes são números reais.
a) Suponha que exatamente seis elementos dessa matriz são iguais a zero. Supondo também que não há nenhuma informação adicional sobre A, calcule a probabilidade de que o determinante dessa matriz não seja nulo.
b) Suponha, agora, que $a_{ij} = 0$ para todo elemento em que $j > i$, e que $a_{ij} = i - j + 1$ para os elementos em que $j \leq i$.

Determine a matriz A, nesse caso, e calcule sua inversa, A^{-1}.

28) (AFA-13) Considere as matrizes A e B, inversíveis e de ordem n, bem como a matriz identidade I. Sabendo que det (A) = 5 e det $(I.B^{-1}.A) = 1/3$, então o det $[(3.(B^{-1}.A^{-1})^t]$ é igual a

a) 5.3^n b) $3^{n-1}/5^2$

c) $3^n/15$ d) 3^{n-1}

29) (UFPB-99) Sendo *a*, *b* e *c* as medidas dos lados de um triângulo, cujos ângulos internos opostos são $\hat{A}$, $\hat{B}$ e $\hat{C}$, respectivamente, calcule o determinante da matriz: $M = \begin{bmatrix} \text{sen } \hat{A} & \cos \hat{A} & a \\ \text{sen } \hat{B} & \cos \hat{B} & b \\ \text{sen } \hat{C} & \cos \hat{C} & c \end{bmatrix}$

30) (EFOMM-17) Calcule o determinante da matriz A de ordem n:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 2n-1 \end{pmatrix}$$

a) $\det A = \prod_{n=1}^{n-1} 2n$ b) $\det A = \prod_{n=1}^{n} 2n-1$

c) $\det A = \prod_{n=1}^{n-1} 2^n$ d) $\det A = \prod_{n=1}^{n-1} 2^{n-1}$

e) det A = 1

31) (EFOMM-20) Seja a matriz A

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\ 1 & 8 & 27 & 64 & 125 \\ 1 & 16 & 81 & 256 & 625 \end{vmatrix}$$

Qual é o valor do determinante da matriz A?

a) 96 b) 98 c) 100 d) 144 e) 288

32) (UFMA-01) Seja A uma matriz tal que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Então o elemento a_{32} da matriz inversa de A é:

a) – 1/15 b) 1/12 c) – 5/12

d) – 2/15 e) – 1/3

33) (Escola Naval-18) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, x = [2 13 65] e B = $x^T.x$. Qual é o valor do determinante de $2.A^{-1}.B^2$?

a) 0 b) 4 c) 8

d) 3380 e) 13520

34) (EFOMM-21) Considere uma equação definida por:

$$\det \begin{vmatrix} \log x & \log x^4 & \log x^{16} \\ 4^x & 16^x & 64^x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0, \forall x > 0$$

Sabendo que a solução da equação acima é o número de elementos de um conjunto A, é correto afirmar que o número de subconjuntos que se pode formar com esse conjunto é igual a

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

35) (EPCAr-05) Sejam A, B, C matrizes reais não-nulas de ordem 2, satisfazendo às seguintes relações:
1) $AB = C^{-1}$, em que C^{-1} é a inversa de C
2) $B = \frac{1}{2}A$

Se o determinante de C é 16, então o valor do módulo do determinante de A é igual a

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

36) (AFA-01) Sejam A uma matriz quadrada de ordem 3, det A = d, $\det(2A \cdot A^t) = 4k$, onde A^t é a matriz transposta de A, e d é a ordem da matriz quadrada B. Se det B = 2 e det 3B = 162, então o valor de k + d é
a) 4 b) 8 c) 32 d) 36

37) (Escola Naval-05) Considere a matriz quadrada $A = \begin{pmatrix} y^2 & 2 & 1 \\ -2 & 2y^2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

onde $y \in IR$. O produto dos valores de y, para os quais o determinante de A é igual a menor raiz da equação $|x - 3| = 15$ é

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) -1 e) $-\sqrt{2}$

38) (Escola Naval-15) Uma função $y = f(x)$ é definida pelo determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} x^2 & x-1 & x & -2 \\ x^3 & x & x & 1-x \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ em que cada $x \in IR$ tal que A é invertível. É correto afirmar que o conjunto imagem de f é igual a:
a) $(-\infty, 4]$ b) $IR - \{0, 4\}$
c) $(-\infty, 4] - \{0\}$ d) $(-\infty, 4)$
e) $[4, +\infty)$

39) (ITA-64) Sem desenvolver, mostrar que $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$

40) (ITA-67) Seja o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{ e}$$

A_1, A_2, A_3 respectivamente os complementos algébricos de c_1, c_2, c_3. Então $a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3 =$
a) D b) $-D$ c) 0
d) D^{-1} e) 1

41) (ITA-69) Sejam $X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix}$ matrizes quadradas 2×2. Uma das afirmações abaixo é verdadeira, assinale-a.

a) $X.X = \begin{bmatrix} x_{11}^2 & x_{12}^2 \\ x_{21}^2 & x_{22}^2 \end{bmatrix}$
b) $\det(\alpha.X) = \alpha.\det X$
c) $\det(X + Y) = \det X + \det Y$
d) $\det(\alpha X) = \alpha^2.\det X$
e) $\det(X.Y) = \det X + \det Y$

42) (ITA-71) Qual o resto da divisão por 3 do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 & -6 \\ (3-4) & (6-1) & (-3-5) & (9+6) \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

a) 0 b) 3 c) 7 d) 1 e) N.d.r.a.

43) (ITA-75) Seja A uma matriz quadrada de ordem n, tal que $A^{-1} = A^t$. Se det A = 1, dizemos que A é uma matriz de rotação, e se det A = – 1, A é uma matriz de reflexão. Apoiado em tais definições, podemos afirmar que:
a) se n é ímpar, o produto de duas matrizes de reflexão é de reflexão.
b) a soma de duas matrizes de rotação é de rotação.
c) o produto de duas matrizes de rotação é de rotação.
d) a matriz inversa de toda matriz de rotação é de rotação.
e) nenhuma das respostas anteriores.

44) (ITA-78) Sejam a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, k é real, k ≠ 1/2 e a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ de razão q > 0, $a_i = q^{i-1}.\det A$, i = 1, 2, 3, ..., n. Se a_3 = det B, com $B = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{k}{3} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ e a soma dos 16 primeiros termos dessa progressão geométrica é igual a $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{6}$, podemos dizer que:
a) $k = 1 - 3^{-8}$
b) k é um número negativo
c) $k = 1 + 3^{-8}$
d) k ≥ 0
e) nda

45) (ITA-80) Sejam $A = (a_{ij})$ uma matriz real quadrada de ordem 2 e I_2 a matriz identidade também de ordem 2. Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $\det(A - rI_2) = nr$, onde n é um número inteiro positivo, podemos afirmar que:
a) $r_1 + r_2 = a_{11} + a_{22}$
b) $r_1 + r_2 = -(a_{11} + a_{22})$
c) $r_1 + r_2 = n.(a_{11} + a_{22})$
d) $r_1.r_2 = \det A$
e) $r_1.r_2 = -n.\det A$

46) (ITA-81) Dizemos que uma matriz real quadrada A é singular, se det A = 0, ou seja, se o determinante de A é nulo, e não-singular se det A ≠ 0. Mediante esta definição, qual das afirmações abaixo é verdadeira?
a) A soma de duas matrizes A e B é uma matriz singular, se det A = – det B.
b) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se, e somente se, ambas forem singulares.
c) O produto de duas matrizes é uma matriz singular se pelo menos uma delas for singular.
d) Uma matriz singular possui inversa.
e) A transposta de uma matriz singular é não-singular.

47) (ITA-82) Sendo A uma matriz real quadrada de ordem 3, cujo determinante é igual a 4, qual o valor de x na equação $\det(2AA^t) = 4x$?
a) 4 b) 8 c) 16 d) 32 e) 64

48) (ITA-84) Sejam P, Q, R matrizes reais quadradas arbitrárias de ordem n. Considere as seguintes afirmações:
I - se PQ = PR, então Q = R
II - se P^3 é a matriz nula, então o determinante de P é zero

III - PQ = QP

Podemos afirmar que:

a) I é a única afirmação verdadeira
b) II e III são afirmações verdadeiras
c) I e II são afirmações verdadeiras
d) III é a única afirmação falsa
e) I e III são afirmações falsas

49) (ITA-85) Dadas as matrizes:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & -1 \\ 0 & x_1 & 1 \\ x_3 & -x_2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B=\begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -x_2 & 0 \\ -x_3 & 0 & -x_3 \end{pmatrix}$$

onde x_1, x_2 e x_3 são raízes da seguinte equação em x: $x^3 + ax^2 + bx - 2 = 0$. Se $\det A = 4x_1$ e $\det (A - B) = 8$, então podemos afirmar que:

a) $\det (A - B) = 5$ e $a = 2$
b) $\det A = b$ e $a = 2$
c) $\det B = 2$ e $b = 5$
d) $\det (A - B) = a$ e $b = \det A$
e) $\det A = a/2$ e $b = a/2$

50) (ITA-86) Seja $x \in \Re$ e A a matriz definida por

$$A=\begin{bmatrix} 1+\operatorname{sen} x & \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Se S é o conjunto dos x tais que A é uma matriz inversível, então podemos afirmar que:

a) S é vazio b) $S = \{k\pi/2, k \in Z\}$
c) $S = [0, 2\pi]$ d) $S = \{k\pi, k \in Z\}$
e) $S = [-\pi/2, \pi/2]$

51) (ITA-87) Seja λ um número real, I a matriz identidade de ordem 2 e A a matriz quadrada de ordem 2, cujos elementos a_{ij} são definidos por: $a_{ij} = i + j$. Sobre a equação em λ definida por $\det(A - \lambda I) = \det A - \lambda$, qual das afirmações abaixo é verdadeira?

a) Apresenta apenas raízes negativas.
b) Apresenta apenas raízes inteiras.
c) Uma raiz é nula e a outra negativa.
d) As raízes são 0 e 5/2.
e) Todo λ real satisfaz esta equação.

52) (IME-15) Dada a matriz A, a soma do módulo dos valores de x que tornam o determinante da matriz A nulo é

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x & 0 & 0 \\ x^2 & 1 & x-1 & 2 \\ 1 & x+4 & 0 & 0 \\ x & -1 & 1 & x-2 \end{bmatrix}$$

a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

53) (ITA-87) Quaisquer que sejam os números reais a, b e c, o determinante da matriz $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$ é dado por:

a) ab + ac + bc b) abc c) zero
d) abc + 1 e) 1

54) (ITA-88) Sejam as matrizes:

$$A=\begin{vmatrix} \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{4} \\ \tan\pi & \sin\frac{2\pi}{5} \end{vmatrix} \quad B=\begin{vmatrix} \sec\frac{2\pi}{5} & \cos\frac{2\pi}{5} \\ \cos\pi & \cot\frac{\pi}{2} \end{vmatrix}$$

Se $a = \det A$ e $b = \det B$ então o número complexo $a + bi$ tem módulo igual a:

a) 1 b) $\sin 2\pi/5 + \cos 2\pi/5$ c) 4
d) $2\sqrt{2}$ e) 0

55) (ITA-88) Seja A uma matriz real que possui inversa. Seja n um número inteiro positivo e A" o produto de matriz A por

ela mesma n vezes. Das afirmações a verdadeira é:
a) A^n possui inversa, qualquer que seja o valor de n
b) A^n possui inversa apenas quando n = 1 ou n = 2.
c) A^n possui inversa e seu determinante independe de n.
d) A^n não possui inversa para valor algum de n, n > 1.
e) Dependendo da matriz A, a matriz A^n poderá ou não ter inversa.

56) (ITA-88) Seja A uma matriz quadrada inversível, de ordem 3. Seja B a matriz dos cofatores da matriz A. Sabendo-se que det A = – 2, calcule det B.

57) (ITA-89) Sendo A, B, C matrizes reais n×n, considere as seguintes afirmações:
1. A(BC) = (AB)C
2. AB = BA
3. A + B = B + A
4. det (AB) = det (A).det (B)
5. det (A + B) = det (A) + det (B)
Então podemos afirmar que:
a) 1 e 2 são corretas
b) 2 e 3 são corretas
c) 3 e 4 são corretas
d) 4 e 5 são corretas
e) 5 e 1 são corretas

58) (ITA-89) Sendo $A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix}$ então o elemento da terceira linha e primeira coluna, de sua inversa, será:
a) 5/8 b) 9/11 c) 6/11
d) –2/13 e) 1/13

59) (ITA-89) Sabendo-se que x e y são reais, tais que $x + y = \pi/4$, verifique se a matriz $\begin{vmatrix} 2\tan x & 1+\tan x \\ 1+\tan y & \tan y \end{vmatrix}$ é ou não inversível:

60) (ITA-90) Sejam A, B e C matrizes n×n tais que A e B são inversíveis e ABCA = A^t é a transposta da matriz A. Então, podemos afirmar que:
a) C é inversível e det C = det $(AB)^{-1}$
b) C não é inversível pois det C = 0
c) C é inversível e det C = det B
d) C é inversível e det C = $(\det A)^2$.det B
e) C é inversível e det C = (det A)/(det B)

61) (ITA-91) Sejam *m* e *n* números reais com m ≠ n e as matrizes:
$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
Para que a matriz *m*A + *n*B seja não inversível é necessário que:
a) *m* e *n* sejam positivos
b) *m* e *n* sejam negativos
c) *m* e *n* tenham sinais contrários
d) $n^2 = 7m^2$
e) n.d.a

62) (ITA-92) Seja $C = \{X \in M_{2\times 2}: X^2 + 2X = 0\}$. Dadas as afirmações:
I. Para todo X ∈ C, (X + 2I) é inversível.
II. Se X ∈ C e det (X + 2I) ≠ 0 então X é não inversível.
III. Se X∈C e det X ≠ 0 então det X > 0.
Podemos dizer que:
a) todas são verdadeiras.
b) todas são falsas.
c) apenas II e III são verdadeiras.
d) apenas I é verdadeira.
e) n.d.a.

63) (ITA-93) Sabendo-se que a soma das raízes da equação $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ x & 0 & x & 0 \\ 0 & b & x & x \\ b & x & 2 & b \end{vmatrix} = 0$ é $\frac{-8}{3}$ e que S é o conjunto destas raízes, podemos afirmar que:

a) $S \subset [-17, -1]$ b) $S \subset [1, 5]$
c) $S \subset [-1, 3]$ d) $S \subset [-10, 0]$
e) $S \subset [0, 3]$

64) (ITA-93) Seja a matriz 3×3 dada por $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sabendo-se que B é a inversa de A, então a soma dos elementos de B vale:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 0 e) –2

65) (ITA-94) Sejam A e I matrizes reais quadradas de ordem 2, sendo I a matriz identidade. Por T denotemos o traço de A, ou seja T é a soma dos elementos da diagonal principal de A. Se $T \neq 0$ e λ_1, λ_2 são raízes da equação $\det(A - \lambda I) = \det(A) - \det(\lambda I)$, então:

a) λ_1 e λ_2 independem de T
b) $\lambda_1 . \lambda_2 = T$ c) $\lambda_1 . \lambda_2 = 1$
d) $\lambda_1 + \lambda_2 = T/2$ e) $\lambda_1 + \lambda_2 = T$

66) (ITA-94) Sejam A e P matrizes reais quadradas de ordem n tais que A é simétrica (isto é $A = A^t$) e P é ortogonal (isto é, $PP^t = I = P^tP$), P diferente da matriz identidade. Se $B = P^tAP$ então:

a) AB é simétrica b) BA é simétrica
c) det A = det B d) BA = AB
e) B é ortogonal

67) (ITA-94) Seja A uma matriz real quadrada de ordem n e B = I – A, onde I denota a matriz identidade de ordem n. Supondo que A é inversível e idempotente (isto é $A^2 = A$) considere as afirmações:

1. B é idempotente 2. AB = BA
3. B é inversível 4. $A^2 + B^2 = I$
5. AB é simétrica

Com respeito a estas afirmações temos:

a) Todas são verdadeiras
b) Apenas uma é verdadeira
c) Apenas duas são verdadeiras
d) Apenas três são verdadeiras
e) Apenas quatro são verdadeiras

68) (ITA-95) Dizemos que duas matrizes *n×n* A e B são semelhantes se existe uma matriz *n×n* inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Se A e B são matrizes semelhantes quaisquer, então

a) B é sempre inversível
b) se A é simétrica, então B também é simétrica
c) B^2 é semelhante a A
d) se C é semelhante a A, então BC é semelhante a A^2
e) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$, onde λ é um real qualquer.

69) (ITA-96) Considere A e B matrizes reais 2×2, arbitrárias. Das afirmações abaixo assinale a verdadeira. No seu caderno de respostas, justifique a afirmação verdadeira e dê exemplo para mostrar que cada uma das demais é falsa.

a) Se A é não nula então A possui inversa
b) $(AB)^t = A^tB^t$
c) det (AB) = det (BA)
d) $\det A^2 = 2\det A$
e) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

70) (ITA-95) Sejam A e B matrizes reais 3×3. Se $tr(A)$ denota a soma dos elementos da diagonal principal de A, considere as afirmações:
[(I)] $tr(A^t) = tr(A)$
[(II)] Se A é inversível, então $tr(A) \neq 0$.
[(III)] $tr(A + \lambda B) = tr(A) + \lambda tr(B)$, para todo $\lambda \in R$.
Temos que
a) todas as afirmações são verdadeiras.
b) todas as afirmações são falsas.
c) apenas a afirmação (I) é verdadeira.
d) apenas a afirmação (II) é falsa.
e) apenas a afirmação (III) é falsa.

71) (ITA-96) Seja $a \in \Re$ e considere as matrizes reais 2×2, $A = \begin{bmatrix} 3^a & -1 \\ -1 & 3^a \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 7^{a-1} & 8^{a-3} \\ 7 & 2^{-3} \end{bmatrix}$. O produto AB será inversível se e somente se:
a) $a^2 - 5a + 6 \neq 0$ b) $a^2 - 5a \neq 0$
c) $a^2 - 3a \neq 0$ d) $a^2 - 2a + 1 \neq 0$
e) $a^2 - 2a \neq 0$

72) (ITA-98) Sejam A e B matrizes reais quadradas de ordem 2 que satisfazem a seguinte propriedade: existe uma matriz M inversível tal que $A = M^{-1}BM$. Então:
a) $\det(-A^t) = \det B$
b) $\det A = -\det B$
c) $\det(2A) = 2 \det B$
d) Se $\det B \neq 0$ então $\det(-AB) < 0$
e) $\det(A - I) = -\det(I - B)$

73) (ITA-99) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Se x e y são soluções do sistema $(AA^t - 3I)X = B$, então x + y é igual a:
a) 2 b) 1 c) 0 d) – 1 e) – 2

74) (ITA-00) Considere as matrizes $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.
Se X é solução de $M^{-1}NX = P$, então $x^2 + y^2 + z^2$ é igual a:
a) 35 b) 17 c) 38 d) 14 e) 29

75) (ITA-03) Sejam a, b, c e d números reais não-nulos. Exprima o valor do determinante da matriz
$$\begin{bmatrix} bcd & 1 & a & a^2 \\ acd & 1 & b & b^2 \\ abd & 1 & c & c^2 \\ abc & 1 & d & d^2 \end{bmatrix}$$
na forma de um produto de números reais.

76) (ITA-04) Considere as afirmações dadas a seguir, em que A é uma matriz quadrada n×n, $n \geq 2$:
I – O determinante de A é nulo se e somente se A possui uma linha ou uma coluna nula.
II – Se $A = (a_{ij})$ é tal que $a_{ij} = 0$ para $i > j$, com $i, j = 1, 2, ..., n$, então $\det A = a_{11} a_{22} ... a_{nn}$.
III – Se B for obtida de A, multiplicando-se a primeira coluna por $\sqrt{2} + 1$ e a

segunda por $\sqrt{2}-1$, mantendo-se inalteradas as demais colunas, então det B = det A.
Então, podemos afirmar que é (são) verdadeira(s).
a) apenas II
b) apenas III
c) apenas I e II
d) apenas II e III
e) todas

77) (ITA-05) Sejam A e B matrizes 2×2 tais que AB = BA e que satisfazem à equação matricial $A^2 + 2AB - B = 0$. Se B é inversível, mostre que
a) $AB^{-1} = B^{-1}A$
b) A é inversível

78) (ITA-06) Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do $\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$ é igual a
a) 0 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

79) (ITA-06) Sejam as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -5 & 1 & 3/2 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1/2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 1/2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Determine o elemento C_{34} da matriz $C = (A + B)^{-1}$.

80) (ITA-21) Sejam A e B matrizes quadradas de ordem ímpar. Suponha que A é simétrica e que B é antissimétrica. Considere as seguintes afirmações:
I. $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$:
II. A comuta com qualquer matriz simétrica.
III. B comuta com qualquer matriz antissimétrica.
IV. det (AB) = 0:
É(são) VERDADEIRA(S):
A) nenhuma.
B) apenas I.
C) apenas III.
D) apenas IV.
E) apenas II e IV.

81) (IME-81) Seja $M = (m_{ij})$ uma matriz quadrada real n×n de termos positivos. Define-se o "permanente de M" como $\text{perm}M = \sum_{S} m_{1+(1)}.m_{2+(2)}...m_{n+(n)}$ onde S é o conjunto das permutações (t(1), t(2), ..., t(*n*)) de {1, 2, ..., n}. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ tem, por exemplo, como permanente 1.5.9 + 4.8.3 + 2.6.7 + 3.5.7 + 2.4.9 + 1.6.8. Seja a matriz *n*×*n*, H (h_{ij}) onde $h_{ij} = i(j + 1)$. Calcule o permanente de H.

82) (IME-79) Dadas as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1+x \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & -x & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

determine x, sabendo que existe uma matriz inversível P tal que $A = P^{-1}.B.P$

83) (IME-80) Seja, para n = 1, 2, 3, ... a coleção B(n) = {M | M = [m_{ij}] é matriz quadrada de ordem n e $|m_{ij}| = 1$}. (Note que B(2) tem $2^4 = 16$ elementos). Prove que, se M ∈ B(n), então o determinante

de M é múltiplo de 2^{n-1}, para n = 1, 2, 3, ...

84) (IME-83) Seja um determinante definido por $A_1 = |1|$ e

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a) Pede-se a fórmula de recorrência (isto é, a relação entre A_n e A_{n-1}).
b) Calcule a expressão de A_n em função de n.

85) (IME-84) Seja D o determinante da matriz $A = [a_{ij}]$ de ordem n, tal que $a_{ij} = |i - j|$. Mostre que:

$$D = (-1)^{n-1}.(n-1).2^{n-2}$$

86) (IME-89) Calcule o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{bmatrix}$$

87) (IME-92) Calcule o valor do determinante abaixo:

$$D_n = \begin{vmatrix} m+x & m & m & m & \dots & m \\ m & m+x & m & m & \dots & m \\ m & m & m+x & m & \dots & m \\ m & m & m & m+x & m & m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m & m & m & m & \dots & m+x \end{vmatrix}$$

88) (IME-93) Determine o valor de x para que

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 4 & 6 \\ x & x+2 & 0 & 10 \\ x^2 & 0 & 4x & 4 \\ x & 4 & 10 & x-2 \end{vmatrix} = 0$$

89) (IME-94) Um aluno, ao inverter a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 4 & e & f \end{bmatrix} = [a_{ij}]$, $1 \le i, j \le 3$ cometeu um engano, e considerou o elemento a_{13} igual a 3, de forma que acabou invertendo a matriz:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & c & d \\ 3 & e & f \end{bmatrix} = [b_{ij}]$$

Com esse engano o aluno encontrou B $= \begin{bmatrix} 5/2 & 0 & -1/2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -5/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$. Determinar A^{-1}

90) (IME-00) Calcule o determinante

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 7 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 11 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 13 \end{vmatrix}$$

91) (IME-04 CG) Determine para que valores de α o determinante abaixo se anula.

$$\begin{vmatrix} sen2\alpha & 0 & 0 \\ cos\,2\alpha & cos\,\alpha & sen\alpha \\ cos\,2\alpha & sen\alpha & cos\,\alpha \end{vmatrix}$$

92) (IME-04) Calcule o número natural n que torna o determinante abaixo igual a 5.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \log_2(n-1) & \log_2(n+1) & \log_2(n-1) & \log_2(n-1) \end{vmatrix}$$

93) (IME-05) Calcule o determinante da matriz $n \times n$ em função de b, onde b é um número real tal que $b^2 \neq 1$.

$$\left.\begin{vmatrix} b^2+1 & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b & b^2+1 & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & b^2+1 & b & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & b^2+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b^2+1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b & b^2+1 \end{vmatrix}\right\} n \text{ linhas}$$

n colunas

94) (ITA-08) Uma matriz real quadrada A é ortogonal se A é inversível e $A^{-1} = A^t$. Determine todas as matrizes 2×2 que são simétricas e ortogonais, expressando-as, quando for o caso, em termos de seus elementos que estão fora da diagonal principal.

95) (ITA-06) Se $\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix} = -1$, então o valor do

$$\det\begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c \\ 2p+x & 2q+y & 2r+z \\ 3x & 3y & 3z \end{bmatrix}$$

é igual a

a) 0 b) 4 c) 8 d) 12 e) 16

96) (IME-07) Seja a matriz D dada por $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ p & q & r \\ sen(\hat{P}) & sen(\hat{Q}) & sen(\hat{R}) \end{bmatrix}$ na qual p, q e r são lados de um triangulo cujos ângulos opostos são, respectivamente, $\hat{P}$, $\hat{Q}$ e $\hat{R}$. O valor do determinante de D é:

a) −1 b) 0 c) 1 d) π e) p + q + r

97) (IME-07) Considere as matrizes $A = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, e seja P uma matriz inversível tal que $B = P^{-1}AP$. Sendo **n** um número natural, calcule o determinante da matriz A^n.

98) (IME-08) Assinale a opção correspondente ao valor da soma das raízes reais da equação:

$$\begin{vmatrix} \log x & \log x & \log x \\ \log 6x & \log 3x & \cos x \\ 1 & 1 & \log^2 x \end{vmatrix} = 0$$

a) 1,0 b) π c) 10,0 d) 11,0 e) 11,1

99) (ITA-09) Seja $A \in M_{2\times2}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica e não nula, cujos elementos são tais que a_{11}, a_{12} e a_{22} formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q \neq 1$ e $tr\,A = 5a_{11}$. Sabendo-se que o sistema $AX = X$ admite solução não nula $X \in M_{2\times1}(\mathbb{R})$, pode-se afirmar que $a_{11}^2 + q^2$ é igual a:

a) $\frac{101}{25}$ b) $\frac{121}{25}$ c) 5 d) $\frac{49}{9}$ e) $\frac{25}{4}$

100) (ITA-09) Sejam A, B $\in M_{3\times3}(\mathbb{R})$. Mostre as propriedades abaixo:

a) Se AX é matriz coluna nula, para todo $X \in M_{3\times1}(\mathbb{R})$, então A é a matriz nula.

b) Se A e B são não nulas e tais que AB é a matriz nula, então det A = det B = 0.

101) (ITA-10) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & a_6 \end{bmatrix} \in M_{3\times3}(R)$, em que $a_4 = 10$, det A = -1000 e a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6, formam, nesta ordem, uma progressão aritmética de razão d > 0. Pode-se afirmar que $\frac{a_1}{d}$ é igual a.

a) -4 b) -3 c) -2 d) -1 e) 1

102) (ITA-10) Sobre os elementos da matriz $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{4\times4}(R)$.

Sabe-se que (x_1, x_2, x_3, x_4) e (y_1, y_2, y_3, y_4) são duas progressões geométricas de razão 3 e 4 de soma 80 e 255, respectivamente. Então, det A^{-1} e o elemento $A^{-1}{}_{23}$ valem, respectivamente,

a) $\frac{1}{72}$ e 12 b) $-\frac{1}{72}$ e -12

c) $-\frac{1}{72}$ e 12 d) $-\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

e) $\frac{1}{72}$ e $\frac{1}{12}$

103) (ITA-11) Considere as afirmações abaixo:

I – Se M é uma matriz quadrada de ordem n > 1, não-nula e não-inversível, então existe matriz não-nula N, de mesma ordem, tal que MN é matriz nula.

II – Se M é uma matriz quadrada inversível de ordem n tal que det $(M^2 - M) = 0$, então existe matriz não-nula X, de ordem n×1, tal que MX = X.

III – A matriz $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ \frac{\text{tg}\theta}{\sec\theta} & 1 - 2\text{sen}^2\frac{\theta}{2} \end{bmatrix}$ é inversível, $\forall\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$

Destas, é (são) verdadeira (s)

a) apenas II b) apenas II e II

c) apenas I e III d) apenas II e III

e) todas.

104) (ITA-12) Considere a matriz quadrada *A* em que os termos da diagonal principal são 1, $1 + x_1$, $1 + x_2$, ..., $1 + x_n$ e todos os outros termos são iguais a 1. Sabe-se que $(x_1, x_2, ..., x_n)$ é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é $\frac{1}{2}$ e a razão é 4. Determine a ordem da matriz *A* para que o seu determinante seja igual a 256.

105) (ITA-12) Seja *n* um número natural. Sabendo que o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} n & \log_2 2 & -\log_2\frac{1}{2} \\ n+5 & \log_3 3^n & \log_3 243 \\ -5 & \log_5\frac{1}{125} & -\log_5 25 \end{bmatrix}$$

é igual a 9, determine *n* e também a soma dos elementos da primeira coluna da matriz inversa A^{-1}.

106) (ITA-13) Considere $A \in M_{5\times5}(\mathbb{R})$ com $\det(A) = \sqrt{6}$ e $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\det(\alpha A'AA') = \sqrt{6}\alpha^2$, o valor de α é

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{\sqrt{6}}{6}$ C) $\frac{\sqrt[3]{36}}{6}$.

D) 1. E $\sqrt{216}$.

107) (ITA-14) Considere as seguintes afirmações sobre as matrizes quadradas A e B de ordem n, com A inversível e B antissimétrica:

I. Se o produto AB for inversível, então n é par

II. Se o produto AB não for inversível, então n é impar;

III. Se B for inversível, então n é par.

Destas afirmações, é (são) verdadeira(s)

A) apenas I.

B) apenas I e II.

C) apenas I e III.

D) apenas II e III.

E) todas

108) (ITA-14) Seja M uma matriz quadrada de ordem 3, inversível, que satisfaz a igualdade

$$\det(2M^2) - \det\left(\sqrt[3]{2}M^3\right) = \frac{2}{9}\det(3M)$$

Então, um valor possível para o determinante da inversa de M é

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{2}{3}$

D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

109) (ITA-15) Considere a matriz $M = (m_{ij})_{2\times2}$ tal que $m_{ij} = j - i + 1$, i, j = 1,2. Sabendo-se que

$$\det\left(\sum_{k=1}^{n} M^k - n\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 252$$

Então o valor de n é igual a

a) 4 b) 5. c) 6. d) 7. e) 8.

110) (IME-09) Dada uma matriz quadrada A de ordem n, definida da seguinte forma:

* os elementos da linha i da coluna n são da forma $a_{in} = -\binom{n}{n-i+1}$,

* os elementos imediatamente abaixo da diagonal principal são unitários, isto é, $a_{ij} = 1$ para $i - j = 1$;

* todos os demais elementos são nulos.

Sendo I a matriz identidade de ordem n e det(M) o determinante de uma matriz M, encontre as raizes da equação $\det(x.I - A) = 0$

111) (IME-09) Seja A uma matriz quadrada inversível de ordem 4 tal que o resultado da soma $(A^4 + 3A^3)$ é uma matriz de elementos nulos. O valor do determinante de A é

A) -81 B) -27 C) -3

D) 27 E) 81

112) (IME-12 CG) Determine os valores de α e β que anulam o determinante abaixo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ \alpha^2 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & \beta^2 \\ \alpha & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{25} & 0 & 0 & \beta \end{vmatrix}.$$

113) (IME-11) Mostre que o determinante abaixo apresenta valor menor ou igual a 16 para todos valores de a, b e c, pertencentes ao conjunto dos números reais, que satisfazem a equação $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

$$\begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ c+a & a+b & b+c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$$

114) (IME-12) São dadas as matrizes quadradas inversíveis A, B e C, de ordem 3. Sabe-se que o determinante de C vale $(4 - x)$, onde x é um número real, o determinante da matriz inversa de B vale $-1/3$ e que $(CA^t)^t = P^{-1}BP$, onde P é uma matriz inversível. Sabendo que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & x & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, determine os possíveis valores de x.

a) -1 e 3 b) 1 e -3 c) 2 e 3
d) 1 e 3 e) -2 e -3

115) (IME-17) Seja $\begin{bmatrix} 1 & a & -2 \\ a-2 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, com $a \in \mathbb{R}$. Sabe-se que $\det(A^2 - 2A + I) = 16$. A soma dos valores de a que satisfazem essa condição é:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

116) (IME-16) Define-se A como matriz 2016×2016, cujos elementos satisfazem à igualdade $a_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1}$, para $i, j \in \{1, 2, ..., 2016\}$. Calcule o determinante de A.

117) (ITA-17) Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é

a) 144 b) 180 c) 240 d) 324 e) 360

118) (ITA-18) Sejam $x_1, ... x_5$ e $y_1, ..., y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5× 5 definida por $a_{ij} = x_i + y_j$, $1 \leq i; j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4. E) 5.

119) (ITA-19) Considere as seguintes afirmações a respeito de matrizes A de ordem n×n inversíveis, tais que os seus elementos e os de sua inversa sejam todos números inteiros:

I. $|\det(A)| = 1$.
II. $A^T = A^{-1}$.
III. $A + A^{-1}$ é uma matriz diagonal.

É(são) sempre VERDADEIRA(S)

a) apenas I. b) apenas III.
c) apenas I e II. d) apenas I e III.
e) todas.

120) (ITA-18) Uma progressão aritmética $(a_1, a_2, ..., a_n)$ satisfaz a propriedade: para cada $n \in \mathbb{N}$, a soma da progressão é igual a $2n^2 + 5n$. Nessas condições, o determinante da matriz $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 + 2 & a_8 & a_9 \end{bmatrix}$ é

A) −96. B) −85. C) 63.
D) 99. E) 115.

121) (IME-18) Sejam x_1, x_2, x_3 e x_4 os quatro primeiros termos de uma P.A. com $x_1 = x$ e razão r, com x, r ∈ IR. O determinante de $\begin{bmatrix} x_1 & x_1 & x_1 & x_1 \\ x_1 & x_2 & x_2 & x_2 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}$ é:

a) 0 b) $x^4.r$ c) $x^4.r^3$ d) $x.r^4$ e) $x.r^3$

122) (IME-19) Calcule o valor do determinante:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ \log 81 & \log 900 & \log 300 \\ (\log 9)^2 & 2 + 4\log 3 + 2(\log 3)^2 & (\log 3 + 2)^2 \end{vmatrix}$$

a) 1 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

123) (IME-10) Considere o determinante de uma matriz de ordem n definido por:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Sabendo que $\Delta_1 = 1$, o valor de Δ_{10} é

A) 59049 B) 48725 C) 29524

D) 9841 E) 364

124) (IME-06) Seja $D_n = \det(A_n)$, onde

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

Determine D_n em função de n (n ∈ IN, n ≥ 1).

125) (IME-04 CG) Seja a matriz A de dimensão n × n tal que $a_{ij} = \begin{cases} 2^i, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$, onde $1 \leq i, j \leq n$. Determine o valor de n sabendo que o determinante da matriz 2A vale 2^{14}.

126) (IME-11 CG) Sabe-se que o determinante da matriz M, apresentada abaixo, vale $a.\text{sen}^b\frac{\alpha}{2}.\text{sen}^c\frac{\beta}{2}.\text{sen}^d\frac{\gamma}{2}$, onde a, b, c e d são números inteiros e α, β e γ são números reais. Determine o valor de a + b + c + d.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ 1 & \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}$$

127) (IME-13 CG) Determine o(s) valor(es) de x que satisfaz(em) a equação

$$\begin{vmatrix} 1 & \text{sen } x & \text{sen } 15^\circ \\ \text{sen } x & 1 & \cos x \\ \text{sen } 75^\circ & \cos x & 1 \end{vmatrix} = \frac{(-1) + 3\,\text{sen } 45^\circ}{4}$$

128) (IME-07 CG) Seja a matriz A dada por

$$A = \begin{bmatrix} (c+d) & d & \frac{l}{c} \\ a.c & \left(\frac{l}{b} + \frac{1}{(c+d)}\right) & 0 \\ 0 & a & b \end{bmatrix}$$

onde b, c e d são as raízes reais do polinômio $p(x) = 2x^3 - 4x + 3x + 6$. Determine os valores de a, a∈Z, que tornam a matriz A singular, onde Z é o conjunto dos números inteiros.

Exercícios Gerais

129) Uma matriz quadrada é idempotente se $A^2 = A$. Mostre que, se uma matriz inversível A é idempotente, então A = I.

130) Uma matriz n×n A é nilpotente se $A^r = O$ para algum inteiro positivo r. Mostre que, se A é matriz n×n inversível, então A é não nilpotente.

131) Mostre que se A, B e A + B possuem inversas, então o mesmo acontece com $A^{-1} + B^{-1}$. Prove também que
$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A$

132) Prove que toda matriz quadrada anti-simétrica de dimensão ímpar é singular.

133) Prove que $\det(\text{adj. } A) = (\det A)^{n-1}$.

134) Sabendo que adj. $A = \det A.(A^{-1})$ e $\det(\text{adj. } A) = (\det A)^{n-1}$, prove que:
adj. (adj. A) = $(\det A)^{n-2}$.A.

135) Mostrar que o determinante da matriz abaixo é independente de x:

$$\begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) & 1 \\ \cos(x+b) & \sin(x+b) & 1 \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) & 1 \end{vmatrix}$$

136) Se *a*, *b* e *c* são reais mostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \sin a & \cos a \\ 1 & \sin b & \cos b \\ 1 & \sin c & \cos c \end{vmatrix} = 4\sin\frac{b-c}{2}\sin\frac{a-c}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

137) Mostrar, sem desenvolver, que o determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 6 & 7 & 4 \\ 9 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ é divisível por 13.

138) Mostrar, sem desenvolver, que os determinantes das matrizes são iguais a zero

a) $\begin{vmatrix} 1 & \sin^2 a & \cos^2 a \\ 1 & \sin^2 b & \cos^2 b \\ 1 & \sin^2 c & \cos^2 c \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} \cos 2a & 2\sin^2 a & 1 \\ \cos 2b & 2\sin^2 b & 1 \\ \cos 2c & 2\sin^2 c & 1 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} a+3m & b+3m & c+3p \\ a+m & b+n & c+p \\ a & b & c \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} \cos a & \cos^3 a & \cos 3a \\ \cos b & \cos^3 b & \cos 3b \\ \cos c & \cos^3 c & \cos 3c \end{vmatrix}$

139) Mostrar que:

$$\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$$

140) Mostrar que as raizes da equação:

$$\begin{vmatrix} x & a & a & a \\ a & x & a & a \\ a & a & x & a \\ a & a & a & x \end{vmatrix} = 0 \quad \text{são } -3a \text{ e } a$$

141) Mostrar que:

$$\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

142) Mostrar que:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = 1$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+a_n \end{vmatrix} = a_1 a_2 \dots a_n$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = -2(n-2)!$

143) Mostrar que:

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos 2a & \sin a \\ 1 & \cos 2b & \sin b \\ 1 & \cos 2c & \sin c \end{vmatrix} =$$

$$= (\sin b - \sin c)(\sin c - \sin a)(\sin a - \sin b)$$

144) Provar que $\begin{vmatrix} \cot\frac{A}{2} & \cot\frac{B}{2} & \cot\frac{C}{2} \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

sendo A, B, C ângulos de um triângulo e a, b, c os lados opostos, respectivamente, aos mesmos ângulos.

145) Prove que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} = n!$

146) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = b_1 b_2 \dots b_n$$

147) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x & x_2 & \dots & x_{n-1} & x_n \\ 1 & x_1 & x & \dots & x_{n-1} & x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x & x_n \\ 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_{n-1} & x \end{vmatrix} =$$

$$= (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$$

148) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 5 & \dots & n-1 & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 2n-3 & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 2n-1 \end{vmatrix} = (n-1)!$$

149) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & n \end{vmatrix} = -2(n-2)!$$

150) Prove que

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a \\ a & x & a & \dots & a \\ a & a & x & \dots & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

151) Prove que

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$$

152) Provar, sem desenvolver os determinantes, que:

$$\begin{bmatrix} bc & 1 & a \\ ac & 1 & b \\ ab & 1 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{bmatrix}.$$

153) Provar, sem desenvolver nenhum dos determinantes, que D' = – 6D.

$$D = \begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} \quad \text{e}$$

$$D' = \begin{vmatrix} -6b & 2b^3 & 2b^2 & 2b^4 \\ -3a & a^3 & a^2 & a^4 \\ -3c & c^3 & c^2 & c^4 \\ -3d & d^3 & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

154) Demonstrar que o valor de

$$D = \begin{vmatrix} a^2 & (a+2)^2 & (a+4)^2 \\ (a+2)^2 & (a+4)^2 & (a+6)^2 \\ (a+4)^2 & (a+6)^2 & (a+8)^2 \end{vmatrix} \text{ é } -2^9.$$

155) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = n+1$$

156) Prove que

$$\begin{vmatrix} 2 & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ 1-\frac{1}{n} & 2 & 1-\frac{1}{n} & \dots & 1-\frac{1}{n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & 1-\frac{1}{n} & \dots & 2 \end{vmatrix}_{(n-1)\times(n-1)} = \frac{(n+1)^{n-1}}{n^n}$$

157) Prove que:

$$\begin{vmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} = x^n + (-1)^{n-1} y^n$$

158) Prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix} = 1$$

159) Prove que

$$\det A_{n\times n} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ x & x & 1 & \cdots & n-2 \\ . & . & . & \cdots & . \\ x & x & x & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

é igual a $(-1)^{n+1}.x^n + (1-x)^n$.

160) Calcule o valor do determinante da seguinte matriz n×n:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

161) Prove que

$$D = \begin{vmatrix} \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin(3a) & \sin(3b) & \sin(3c) \end{vmatrix}$$

é igual a:

$4\text{sen}(a-b)\text{sen}(b-c)\text{sen}(c-a)\text{sen}(a+b+c)$

162) Prove que

$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(a+b)(b+c)(c+a)$$

163) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

164) Em uma matriz quadrada M de ordem $n \geq 3$, os elementos de cada linha estão em PG. Considere que o 1° elemento de cada PG é não nulo e que as razões são todas não nulas. Mostrar que det M = 0, quando e somente quando duas progressões têm a mesma razão.

165) Prove que

$$\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} = x^2z^2$$

166) Considere uma matriz P n×n ortogonal. Dado que det P = – 1, prove que $\det(P + I_n) = 0$.

167) Usando apenas a definição de determinante, prove que:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

168) Prove que

$$\begin{vmatrix} \cos(a-b) & \cos(b-c) & \cos(c-a) \\ \cos(a+b) & \cos(b+c) & \cos(c+a) \\ \text{sen}(a+b) & \text{sen}(b+c) & \text{sen}(c+a) \end{vmatrix} =$$

$= \text{sen}(c-a).\text{sen}(c-b).\text{sen}(a-b)$

169) Prove que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \cdots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \cdots & C_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}$$

é igual a 1.

170) Determine a condição que uma matriz A com elementos inteiros deve satisfazer de modo que todos os elementos da sua inversa também sejam inteiros.

171) Prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \binom{x_1}{1} & \binom{x_2}{1} & \binom{x_3}{1} & \dots & \binom{x_n}{1} \\ \binom{x_2}{2} & \binom{x_2}{2} & \binom{x_3}{2} & \dots & \binom{x_n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \binom{x_1}{n-1} & \binom{x_2}{n-1} & \binom{x_3}{n-1} & \dots & \binom{x_n}{n-1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{n \geq i > k \geq 1} (x_i - x_k)}{1!.2!.3!...(n-1)!}$$

172) Prove que o determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & 1 & 2 & \dots & n-1 \end{vmatrix}$$

é igual a $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$.

173) Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem n. Prove que:

Adj (A.B) = Adj (A).Adj (B).

174) A série numérica que começa pelos números 1, 2 e na qual cada um dos números seguintes é igual a soma dos números anteriores, ou seja, a série 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ..., se denomina série de Fibonacci. Demonstre que o n-ésimo termo da sequência mencionada é igual ao determinante da matriz de ordem n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

175) Demonstre que:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$$

176) Demonstrar que:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \dots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \dots & a_{2n} + x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \dots & a_{nn} + x \end{vmatrix}$$

pode ser escrito na forma $D = D_0 + Sx$, onde D_0 é o determinante para $x = 0$ e S é a soma dos cofatores de todos os elementos de D_0.

177) Demonstrar que a soma dos cofatores de todos os elementos de um determinante não varia se a todos os elementos for somado um mesmo número.

178) Seja A uma matriz anti-simétrica de ordem par. Demonstrar que o determinante de A não varia se a todos os seus elementos é somado o mesmo número.

SISTEMA LINEARES

12.1. EQUAÇÃO LINEAR

12.1.1. Definição: Chama-se equação linear à toda equação do tipo $a_1.x_1 + a_2.x_2 + ... + a_n.x_n = b$, ou seja, $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$. onde:

i) os elementos a_i são constantes e são denominados de coeficientes da equação;
ii) os termos da forma x_i podem assumir qualquer valor e são denominados de variáveis ou incógnitas da equação;
iii) o termo b também é uma constante e é denominado de termo independente da equação.

Por exemplo, $3x + 4y + 5z = 2$ é classificada como uma equação linear. Por outro lado, $4x + 2y^2 + 3z = 4$ não é uma equação linear, pois a parcela y^2 é do 2° grau.

12.1.2. Classificação quanto ao valor de b

Se $b = 0$ a equação é dita homogênea. Por exemplo, tanto $3x + 5y = 0$ quanto $\pi x_1 + \log 8.x_2 + 5.x_3 - 3,2.x_4 = 0$ são equações lineares homogêneas. Se $b \neq 0$ a equação é dita não homogênea. Por exemplo, $3x + 4y + 5z = 4$ e $6x - 9y + 2z - 4w = 20$ são equações lineares não homogêneas.

12.2. SISTEMA DE EQUAÇÕES LINEARES

É todo conjunto de duas ou mais equações lineares. Por exemplo, são exemplos de sistemas lineares:

$$\begin{cases} x - 3y = -6 \\ 2x + 5y = 5 \end{cases}, \begin{cases} 10x - 3y = -8 \\ -7x + 2y = -4, \\ 4x - y = 1 \end{cases} \begin{cases} x - y + 2z = 7 \\ 2x + 5y - z = 5 \\ 3x - 2y + 7z = 4 \end{cases} \text{ e } \begin{cases} 6x - 2y - 9z = 1 \\ -5x + 9y + 4z = 2 \end{cases}.$$

12.2.1. Classificação quanto à homogeneidade das equações do sistema:

i) Sistema homogêneo: todas as equações do sistema são homogêneas.
ii) Sistema não homogêneo: pelo menos uma equação do sistema é não homogênea.

Por exemplo, $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ é um sistema homogêneo e $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$ é um sistema não homogêneo.

12.2.3. Solução de um Sistema Linear

12.2.3.1. Definição: Dado um sistema linear com **m** equações e **n** incógnitas chama-se solução do sistema à ê-nupla de reais $(t_1, t_2..., t_n)$ tal que substituindo-se a incógnita x_i pelo real t_i em todas as equações as igualdades correspondentes serão satisfeitas.

Por exemplo, o terno ordenado $(1, -1, 2)$ é solução do sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+y-z=-1 \\ x-y+z=4 \end{cases}$, pois satisfaz cada uma das equações do sistema:

$x + y + z = 1 + (-1) + 2 = 2$

$2x + y - z = 2.1 + (-1) - 2 = -1$

$x - y + z = 1 - (-1) + 2 = 4$

Observação:

(1) A ê-nupla nula $(0, 0, ..., 0)$ é solução de qualquer sistema linear homogêneo com n incógnitas, daí ela ser chamada de **solução trivial** e isto implica que todo sistema homogêneo sempre tem solução. Acrescente-se que estas afirmativas não valem para os sistemas não homogêneos.

12.2.3.2. Quanto ao número de soluções um sistema linear pode ser

i) Compatível ou possível: quando o sistema admite solução. No caso de um sistema possível há duas possibilidades: $\begin{cases} \text{Determinado: Tem uma única solução.} \\ \text{Indeterminado: Tem infinitas soluções.} \end{cases}$

ii) Incompatível ou Impossível: Não tem solução.

É útil observar que se o sistema é homogêneo ele será sempre possível e determinado ou indeterminado, desde que $(0, 0, ..., 0)$ sempre será solução.

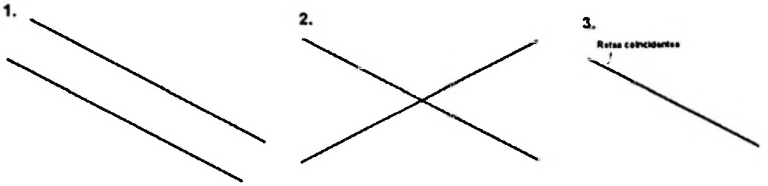
Por exemplo, no sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ a única solução é $(3, 2)$, fazendo com que o sistema seja classificado como possível e determinado. No sistema $\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+2y=10 \end{cases}$ há infinitas soluções, uma vez que $(a, 5-a)$, $a \in \mathbb{R}$, sempre satisfaz as equações. Assim, esse sistema é classificado como possível e indeterminado. Por outro lado, observa-se que o sistema $\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$ não admite soluções, sendo classificado como impossível. As justificativas para as conclusões acima sobre as quantidades de soluções dos exemplos citados serão apresentadas futuramente neste capítulo.

12.2.3.3. Interpretação Geométrica

12.2.3.3.1. Sistema com duas variáveis

Sabe-se que, num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais, qualquer equação da forma ax + by = c representa uma reta. Se tivermos duas equações lineares com duas variáveis, teremos duas retas em um plano xOy. As soluções do sistema linear são representadas pelos pontos em comum das duas retas. As duas retas podem:

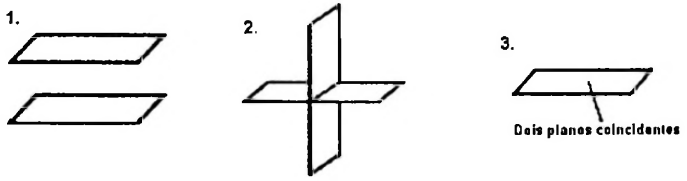
1. ser paralelas: o sistema não tem solução (impossível);
2. ser concorrentes: o sistema tem uma única solução (possível e determinado);
3. ser coincidentes: o sistema tem infinitas soluções, descritas pelos pontos da reta (possível e indeterminado).



12.2.3.3.1. Sistema com três variáveis

É sabido que, num sistema de coordenadas tridimensional, uma equação da orma ax + by + cz = d representa um plano. Se tivermos duas equações desta forma, .eremos dois planos no espaço. Portanto, as soluções do sistema são representadas pelos pontos em comum dos dois planos. Os dois planos podem:

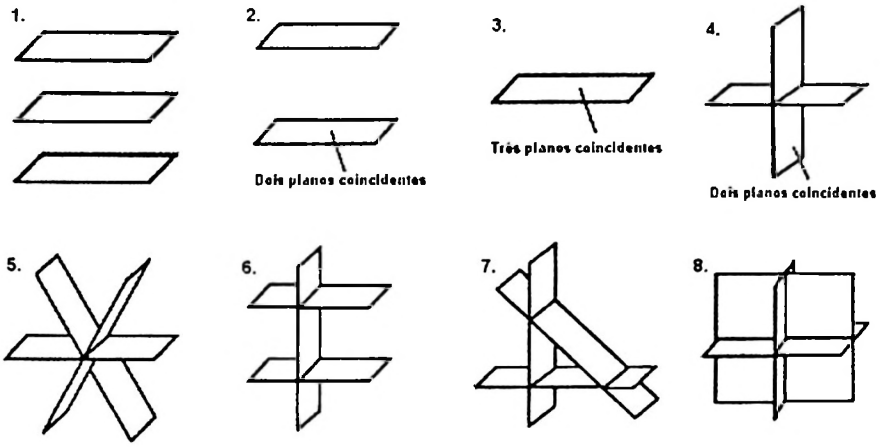
1. ser paralelos: o sistema não tem solução (impossível);
2. ser concorrentes: o sistema tem infinitas soluções, descritas pelos pontos de uma reta (possível e indeterminado);
3. ser coincidentes: o sistema tem infinitas soluções, descritas pelos pontos do próprio plano (possível e indeterminado).



No caso de três equações desta forma, serão três planos no espaço. As soluções do sistema são representadas pelos pontos em comum dos três planos. Os três planos podem:

1. ser paralelos dois a dois: o sistema não tem solução (impossível);
2. ser dois coincidentes e o outro paralelo: o sistema não tem solução (impossível);
3. ser coincidentes: o sistema tem infinitas soluções, descritas pelos pontos do plano (possível e indeterminado);

4. ser dois coincidentes e o outro concorrente: o sistema tem infinitas soluções, descritas pelos pontos de uma reta (possível e indeterminado);
5. se intersectar em uma reta: o sistema tem infinitas soluções, descritas pelos pontos de uma reta (possível e indeterminado);
6. ser dois paralelos e outro concorrente: o sistema não tem solução (impossível);
7. se intersectar dois a dois determinando três retas paralelas: o sistema não tem solução (impossível);
8. se intersectar dois a dois determinando três retas que se intersectam em apenas um ponto: o sistema tem uma única solução (possível e determinado).



Considere as interpretações geométricas dos seguintes exemplos:

(1) $\begin{cases} 10x + 10y = -30 \\ -5x - 5y = 15 \end{cases}$: duas retas paralelas coincidentes (possível e indeterminado)

(2) $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -6x + 3y = 5 \end{cases}$: duas retas paralelas não coincidentes (impossível)

(3) $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 3y = 6 \end{cases}$: duas retas concorrentes (possível e determinado)

(4) $\begin{cases} x + y - z = -1 \\ 5x + 5y - 5z = -5 \end{cases}$: dois planos paralelos coincidentes (possível e indeterminado)

(5) $\begin{cases} 2x + y - 5z = 2 \\ 8x + 4y - 20z = 8 \end{cases}$: dois planos paralelos não coincidentes (impossível)

(6) $\begin{cases} -3x + y + 2z = 0 \\ x + 6y - 5z = 7 \end{cases}$: dois planos concorrentes (possível e indeterminado)

(7) $\begin{cases} x+2y-3z=-1 \\ -2x-4y+6z=2 \\ 3x+6y-9z=-3 \end{cases}$: três planos paralelos coincidentes (possível e indeterminado)

(8) $\begin{cases} 2x+2y-2z=4 \\ 3x+3y-3z=6 \\ x+y-z=9 \end{cases}$: dois planos coincidentes e outro paralelo (impossível)

(9) $\begin{cases} x+2y-7z=3 \\ 2x+4y-14z=7 \\ 5x+10y-35z=23 \end{cases}$: três planos paralelos não coincidentes (impossível)

(10) $\begin{cases} 2x+2y-2z=4 \\ 3x+3y-3z=11 \\ 5x-y-4z=9 \end{cases}$: dois planos paralelos e outro concorrente (impossível)

11) $\begin{cases} -x+2y-4z=-2 \\ 2x-4y+8z=4 \\ x-5y+4z=-29 \end{cases}$: dois planos coincidentes e outro concorrente (impossível)

12) $\begin{cases} x-y+3z=-1 \\ 2x+2y-4z=5 \\ 3x+y-z=4 \end{cases}$: três planos se intersectando dois a dois determinando três retas paralelas (impossível)

(13) $\begin{cases} x-y+3z=-1 \\ 2x+2y-4z=5 \\ 3x+y-z=11 \end{cases}$: três planos cruzando numa reta (possível e indeterminado)

(14) $\begin{cases} x-y+3z=-1 \\ 2x+2y-4z=5 \\ 3x+y-z=11 \end{cases}$: três planos se intersectando dois a dois determinando três retas que se intersectam em apenas um ponto (possível e determinado).

12.3. DEPENDÊNCIA LINEAR

12.3.1. Definição 1: Sejam X_1, X_2, ... X_n matrizes de mesma ordem e $\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n$ números reais. Considere a matriz A dada por:

$$A = \alpha_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i .$$

Neste caso, afirma-se que A é uma combinação linear das matrizes X_i com coeficientes α_i.

12.3.2. Definição 2: Dadas as matrizes X_1, X_2, ... X_n de mesma ordem e os reais α_1, α_2, ... α_n, uma combinação linear das matrizes X_i é dita nula se $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i = 0$. (0 é a matriz nula de mesma ordem que as matrizes X_i)

12.3.3. Definição 3: Dadas as matrizes X_1, X_2, ... X_n de mesma ordem e os reais α_1, α_2, ... α_n então:

a) As matrizes X_i são denominadas linearmente independentes $(\ell . i.)$ se:

$$\alpha_1 X_1 + a_2 X_2 + ... + a_n X_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, \forall i .$$

b) As matrizes X_i são ditas linearmente dependentes $(\ell . d.)$ se existem os reais α_1, α_2, ..., α_n, com pelo menos um $\alpha_i \neq 0$, de modo que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$.

Por exemplo, as matrizes $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ são linearmente independentes pois a única possibilidade para $\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ é que $\alpha_1 = 0$ e $\alpha_2 = 0$. Entretanto, as matrizes $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix}$ são linearmente dependentes pois $\alpha_1 = 3$ e $\alpha_2 = 1$ é uma possibilidade para $\alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ -12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

O ferramental algébrico necessário para chegar à essas conclusões será ainda apresentado neste capítulo.

Observações

(1): É importante observar que se as matrizes X_i são ℓ . i. não é possível tirar uma matriz em função das outras, pois

$$0.X_1 + 0.X_2 + ... + 0.X_r + ... + 0.X_n = 0 \Rightarrow X_r = -\frac{0}{0}X_1 - \frac{0}{0}X_2 - ... - \frac{0}{0}X_n,$$

o que é um absurdo.

(2): Se as matrizes X_i são ℓ . d. é possível expressar pelo menos uma delas X_r como combinação linear das outras:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... \alpha_r X_r + ... + \alpha_n X_n = 0 \rightarrow X_r = -\frac{\alpha_1}{\alpha_r}X_2 ... \frac{\alpha_n}{\alpha_r}X_n$$

e como pelo menos um α_i é não nulo podemos supor $\alpha_r \neq 0$.

12.3.4. Dependência linear de um sistema linear

As definições acima podem ser usadas para estudar a dependência linear de um sistema de equações lineares. Considere o sistema linear de n equações e m variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_m = y_2 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nm}x_m = y_n \end{cases}$$

Sejam X_i matrizes formadas por m + 1 elementos, onde os primeiros m elementos são, em sequência, os m primeiros coeficientes de cada equação linear do sistema e o último elemento é o termo independente da mesma equação:

$$X_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad ... \quad a_{1m} \quad y_1),\ X_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad ... \quad a_{2m} \quad y_2), ...,$$

$$X_{n-1} = (a_{n-1\,1} \quad a_{n-1\,2} \quad ... \quad a_{n-1\,m} \quad y_{n-1}),\ X_n = (a_{n1} \quad a_{n2} \quad ... \quad a_{nm} \quad y_n)$$

Afirma-se que as equações do sistema linear são **linearmente dependentes** se existiram os números reais $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ (não todos nulos) tais que $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n = 0$. Por outro lado, afirma-se que as equações do sistema linear são **linearmente independentes** se a única solução de $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + ... + \alpha_n X_n = 0$ é $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n$.

Por exemplo, analisando o sistema linear $\begin{cases} -x + 3y - 4z = 1 \\ 2x - 4y + 3z = -2 \\ 3x - 5y + 2z = -3 \end{cases}$, observa-se que:

$$1.(-1 \quad 3 \quad -4 \quad 1) + 2.(2 \quad -4 \quad 3 \quad -2) + (-1).(3 \quad -5 \quad 2 \quad -3) = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Deste modo, pode-se afirmar que, no referido sistema linear, as equações são linearmente dependentes. Repare que a 3ª equação pode ser obtida somando a primeira equação com a segunda equação multiplicada por dois:

$$(1)\times[9 - x + 3y - 4z = 1] + (2)\times[2x - 4y + 3z = -2] = [3x - 5y + 2z = -3]$$

É importante ressaltar que, neste sistema, eliminando uma das equações, obtém-se um sistema linear com duas equações linearmente independentes. Por exemplo, eliminando a 3ª equação, pode-se demonstrar que não existem reais α_1 e α_2, não todos nulos, de modo que $\alpha_1.(-1 \quad 3 \quad -4 \quad 1)+\alpha_2.(2 \quad -4 \quad 3 \quad -2)=(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$. Logo, o sistema linear $\begin{cases} -x+3y-4z=1 \\ 2x-4y+3z=-2 \end{cases}$ é formado por duas equações linearmente independentes.

Para entender melhor o porquê das conclusões acima, é importante entender o conceito de grau de liberdade de um sistema linear.

12.3.5. Grau de Liberdade de um Sistema Linear

Considere um sistema linear com n equações e m variáveis. Suponha que destas n equações, um total de p equações são linearmente independentes, com $p \leq n$. O grau de liberdade de um sistema linear é definido como a subtração **m – p**.

Por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} x-y+2z=4 \\ -2x+y+z=0 \\ 5x-3y=4 \end{cases}$ as equações são linearmente dependentes uma vez que:

$$1.(1 \quad -1 \quad 2 \quad 4)+(-2).(-2 \quad 1 \quad 1 \quad 0)+(-1).(5 \quad -3 \quad 0 \quad 4)=(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

Neste sistema, há três variáveis e duas equações linearmente independentes, implicando em um sistema com grau de liberdade igual a 3 – 2 = 1. Isso significa que para determinar o conjunto solução do sistema será necessário escrever o valor de cada variável em função de uma das variáveis do sistema. Fazendo z = k, o conjunto solução do sistema em questão pode ser descrito da forma $\{(3k-4, 5k-8, k)\}$, $k \in Z$.

Caso o grau de liberdade for igual a 2, é necessário escrever os elementos do conjunto solução em função de duas variáveis. Por exemplo, o sistema linear $\begin{cases} x-y+z=1 \\ -2x+2y-2z=-2 \\ 3x-3y+3z=3 \end{cases}$ tem três variáveis e uma equação linearmente independente, apresentando, portanto, grau de liberdade igual a 3 – 1 = 2. Logo, para representar o conjunto solução é necessário adotar duas variáveis paramétricas. Fazendo $y = \alpha$ e $z = \beta$ segue que o conjunto solução é dado por $S = \{(1 + \alpha - \beta, \alpha, \beta)\}$.

Para entender melhor como determinar se um sistema é ℓ.i. ou ℓ.d. é necessário entender alguns conceitos que serão trabalhados futuramente neste capítulo, como característica de uma matriz e escalonamento.

12.4. REGRA DE CRAMER

Considere um sistema linear com n variáveis e n equações linearmente independentes.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Como o número de variáveis é igual ao número de equações linearmente independentes, o grau de liberdade é zero e com isso é possível calcular o valor numérico de todas as variáveis do sistema, ou seja, existe uma única ê-nupla ordenada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ que é solução do sistema.

Vamos agora determinar uma expressão que permita calcular o valor de cada variável. Inicialmente vamos transformar o sistema linear em uma operação matricial:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow AX = Y \Rightarrow X = A^{-1}.Y \Rightarrow$$

$$X = \frac{Adj(A)}{\det A}.Y \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x_i = \frac{A_{i1}.y_1 + A_{i2}.y_2 + \ldots + A_{in}.y_n}{\det A}$$

Agora note que a expressão $A_{i1}.y_1 + A_{i2}.y_2 + \ldots + A_{in}.y_n$ pode ser interpretada como o determinante de uma matriz obtida, a partir de A, fazendo a troca da coluna i pelos elementos da matriz Y.

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{i-1\,1} & y_1 & a_{i+1\,1} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{i-1\,2} & y_2 & a_{i+1\,2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{i-1\,n} & y_n & a_{i+1\,n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{i-1\,1} & a_{i1} & a_{i+1\,1} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{i-1\,2} & a_{i2} & a_{i+1\,2} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{i-1\,n} & a_{in} & a_{i+1\,n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}}$$

À matriz obtida, a partir de A, fazendo a troca da coluna i pelos elementos da matriz Y dá o nome de A_i. Logo, os valores de x_1, x_2, ..., x_n podem ser escritos da seguinte forma:

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A},\ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A},\ \ldots,\ x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

A Regra de Cramer permite determinar uma fórmula para o cálculo dos valores numéricos das variáveis de um sistema linear. Observe que existem duas restrições para a aplicação da regra de Cramer, a saber:

1) o sistema deve possuir n equações e n variáveis;

2) o determinante de A deve ser diferente de zero.

Considere, como exemplo, o sistema linear $\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 2x - y - z = 0 \\ 4x + y - z = 4 \end{cases}$. Aplicando a regra de Cramer segue, aplicando Sarrus, que:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 10;\ \det A_x = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 10;$$

$$\det A_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 10;\ \det A_z = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 10.$$

Assim: $x = \frac{\det A_x}{\det A} = 1;\ y = \frac{\det A_y}{\det A} = 1;\ z = \frac{\det A_z}{\det A} = 1 \Rightarrow S = \{(1, 1, 1)\}$

Observações:

(1) A regra de Cramer é o método mais demorado para chegar ao conjunto solução de um sistema linear. Seu mérito reside no fato de ser possível determinar uma fórmula para cada variável do sistema, o que é muito útil em demonstrações de teoremas, como será visto com mais detalhes futuramente.

(2) A regra de Cramer não serve para classificar um sistema quanto ao número de soluções. O fato de alguns determinantes envolvidos nas expressões da regra de Cramer serem iguais a zero não implica, necessariamente, em uma classificação do sistema.

(3) É possível aplicar a regra de Cramer para resolver um sistema com mais equações que variáveis. Para que isso seja possível o número de equações linearmente independentes deve ser igual ao número de variáveis. Quando isso ocorrer, basta eliminar algumas equações até que fiquem em número igual ao de variáveis e aplicar a regra de Cramer.

Exercícios Resolvidos

1) Determinar o conjunto solução do sistema $\begin{cases} x+y+z=6 \\ 4x+2y-z=5 \\ x+3y+2z=13 \end{cases}$.

Solução:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 8; \qquad A_x=\begin{bmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 13 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_x = 8;$$

$$A_y=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \\ 1 & 13 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_y = 16; \qquad A_z=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A_z = 24;$$

i) $x=\dfrac{\det A_x}{\det A}=\dfrac{8}{8}=1;$ ii) $y=\dfrac{\det A_y}{\det A}=\dfrac{16}{8}=2;$ iii) $z=\dfrac{\det A_z}{\det A}=\dfrac{24}{8}=3$

Logo, o conjunto solução do sistema é S = {(1, 2, 3)}

2) É possível aplicar a regra de Cramer para discutir o sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=0 \end{cases}$?

Solução:

Esse exemplo é apenas para demonstrar que a regra de Cramer não deve ser usada na discussão de um sistema. Alguns livros antigos continham a seguinte regra:

"Se det A ≠ 0 o sistema é possível e determinado; se det A = 0 e se todos os det A_i são nulos o sistema é possível e indeterminado e se det A = 0 e se pelo menos um dos det A_i é diferente de zero o sistema é impossível."

O problema é que existem muitos sistemas em que essa regra falha. No sistema em questão, multiplicando a primeira equação por 3 obtém-se 3x + 3y + 3z = 3, que é incompatível com a terceira equação, fazendo com que o sistema seja impossível. Entretanto, aplicando a regra falha citada:

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0;\ \det A_x=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0;\ \det A_y=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}=0;\ \det A_z=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0,$$

onde a conclusão (incorreta!) é sistema possível e indeterminado, que não confere com a verdade, pois o sistema é, na verdade, impossível.

Esse exemplo prova que a regra de Cramer deve ser usada apenas para resolver um sistema linear, caso seja possível e determinado, nunca para discuti-lo.

12.5. SISTEMA ESCALONADO

Dada um sistema linear, afirma-se que ele é escalonado se:

1) A primeira equação apresenta o primeiro coeficiente não nulo.

2) Cada uma das equações lineares, a partir da segunda, apresenta mais coeficientes nulos iniciais do que a precedente equação.

Isto acontece, por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} 2x+3y-3z+8t=9 \\ -4y+2z-8t=-3 \\ 6z+2t=0 \\ -3t=6 \end{cases}$, que é um sistema linear escalonado. Note que a 2ª equação inicia com um coeficiente nulo, a 3ª equação inicia com dois coeficientes nulos e a 3ª equação inicia com três coeficientes nulos.

Não é obrigatório num sistema escalonado que o número de variáveis seja igual ao número de equações nem que cada equação tenha exatamente um coeficiente nulo a menos que a equação anterior. Os exemplos abaixo são de sistemas escalonados:

$$\begin{cases} a+2b-5c-2d+7e=11 \\ 8b+3c+7d-6c=-9 \\ 6d-5e=-3 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} -2a-b-7c+2d-9e+4f=11 \\ 3b-8c+2d+2e-6f=4 \\ -2d-4e+7f=10 \\ f=6 \end{cases}$$

Em algumas situações é necessário mudar de ordem as equações e/ou as variáveis para escrever o sistema escalonado na forma usual. Por exemplo, no sistema linear $\begin{cases} 5x=10 \\ x+3y-5z=8 \\ 3x-2z=4 \end{cases}$ é necessário passar a primeira equação pro final do sistema e depois inverter de lugar as variáveis, obtendo $\begin{cases} 3y-5z+x=8 \\ -2z+3x=4 \\ 5x=10 \end{cases}$.

A forma geral de um sistema escalonado com n equações e n variáveis é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n-1}x_{n-1}+a_{1n}x_n=y_1 \\ a_{22}x_2+\ldots+a_{2n-1}x_{n-1}+a_{2n}x_n=y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1\,n-1}x_{n-1}+a_{n-1n}x_n=y_{n-1} \\ a_{nn}x_n=y_n \end{cases}$$

12.5.1. Determinação do Conjunto Solução de um Sistema Escalonado

Seja um sistema de n equações e n variáveis dado na forma escalonada:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n-1}x_{n-1} + a_{1n}x_n = y_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n-1}x_{n-1} + a_{2n}x_n = y_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}x_n = y_{n-1} \\ a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

Se $a_{nn} \neq 0$ (o caso em que $a_{nn} = 0$ será discutido futuramente) tem-se:

$$x_n = \frac{y_n}{a_{nn}}.$$

Substituindo esse valor de x_n na $(n-1)^a$ equação obtém-se uma equação do 1° grau em x_{n-1}, onde determina-se o valor de x_{n-1}:

$$a_{n-1\,n-1}x_{n-1} + a_{n-1\,n}\frac{y_n}{a_{nn}} = y_{n-1}$$

Substituindo os valores de x_n e x_{n-1} na $(n-2^a)$ equação, obtém-se uma equação do 1° grau em x_{n-2}, onde calcula-se o valor de x_{n-2}. Seguindo esse procedimento até a 1ª equação, pode-se determinar de forma rápida (afinal de contas são equações de 1° grau!) o conjunto solução do sistema.

Perceba, porém, que este procedimento funciona de forma perfeita quando o sistema linear possui n equações e n variáveis.

Por exemplo, no sistema escalonado $\begin{cases} 3x - 5y + z = 9 \\ -2y + 3z = 4 \\ 5z = 10 \end{cases}$, para determinar o conjunto solução basta calcular z na última equação, depois substituir esse valor de z na segunda equação para calcular y e finalmente substituir os valores de y e z na primeira equação e calcular x:

i) $5z = 10 \Rightarrow z = 2$

ii) $-2y + 3z = 4 \Rightarrow -2y + 3(2) = 4 \Rightarrow -2y + 6 = 4 \Rightarrow -2y = -2 \Rightarrow y = 1$

iii) $3x - 5y + z = 9 \Rightarrow 3x - 5(1) + 2 = 9 \Rightarrow 3x - 3 = 9 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$

Logo, o conjunto solução do sistema linear escalonado é $S = \{(4, 1, 2)\}$

12.5.2. Forma Escalonada de um Sistema Linear

Evidentemente, nem todo sistema linear está na forma escalonada. Entretanto, para um sistema linear qualquer, é possível determinar sua forma escalonada.

Regra Prática: Para escalonarmos um sistema linear de n equações e m variáveis

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \ldots + a_{3m}x_m = y_3 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nm}x_m = y_n \end{cases}$$

deveremos seguir o seguinte roteiro:

a) Colocamos como 1ª equação qualquer uma em que o 1° coeficiente é não nulo.

b) Da 2ª até a nª equação, se $a_{i1} \neq 0$ $(2 \leq i \leq n)$, deve-se multiplicar a 1ª equação por $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ e somar o resultado dessa combinação linear na linha i. Como resultado, todos os primeiros coeficientes da 2ª até a nª linha ficarão nulos.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2m}x_m = y'_2 \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 + \ldots + a'_{3m}x_m = y'_3 \\ \ldots \\ a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \ldots + a'_{nm}x_m = y'_n \end{cases}$$

c) Esqueça a 1ª equação. Se a'_{22} é o 1° coeficiente $(a'_{22} \neq 0)$ da 2ª equação e a'_{i2} é o 1° coeficiente não nulo da iª equação $(3 \leq i \leq n)$, deve-se multiplicar a 2ª equação por $-\frac{a'_{i2}}{a'_{22}}$ e somar o resultado dessa combinação linear na linha i $(3 \leq i \leq n)$. Como resultado, todos os segundos coeficientes da 3ª até a nª linha ficarão nulos.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2m}x_m = y'_2 \\ a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3m}x_m = y''_3 \\ \ldots \\ a''_{n3}x_3 + \ldots + a'_{nm}x_m = y''_n \end{cases}$$

d) Esqueça as primeiras e as segundas equações. Repete-se este procedimento para zerar os terceiros coeficientes desde a 4ª até a nª equação.

e) Repetindo o procedimento seguidamente, será obtida a forma escalonada do sistema linear original.

Veja os exemplos seguintes para maiores esclarecimentos.

Exercícios Resolvidos

1) Escalonar e resolver o sistema linear $\begin{cases} x-2y+4z=7 \\ -2x+3y-6z=-12 \\ 3x-4y+8z=15 \end{cases}$.

Solução:

$$\begin{cases} x-2y+4z=7 \\ -2x+3y-6z=-12 \\ 3x-4y+6z=15 \end{cases} \xrightarrow[-3.(eq.1)+(eq.3)]{2(eq.1)+(eq.2)} \begin{cases} x-2y+4z=7 \\ -y+2z=2 \\ 2y-6z=-6 \end{cases} \xrightarrow{2(eq.2)+(eq.3)}$$

$$\begin{cases} x-2y+4z=7 \\ -y+2z=2 \\ -2z=-2 \end{cases}$$

Da 3ª equação segue diretamente que $z = 1$

Substituindo $z = 1$ na 2ª equação: $y + 2.1 = 2 \Rightarrow y = 0$

Substituindo $y = 0$ e $z = 1$ na 1ª equação: $x - 2.0 + 4.1 = 7 \Rightarrow x = 3$

O conjunto solução do sistema é $S = \{(3, 0, 1)\}$

12.5.3. Teorema: Um sistema linear e sua forma escalonada possuem o mesmo conjunto solução.

Demonstração:

Considere o sistema linear $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = y_n \end{cases}$, composto de n equações e m variáveis.

Se $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ é um elemento do conjunto solução, então satisfaz todas as equações do sistema.

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1m}x_m = y_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2m}x_m = y_2 \\ \ldots \\ \alpha_{n1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nm}x_m = y_n \end{cases}$$

Suponha que é aplicada uma combinação sobre uma das equações (por exemplo, a 2ª equação), obtida multiplicando a 1ª equação por k e somando na 2ª equação:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = y_1 \\ (ka_{11} + a_{21})x_1 + (ka_{12} + a_{22})x_2 + \ldots + (ka_{1m} + a_{2m})x_m = y_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = y_n \end{cases}$$

Note que, em relação ao sistema original, a única equação diferente é a 2ª. Assim, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ satisfaz as equações 1, 3, 4, ..., n. Por outro lado:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1m}\alpha_m = y_1 \\ a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{2m}\alpha_m = y_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$(ka_{11} + a_{21})\alpha_1 + (ka_{12} + a_{22})\alpha_2 + \ldots + (ka_{1m} + a_{2m})\alpha_m = y_2$$

Deste modo, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ também satisfaz a 2ª equação do novo sistema, satisfazendo, portanto, todo o novo sistema obtido a partir de uma cominação linear. Logo, um sistema obtido a partir de outro por cominação linear das equações possuem o mesmo conjunto solução. Como a forma escalonada é obtida a partir de várias combinações lineares, o sistema original e sua forma escalonada possuem o mesmo conjunto solução.

12.5.4. Discussão de um Sistema Linear a Partir de sua Forma Escalonada

Pelo teorema anterior, um sistema e sua forma escalonada possuem o mesmo conjunto solução. Portanto, para analisar a quantidade de soluções de um sistema linear, pode-se primeiro obter sua forma escalonada e depois discutir quantas soluções esta apresenta. Esta discussão é baseada na quantidade de soluções da última equação da forma escalonada.

Considere um sistema, na forma escalonada, com n equações e m variáveis. Existem quatro situações a serem consideradas, divididas em dois casos.

1º caso: na última equação existe mais de uma variável com coeficientes não nulos Neste caso, a última equação fica da forma $a_{nk}x_k + a_{n\,k+1}x_{k+1} + \ldots + a_{nm}x_m = y_n$, para algum k inteiro tal que $1 \le k \le m - 1$. Sendo todos os coeficientes não nulos, o sistema é classificado como possível e indeterminado, ou seja, o sistema possui infinitas soluções.

Por exemplo, considere o sistema escalonado $\begin{cases} 2x + 3y - 4z + 6w = -11 \\ 5y - 6z + 8w = 4 \\ -7z + 3w = -9 \end{cases}$.

Como a última equação apresenta infinitas soluções, o sistema linear apresenta infinitas soluções, sendo classificado como possível e indeterminado.

2º caso: os primeiros m – 1 coeficientes da última equação são nulos
Deste modo, a última equação fica da forma $a_{nm}x_m = y_n$.
Existem três situações a serem analisadas:

i) se $a_{nm} \neq 0 \Rightarrow$ sistema possível e determinado (solução única)

ii) se $a_{nm} = 0$ e $y_n = 0 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado (infinitas soluções)

iii) se $a_{nm} = 0$ e $y_n \neq 0 \Rightarrow$ sistema impossível (nenhuma solução)

Observações:

(1) O fato de ser possível calcular o valor de uma variável em um sistema linear escalonado não implica, necessariamente, que o sistema seja possível e determinado. Por exemplo, no sistema escalonado $\begin{cases} x - 7y + 5z = 2 \\ 2z = -4 \end{cases}$ até é possível calcular z, que vale – 2, observando a última equação, porém, ao substituir esse valor na 1ª equação, obtém-se $x - 7y = 12$, que possui infinitas possibilidades para x e y. Logo, apesar de z assumir apenas um valor, esse sistema deve ser classificado como possível e indeterminado.

(2) Mesmo que o número de variáveis seja igual ao número de equações, não há garantias que a determinação do valor de uma variável implique necessariamente que o sistema seja possível e determinado. Por exemplo, no sistema escalonado $\begin{cases} (k-1)x + y + z = 1 \\ y + z = 2 \\ k.z = 1 \end{cases}$, fazendo $k = 1$ segue diretamente que $z = 1$, o que aparentemente levaria a um sistema possível e determinado. Contudo, substituindo $k = 1$ na 1ª equação encontra-se uma incompatibilidade com a 2ª equação: $\begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$. Portanto, para $k = 1$ o sistema é impossível.

(3) O fato de uma variável assumir infinitos valores não significa, necessariamente, que o sistema seja possível e indeterminado, uma vez que as outras variáveis podem ser impossíveis de serem calculadas. Por exemplo, considere o sistema linear escalonado $\begin{cases} k.x + y + z = 2 \\ y + z = 1 \\ k.z = k \end{cases}$, onde k é uma constante real. Se $k = 0$ perceba que z pode assumir qualquer valor real. Uma análise desatenta levaria à conclusão incorreta que o sistema é possível e indeterminado, porém, ao substituir $k = 0$ na 1ª equação, obtém-se uma incompatibilidade com a 2ª equação: $\begin{cases} y + z = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$. Portanto, para $k = 0$ o sistema é impossível, pois não existem valores de y e z que satisfazem o sistema.

Exercícios Resolvidos

1) Classifique o sistema $\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-2z=4 \\ 3x+4y-z=6 \end{cases}$ com relação à quantidade de soluções:

Solução:

Escalonando o sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x+3y-2z=4 \\ 3x+4y-z=6 \end{cases} \xrightarrow[-3(eq.1)+(eq.3)]{-2(eq.1)+(eq.2)} \begin{cases} x+y+z=2 \\ y-4z=0 \\ y-4z=0 \end{cases} \xrightarrow{(eq.2)-(eq.3)}$$

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ y-4z=0 \\ 0.z=0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistema possível e indeterminado.}$$

2) Dê o valor de a para que o sistema $\begin{cases} ax+y+2=0 \\ 2x-y+z-a=0 \\ 4x+y+az+5=0 \end{cases}$ seja impossível.

Solução:

Neste sistema, as equações e as variáveis foram fornecidas numa ordem que atrapalha as operações de escalonamento. De modo a deixar as contas mais simples, é necessário trocar de ordem a primeira com a segunda equação e depois escrever, em cada equação, a variável y na frente, a variável z no meio e a variável x no final:

$$\begin{cases} -y+z+2x=a \\ y+ax=-2 \\ y+az+4x=-5 \end{cases} \xrightarrow[(eq.1)+(eq.3)]{(eq.1)+(eq.2)} \begin{cases} -y+z+2x=a \\ z+(a+2)x=a-2 \\ (a+1)z+6x=a-5 \end{cases} \xrightarrow{-(a+1)(eq.2)+(eq.3)}$$

$$\begin{cases} -y+z+2x=a \\ z+(a+2)x=a-2 \\ [-(a+2)(a+1)+6]x=-(a+1)(a-2)+a-5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -y+z+2x=a \\ z+(a+2)x=a-2 \\ (a^2+3a-4)x=a^2-2a+3 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} -y+z+2x=a \\ z+(a+2)x=a-2 \\ (a+4)(a-1)x=a^2-2a+3 \end{cases}$$

Note que se $a=-4$ tem-se $0.x=27$ e se $a=1$ tem-se $0.x=2$, ou seja, para $a=-4$ ou $a=1$ o sistema é impossível.

3) Determine os valores de a e b de modo que o sistema de equações $\begin{cases} ax + 2y + z = 3 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + y + z = b \end{cases}$ seja possível e indeterminado.

Solução:

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 3 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + y + z = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + 2x + z = b \\ 2y + x + az = 2 \\ 2y + ax + z = 3 \end{cases} \xrightarrow[eq3 \rightarrow -2.eq1+eq3]{eq2 \rightarrow -2.eq1+eq2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y + 2x + z = b \\ -3x + (a-2)z = 2 - 2b \\ (a-4)x - z = 3 - 2b \end{cases} \xrightarrow{eq2 \rightarrow (a-2).eq2+eq3}$$

$$[(a-4)(a-2) - 3]x = (3 - 2b)(a-2) + 2 - 2b \Rightarrow$$

$$(a^2 - 6a + 5)x = -2ab + 2b + 3a - 4 \Rightarrow (a-1)(a-5)x = -2ab + 2b + 3a - 4$$

Para o sistema ser possível e determinado deve-se ter:

i) $a = 1 \Rightarrow -2ab + 2b + 3a - 4 = -1 \Rightarrow$ sistema impossível

ii) $a = 5 \Rightarrow -2ab + 2b + 3a - 4 = -8b + 11 = 0 \Rightarrow b = \frac{11}{8}$

Assim, tem-se sistema possível e indeterminado para $a = 5$ e $b = \frac{11}{8}$

4) (IME-70) Dado o sistema de equações abaixo

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = k^2 \\ \frac{x}{a} + y + bz = k^2 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = k^2 \end{cases}$$

onde a, b, $k \neq 0$, pedem-se os valores de a e b, que tornem o sistema indeterminado.

Solução:

É possível escalonar o sistema com apenas duas operações:

$$\begin{cases} x + ay + a^2z = k^2 \\ \frac{x}{a} + y + bz = k^2 \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = k^2 \end{cases} \xrightarrow[eq2 \rightarrow -a.eq3+eq2]{eq1 \rightarrow -a^2.eq3+eq1} \begin{cases} a\left(1 - \frac{a}{b}\right)y = k^2(1 - a^2) \\ \left(1 - \frac{a}{b}\right)y + (b-a)z = k^2(1-a) \\ \frac{x}{a^2} + \frac{y}{b} + z = k^2 \end{cases}$$

Assim, para que o sistema seja possível e indeterminado deve-se ter $a\left(1-\frac{a}{b}\right)=0$ e $k^2(1-a^2)=0$. Como $k \neq 0$ e $a \neq 0$ (senão teríamos duas divisões por 0 nas equações originais) então a única possibilidade é $a = \pm 1$ (k pode assumir qualquer valor real) e $b = a = \pm 1$.

5) Considere o seguinte sistema linear, onde a e b são números reais:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

Assinale a alternativa correta.

a) se $a = 1$ e $b = 1$ o sistema é possível e determinado.

b) se $a = -2$ e $b = -2$ o sistema é impossível.

c) se $a = 1$ e $b \neq 1$ o sistema é impossível.

d) se $a = -2$ e $b \neq -2$ o sistema é possível e indeterminado.

e) se $a \neq 1$ e $a \neq -2$ o sistema é possível e indeterminado.

Solução: Alternativa C

Escalonando o sistema linear:

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases} \xrightarrow[eq2 \to -1.eq3 + eq2]{eq1 \to -a.eq3 + eq1} \begin{cases} (b - ab)y + (1 - a^2)z = 1 - a \\ (ab - b)y + (1 - a)z = b - 1 \\ x + by + az = 1 \end{cases} \xrightarrow{eq1 \to -1.eq2 + eq1}$$

$$\begin{cases} (2 - a - a^2)z = b - a \\ (ab - b)y + (1 - a)z = b - 1 \\ x + by + az = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 - a)(a + 2)z = b - a$$

Analisando apenas essa última equação conclui-se que:

i) se $a = 1$ e $b = 1$: possível e indeterminado

ii) se $a = -2$ e $b = -2$: possível e indeterminado

iii) se $a = 1$ e $b \neq 1$: impossível

iv) se $a = -2$ e $b \neq -2$: impossível

v) se $a \neq 1$ e $a \neq -2$: possível e determinado

6) (IME-17) Classifique o sistema abaixo como determinado, possível indeterminado e impossível de acordo com os valores reais de m.

$$\begin{cases} (m-2)x + 2y - z = m+1 \\ 2x + my + 2z = m^2 + 2 \\ 2mx + 2(m+1)y + (m+1)z = m^3 + 3 \end{cases}$$

Solução:

Devido a presença de m em vários coeficientes, o processo de escalonamento do sistema original é muito extenso. Para diminuir as contas, inicialmente vamos calcular os valores de m que zeram o determinante formado pelos coeficientes:

$$\Delta = \begin{vmatrix} m-2 & 2 & -1 \\ 2 & m & 2 \\ 2m & 2(m+1) & (m+1) \end{vmatrix} =$$

$$= m\cdot(m+1)\cdot(m-2) + 8m - 4\cdot(m+1) - \left\{-2m^2 + 4\cdot(m+1)\cdot(m-2) + 4(m+1)\right\} =$$

$$= m^3 - 3m^2 - 2m = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)$$

Pelo teorema de Cramer, se $\Delta \neq 0$ o sistema é possível e determinado, que ocorre para $m \neq 0$, $m \neq 1$ e $m \neq 2$.

Substituindo no sistema original m = 0 e escalonando o sistema obtido:

$$\begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2x + 2z = 2 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow[eq1+eq2]{eq2\rightarrow} \begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \xrightarrow[-1.eq2+eq3]{eq3\rightarrow} \begin{cases} -2x + 2y - z = 1 \\ 2y + z = 3 \\ 0.z = 0 \end{cases}$$

Logo, para m = 0 o sistema é possível e indeterminado.

Substituindo no sistema original m = 1 e escalonando o sistema obtido:

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 2x + y + 2z = 3 \\ 2x + 4y + 2z = 4 \end{cases} \xrightarrow[\substack{eq3\rightarrow \\ 2.eq1+eq3}]{\substack{eq2\rightarrow \\ 2.eq1+eq2}} \begin{cases} -x + 2y - z = 2 \\ 5y + 0.z = 7 \\ 0.y = 8 \end{cases}$$

Portanto, o sistema é impossível.

Substituindo no sistema original m = 2 e escalonando o sistema obtido:

$$\begin{cases} 0.x + 2y - z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 4x + 6y + 3z = 11 \end{cases} \xrightarrow[-2.eq2+eq3]{eq3\rightarrow} \begin{cases} 2y - z = 3 \\ 2x + 2y + 2z = 6 \\ 2y - z = -1 \end{cases} \xrightarrow[-1.eq1+eq3]{eq3\rightarrow} \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 6 \\ 2y - z = 3 \\ 0.z = -4 \end{cases}$$

Deste modo, segue que para m = 2 o sistema será impossível.

Em resumo, o sistema será possível e determinado para $m \neq 0$, $m \neq 1$ e $m \neq 2$, o sistema será possível e indeterminado para m = 0 e o sistema será impossível para m = 1 ou m = 2.

12.6. SISTEMAS HOMOGÊNEOS

Toda equação linear da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = 0$ é classificada como equação homogênea. Quando se forma um conjunto de equações homogêneas, tem-se um sistema linear homogêneo. Há um detalhe especial na discussão de um sistema linear homogêneo, uma vez que nunca será classificado como impossível, pois sempre admite como solução todas as variáveis iguais a zero. Essa solução é denominada de **solução trivial**. Resta apenas analisar se esta é a única solução (caso de classificar o sistema como possível e determinado) ou se existem outras soluções (caso de classificar o sistema como possível e indeterminado). No momento, será discutida apenas a situação em que o número de equações é igual ao número de variáveis. As situações em que o número de equações é diferente do número de variáveis serão discutidas quando da discussão do teorema de Rouché-Capeli.

Considere um sistema linear homogêneo da forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ ... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Este sistema terá apenas a solução trivial se as n equações forem linearmente independentes. Neste caso, o sistema é classificado como possível e determinado. Por outro lado, se as equações não forem linearmente independentes, o sistema admitirá infinitas soluções. Neste caso, o sistema é classificado como possível e indeterminado.

A forma mais eficaz para analisar a dependência linear de um sistema linear homogêneo é calcular o determinante da matriz formada pelos coeficientes do sistema. Se este determinante for diferente de zero, significa que as equações são linearmente independentes, ou seja, o sistema apresenta apenas a solução trivial. Se este determinante for nulo, as equações são linearmente dependentes e assim o sistema apresenta outras soluções além da solução trivial.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \textbf{sistema possível e determinado}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \textbf{sistema possível e indeterminado}$$

Exercícios Resolvidos

1) Discuta o sistema $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ 3x + y + z = 0 \end{cases}$

Solução:

Como o sistema é homogêneo, basta calcular o determinante formado pelos coeficientes do sistema linear:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 + 2 - 3 + 1 - 2 = -4 \neq 0$$

Assim, o sistema é classificado como possível e determinado.

2) Discuta o sistema $\begin{cases} ax + y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$.

Solução:

Sendo o sistema homogêneo, basta analisar o determinante formado pelos coeficientes do sistema:

$$|D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0 - 1 + 2) - (1 + 0 - a) = 1 - 1 + a = a$$

Portanto:

(1) $D = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$ sistema possível e indeterminado.

(2) $D \neq 0 \Rightarrow a \neq 0 \Rightarrow$ sistema possível e determinado.

3) Verifique se as matrizes $A = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ são ℓ. i. ou ℓ. d.

Solução:

A forma mais simples de analisar a dependência linear de matrizes colunas é montar um sistema linear homogêneo onde os coeficientes são os elementos da matriz:

$$x\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 2z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \\ 5x + 4y + 2z = 0 \end{cases}$$

A matriz principal é dada por $\begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, cujo determinante vale:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 60 - 8 + 10 - 64 - 6 = 0.$$

Deste modo, o sistema é possível e indeterminado, fazendo com que as matrizes sejam ℓ.d., pois é possível encontrar valores não nulos para as incógnitas

4) (ITA-SP) Se S é o conjunto solução dos valores de a para que o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + (\log_3 a)^2 y + z = 0 \\ 2x + 2y + \log_3 \dfrac{27}{a} z = 0 \end{cases}$$

seja indeterminado então:

a) $S \subset [-3, 3]$ b) S é vazio c) $S \subset [2, 4]$ d) $S \subset [1, 3]$ e) $S \subset [0, 1]$

Solução: Alternativa A

Como o sistema é homogêneo e deseja-se que seja possível e indeterminado, basta impor que é nulo o determinante da matriz formada pelos coeficientes do sistema linear.

Fazendo $\log_3 a = b$ tem-se: $\log_3 \dfrac{27}{a} = \log_3 27 - \log_3 a = 3 - b$.

Empregando a regra de Chió:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 2 & 2 & 3-b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2 - 1 & 0 \\ 0 & 1-b \end{vmatrix} = (b^2 - 1)(1 - b) = 0 \Rightarrow b = \pm 1.$$

Desfazendo a substituição:

$b = \pm 1 \Rightarrow \log_3 a = 1$ ou $\log_3 = -1 \Rightarrow a = 3$ ou $a = \dfrac{1}{3}$

Logo: $S = \left\{\dfrac{1}{3}, 3\right\} \subset [-3, 3]$

5) (ITA-86) Dizemos que duas matrizes reais, 2×1, A e B são linearmente dependentes se e somente se existem dois números reais x e y não ambos nulos tais que xA + yB = 0, onde 0 é a matriz nula 2×1.

Se $A = \begin{pmatrix} 1 \\ k^n - 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} k^{-n} + 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ onde $k \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N} = \{1,2,3,...\}$.

Podemos afirmar que para cada $n \in \mathbb{R}$.

A) A e B são linearmente dependentes, $\forall k \in \mathbb{R}^*$

B) existe um único $k \in \mathbb{R}^*$ tal que A e B são linearmente independentes.

C) existe único $k \in \mathbb{R}^*$ tal que A e B são linearmente independentes.

D) existe apenas dois valores de $k \in \mathbb{R}^*$ tais que A e B são linearmente dependentes.

E) não existe valor de $k \in \mathbb{R}^*$ tal que A e B são linearmente dependentes.

Solução: Alternativa D

$$x\begin{pmatrix} 1 \\ k^n - 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} k^{-n} + 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + (k^{-n} + 1)y = 0 \\ (k^n - 1)x + 2y = 0 \end{cases}$$

Como x e y devem ser não nulos, então o sistema homogêneo deve ser indeterminado:

$$\begin{vmatrix} 1 & k^{-n} + 1 \\ k^n - 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2 - (k^n - 1)(k^{-n} + 1) = 0 \Rightarrow$$

$$2 - (1 + k^n - k^{-n} - 1) = 0 \Rightarrow 2 - k^n + k^{-n} = 0 \Rightarrow k^{2n} - 1 - 2k^n = 0 \Rightarrow$$

$$k^n = 1 \pm \sqrt{2}$$

i) Se n é par, então $k = \pm\sqrt[n]{1 + \sqrt{2}}$ (dois valores de k).

ii) Se n é ímpar, então $k_1 = \sqrt[n]{1 + \sqrt{2}}$ e $k_2 = \sqrt[n]{1 - \sqrt{2}}$ dois valores de k.

Observação:

A definição apresentada pelo ITA nesta questão está errada, pois, dadas duas matrizes reais de ordens 2×1, A e B, se uma delas for nula elas são linearmente dependentes, sem que seja necessário que os dois reais sejam não nulos. Neste caso, apenas um deles é suficiente. Inclusive, esta definição é válida para matrizes não nulas.

Por exemplo, sejam $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, fazendo 0.A + 3.B = 0, com apenas um coeficiente não nulo.

12.7. CARACTERÍSTICA DE UMA MATRIZ.

Seja a matriz $A = (a_{ij})_{m \times n}$, não nula com $m \leq n$. Podemos retirar de A sub-matrizes quadradas de ordem p, com $p \leq m$. Dessas sub-matrizes escolhemos uma B tal que:
1) $\det B \neq 0$;
2) O valor de p é o máximo possível

Nestas condições, a característica ou posto de A será p e a diferença $n - p$ é a nulidade de A. Simbolicamente se escreve $\rho(A) = p$. Caso a matriz A seja nula é impossível obter de A uma matriz quadrada B com $\det B \neq 0$, então por convenção diremos que a característica A é $\rho(A) = 0$ e nulidade de A vale $nul(A) = n - p = n$.

Por exemplo, na matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ é possível retirar determinantes de ordem 1 (os próprios elementos), ordem 2 e ordem 3. Logo, os números candidatos a característica de A são 1, 2 ou 3 (lembre-se que a característica de uma matriz é zero somente se todos os elementos da matriz são nulos, o que não é o caso da matriz em questão). Repare que pelo menos um dos sub determinantes 2×2 é diferente de zero: $\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 3 = 12 \neq 0$. Por outro lado, todos os sub determinantes 3×3 são nulos (1ª linha = 3ª linha):

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ e } \begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

fazendo com que a característica de A seja igual a 2.

Observações

(1) Caso a matriz seja quadrada de ordem n e seu determinante é não nulo, então sua característica é igual a n;

(2) $\rho(A) = \rho(A^t)$;

(3) Para uma matriz $A_{m \times n}$ qualquer, segue que $\rho(A) \leq \min(m, n)$;

(4) Todas as matrizes de ordens n×1 ou 1×n possuem característica igual a 1 (se pelo menos um dos elementos for não nulo) ou 0 (se todos os elementos forem nulos).

(5) A determinação da característica de uma matriz pela definição não é a forma mais simples de chegar ao resultado. Acompanhe os próximos tópicos para aprender a calcular a característica de uma matriz utilizando escalonamento.

Exercícios Resolvidos

1) Ache a característica de: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Solução:

Aplicando a regra de Chió no elemento a_{33} e, posteriormente, a regra de Sarrus:

$$\det A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -(-4-16-4+64+1+4) = -45 \neq 0$$

Como $\det A \neq 0$ e A é 4×4, segue que $\rho(A) = 4$

2) Encontre a característica de: $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & 16 & 8 \end{pmatrix}$

Solução:

Note que uma das sub matrizes 2×2 tem determinante não nulo: $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$.

Por outro lado, todas as sub matrizes 3×3 possuem determinantes nulos, uma vez que a 4ª linha é proporcional à 2ª linha (4ª linha = 4× 2ª linha) e que a 2ª linha mais a 3ª linha é igual à 1ª linha:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \\ 4 & 16 & 8 \end{vmatrix} = 0. \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & 16 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 0 \\ 4 & 16 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Portanto, $\rho(A) = 2$.

12.7.1. Equivalência Matricial

O cálculo da característica de uma matriz A, usando determinantes, algumas vezes é bastante trabalhoso pois só podemos baixar de uma ordem p para p – 1 se tivermos certeza que todos determinantes de ordem p são nulos (lembrar conceito de característica). Assim, no caso de uma matriz 4×3 deve-se empregar a regra de Sarrus para calcular quatro determinantes de 3ª ordem. Pior ainda para uma matriz 4×5, onde será necessário iniciar calculando cinco determinantes de ordem 4 e caso todos esses determinantes sejam nulos será necessário calcular até quarenta determinantes 3×3! É fácil constatar que para uma matriz de ordem bastante alta este método é altamente ineficiente.

Para evitar isto, apresentaremos uma nova técnica de cálculo da característica de uma matriz baseada na **Equivalência Matricial**. Antes de apresentar o novo método é necessário definir alguns conceitos importantes.

12.7.1.1. Matrizes Linhas Equivalentes

Definição: Duas matrizes A e B são ditas matrizes linhas equivalentes, representa-se por A~B, se uma pode ser obtida da outra por uma sequência de operações de combinações lineares entre as linhas das matrizes.

Por exemplo, por meio de operações de combinação linear, vamos obter uma matriz linha equivalente à matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \underline{L_1 \to 2.L_2 + L_1} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix} \underline{L_3 \to 3.L_2 + L_3} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -1 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & -17 \end{pmatrix} \underline{L_2 \to -2.L_1 + L_3 + L_2} \sim \begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -1 & -16 & -3 \\ 0 & -6 & -17 \end{pmatrix}$$

Deste modo, pode-se afirmar que $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \\ 3 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & -9 \\ -1 & -16 & -3 \\ 0 & -6 & -17 \end{pmatrix}$ são duas matrizes linhas equivalentes, ou seja, A~B.

12.7.1.2. Teorema: Duas matrizes linhas equivalentes sempre apresentam a mesma característica.

Demonstração:

Se A e B são matrizes linhas equivalentes, uma foi obtida a partir de outra por meio de aplicações sucessivas das operações elementares citadas anteriormente, que nada mais são do que combinações lineares com as linhas ou colunas de uma matriz. No capítulo sobre determinantes foi demonstrado que combinações lineares não alteram o determinante de uma matriz. Assim, todas as possíveis sub matrizes quadradas de A e B, formadas por elementos de mesmos índices em cada matriz, possuem os mesmos determinantes. Como a característica de uma matriz é calculada analisando os valores (nulos ou não) dos determinantes de cada sub matriz quadrada, conclui-se que $\rho(A) = \rho(B)$.

12.7.1.3. Forma Escalonada da Matriz

Considere dada uma matriz $A_{m\times n}$. Afirma-se que $B_{m\times n}$ é a forma escalonada de A se $A \sim B$ e se cada linha de B, a partir da 2ª linha, iniciar com mais zeros que a linha anterior. A sequência das operações de combinações lineares que devem ser seguidamente aplicadas em A para obter B são idênticas às aplicadas no escalonamento das equações de sistemas lineares e estão descritas detalhadamente no item 12.5.2 deste capítulo.

Como exemplo, acompanhe a sequências das operações para obtenção da forma escalonada da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \underline{L_2 \to L_2 + (-2)L_1} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix} \underline{L_3 \to L_3 + L_1} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} \underline{L_3 \to L_3 + (-1)L_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Deste modo, pode-se afirmar que $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ é a forma escalonada da matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 6 & -7 \end{pmatrix}$.

12.7.1.4. Cálculo da Característica de uma Matriz por Escalonamento

Teorema: Se B é a forma escalonada de uma matriz qualquer A, a característica ou posto de A, ou seja, $\rho(A)$, é o número de linhas não nulas de B.

Demonstração:

Se $B_{m\times n}$ é a forma escalonada de $A_{m\times n}$, então B é da seguinte forma:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n-1} & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n-1} & b_{2n} \\ 0 & 0 & \cdots & b_{3n-1} & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_{pn-1} & b_{pn} \\ 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ com } b_{pn} \neq 0,$$

ou seja, da 1ª linha até a pª linha os elementos de cada linha não são todos nulos e da $(p + 1)^a$ linha até a mª linha os elementos de cada linha são todos nulos. Deste modo pode-se afirmar que essa matriz possui exatamente p linhas linearmente independentes. Logo, é possível formar uma sub matriz B'_p de B, de ordem $p\times p$ (formada pelas primeiras p linhas de B e as últimas p colunas de B), de tal forma que $\det B'_p \neq 0$. Isso ocorre, pois, todas as p linhas de B'_p são linearmente independentes, que é uma consequência imediata do processo do escalonamento. Por outro lado, qualquer sub matriz B'_{p+1} de B, com p + 1 linhas, obrigatoriamente apresenta pelo menos uma linha nula, implicando que $\det B'_{p-1} = 0$. Assim, $\rho(A) = \rho(B) = p$ = número de linhas não nulas de B.

Observações:

(1) O cálculo da característica de uma matriz por meio da determinação da forma escalonada se mostra extremamente mais eficaz do que calcular os determinantes das sub matrizes.

(2) O método da forma escalonada será adotado de agora em diante neste livro na determinação da característica de uma matriz, porém, nunca esquecer que se trata de um teorema, onde o número de linhas não nulas da forma escalonada coincide com a característica. A definição de característica é (e continua sendo!) a maior ordem de uma sub matriz quadrada que se pode extrair da matriz original com determinante não nulo.

Exercícios Resolvidos

1) Calcule a característica da matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Solução:

Obtendo a forma escalonada da matriz dada:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 \to -2.L_1+L_2]{L_2 \to L_1+L_2,\ L_3 \to L_1+L_3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que a última matriz obtida está na forma escalonada e apresenta duas linhas não nulas. Assim, $\rho(A) = 2$.

2) (ITA-62) Justificando a resposta, calcular a característica da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Solução:

Obtendo a matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 4 & 7 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -2.L_1+L_3]{L_2 \to -1.L_1+L_2} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -1.L_2+L_3} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Como a forma escalonada possui 2 linhas não nulas: $\rho(A) = 2$.

3) Determinar m de modo que a característica da matriz seja igual a 2:

$$\begin{bmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & m & 2m \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$\begin{bmatrix} 1 & m & -1 \\ 2 & m & 2m \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_1+L_3]{L_2 \to -2.L_1+L_2} \begin{bmatrix} 1 & m & -1 \\ 0 & -m & 2m+2 \\ 0 & m+2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to \frac{m+2}{m}.L_2+L_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & m & -1 \\ 0 & -m & 2(m+1) \\ 0 & 0 & \dfrac{2(m+1)(m+2)}{m} \end{bmatrix}$$

Essa última matriz terá característica igual a 2 se a terceira linha for nula e a segunda linha não for nula. Perceba que não existe m de modo que a segunda linha seja nula. Para que a terceira linha seja nula basta que $m = -1$ ou $m = 2$.

4) (ITA-96) Seja $a \in \Re$, $a > 0$ e $a \neq 1$ e considere a matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} \log_a 3a & \log_{10}(3a)^2 \\ \log_a \dfrac{1}{a} & \log_a a \\ \log_a 1 & \log_{10} 1 \end{bmatrix}$$

Para que a característica de A seja máxima, o valor de a deve ser tal que:

a) $a \neq 10$ e $a \neq 1/3$ b) $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq 1/3$

c) $a \neq 2$ e $a \neq 10$ d) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{3}$

e) $a \neq 2$ e $a \neq \sqrt{10}$

Solução: Alternativa B

Por propriedades de logaritmos obtém-se: $A = \begin{bmatrix} \log_a(3a) & 2\log_{10}(3a) \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Agora temos um caso raro de questão de característica que o cálculo pela definição é mais eficiente que o cálculo por escalonamento. Isso ocorre devido à última linha de A ser nula, implicando que a característica de A será máxima caso o determinante da submatriz 2×2 formada pelas duas primeiras linhas e as duas colunas seja diferente de zero:

I) $\begin{vmatrix} \log_a(3a) & 2\log_{10}(3a) \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \log_a(3a) \neq 2\log_{10}(3a)$

Como os logaritmandos são iguais, há dois casos a serem considerados:

i) $\log_a(3a) \neq 0$ e $\log_{10}(3a) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1/3$

ii) caso $3a \neq 1$, deve-se impor que:

$$\log_a(3a) \neq 2\log_{10}(3a) \Rightarrow \frac{1}{\log_{3a} a} \neq \frac{1}{\log_{3a}\sqrt{10}} \Rightarrow a \neq \sqrt{10}$$

Assim, a característica de A será igual a dois se $a \neq \sqrt{10}$ e $a \neq 1/3$.

12.8. TEOREMA DE ROUCHÉ-CAPELLI

12.8.1. Matrizes Completa e Principal

Considere um sistema linear m×n.

$$S = \begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

É possível escrever esse sistema como um produto de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz formada pelos coeficientes do sistema é denominada de matriz principal ou incompleta do sistema linear e normalmente é designada por A:

$$A = \text{Matriz Principal} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A matriz coluna X formada pelas variáveis do sistema é a matriz das incógnitas e a matriz coluna Y é formada pelos termos independentes:

$$X = \text{Matriz das Incógnitas} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ e } Y = \text{Matriz dos Termos Independentes} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Acrescentando mais uma coluna na matriz principal, coluna essa formada pelos termos independentes de cada equação, obtém-se a matriz completa do sistema linear, normalmente designada por B:

$$B = \text{Matriz Completa} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

12.8.2. Teorema de Rouché-Capelli

Um sistema linear será possível se e somente se $\rho(A) = \rho(B)$, isto é, A e B possuem características iguais. Além disso, sendo n o número de variáveis do sistema linear:

1) Se $\rho(A) = \rho(B) = n$ o sistema será possível e determinado;

2) Se $\rho(A) = \rho(B) < n$, o sistema será possível e indeterminado. Neste caso, podemos escolher n – p variáveis, que serão as variáveis paramétricas, sendo as outras p variáveis escritas em função das paramétricas e diremos que o grau de liberdade do sistema será n – p.

3) Se $\rho(A) \neq \rho(B)$ o sistema é impossível

Demonstração:

Considere um sistema linear com m equações e n variáveis:

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ao realizar a operação de escalonamento da matriz completa B, há cinco possibilidades para B', a forma escalonada de B:

(1) Se $m = n$: $B' = \left[\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1\,n-1} & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2\,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{n-1\,n-1} & a'_{n-1\,n} & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right]$, com $a'_{nn} \neq 0$ e $b'_n \neq 0$.

(2) Se $m > n$: $B' = \left[\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \ldots & a'_{1\,n-1} & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \ldots & a'_{2\,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a'_{n-1\,n-1} & a'_{n-1\,n} & b'_{n-1} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a'_{nn} & b'_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, com $a'_{nn} \neq 0$ e $b'_n \neq 0$.

(3) Se $m < n$: $B' = \left[\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1\,n-1} & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2\,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{m-1\,n} & a'_{mn} & b'_m \end{array}\right]$, com pelo menos dois elementos não nulos na última linha.

(4) $B' = \left[\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1\,n-1} & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2\,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{k\,n-1} & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$, com $k < m$ e pelo menos dois elementos não nulos na linha k.

(5) $B' = \left[\begin{array}{ccccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1\,n-1} & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2\,n-1} & a'_{2n} & b'_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{k\,n-1} & a'_{kn} & b'_k \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_{k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & b'_m \end{array}\right]$, com $b'_{k+1} \neq 0$ e pelo menos um elemento não nulo na linha k.

Nos casos (1) e (2), em que $\rho(A) = \rho(B) = n$, a última equação do sistema escalonado é da forma $a'_{nn}x_n = b'_n$, fazendo com que seja possível calcular o valor de x_n e posteriormente os valores das demais variáveis.

Portanto, para $\rho(A) = \rho(B) = n$ tem-se sistema possível e determinado.

No caso (3), em que $\rho(A) = \rho(B) < n$, a última equação é da forma

$$\ldots + a'_{m-1\,n}x_{n-1} + a'_{mn}x_n = b'_m,$$

com pelo menos dois coeficientes não nulos, onde há um número infinito de soluções.

No caso (4), em que ocorre $\rho(A) = \rho(B) < n$, a $(k + 1)^a$ equação é $0.x_{k+1} = 0$, onde também existe um número infinito de possibilidades para x_{k+1}.

Logo, para $\rho(A) = \rho(B) < n$ o sistema é possível e indeterminado.

No caso (5), onde $\rho(A) < \rho(B)$, a $(k + 1)^a$ equação é $0.x'_{k+1} = b'_{k+1}$, com $b'_{k+1} \neq 0$, onde não há valores de x'_{k+1} que satisfaçam.

Desta forma, se $\rho(A) < \rho(B)$ o sistema é classificado como impossível.

Exercícios Resolvidos

1) Discuta o sistema $\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-y+z=1 \\ 2x+2y=5 \end{cases}$.

Solução:

Sejam A e B as matrizes principal e completa do sistema. Como A é uma submatriz de B, o escalonamento de B levará certamente ao escalonamento de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -2L_1+L_3]{L_2 \to -L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -L_2+L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $2 = \rho(A) < \rho(B) = 3$, pelo teorema de Rouché-Capelli o sistema é impossível.

2) Discuta o sistema $\begin{cases} x-z=1 \\ kx+y+3z=0 \\ x+ky+3z=1 \end{cases}$.

Solução:

Como trata-se de um sistema não homogêneo é aconselhável aplicar o teorema de Rouché-Capelli.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ k & 1 & 3 & 0 \\ 1 & k & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -L_1+L_3]{L_2 \to -k.L_1+L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3+k & -k \\ 0 & k & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -k.L_2+L_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3+k & -k \\ 0 & 0 & 4-3k-k^2 & k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3+k & -k \\ 0 & 0 & -(k+4)(k-1) & k^2 \end{pmatrix}$$

Se $k = -4$ ou $k = 1$ segue que $2 = \rho(A) < \rho(B) = 3$, implicando em sistema impossível.
Se $k \neq -4$ e $k \neq 1$ tem-se $\rho(A) = \rho(B) = 3$ e assim o sistema é possível e determinado.

3) Determine m de modo que o sistema linear $\begin{cases} x-2y=4 \\ x-z=1 \\ 3x-2y=m \end{cases}$ seja impossível.

Solução:

No sistema em questão o número de equações é maior que o número de variáveis, sendo aconselhável a aplicação do teorema de Rouché-Capelli:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & m \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -3L_1 + L_3]{L_2 \to -L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -8 & m-12 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \to -\frac{8}{3}L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & m-4 \end{pmatrix}$$

Se $m - 4 \neq 0$ tem-se $2 = \rho(A) < \rho(B) = 3$ e, portanto, o sistema será impossível

Observação: Muitas vezes os conhecimentos algébricos do 1° grau facilitam a solução de uma questão de vestibular. Resolvendo o sistema formado pelas duas primeiras equações tem-se: $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x - y = 1 \end{cases} \rightarrow x = 2 \text{ e } y = 1.$

Como queremos que o sistema seja impossível, a 3ª equação tem que ser incompatível com esses resultados, logo: $3(2) - 2(1) \neq m \Rightarrow m \neq 4$

4) Discuta o sistema abaixo:

$$\begin{cases} x + y + t + z = 0 \\ 2x + 3y - t - z = 1 \\ x + y = b \end{cases}$$

Solução:

Calculando a forma escalonada da matriz completa associada ao sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & b \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \to -L_1 + L_3]{L_2 \to -2L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & b \end{pmatrix}$$

Perceba que, para qualquer valor de b, tem-se $3 = \rho(A) = \rho(B) < 4$ (número de variáveis). Logo, pelo teorema de Rouché-Capelli o sistema é classificado como possível e indeterminado.

5) (Fuvest-99) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y, z, w:

$$\begin{cases} 2x + my = -2 \\ x + y = -1 \\ y + (m-1)z + 2w = 2 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

a) Para que valores de m o sistema tem uma única solução.

b) Para que valores de m o sistema não tem solução.

c) Para m = 2, calcular $2x + y - z - 2w$.

Solução:

Perceba que se trata de um sistema linear com quatro equações e quatro variáveis, sendo aconselhável a aplicação do teorema de Rouché-Capelli. Para simplificar as contas do escalonamento é interessante a troca de ordem as equações, jogando a 1ª equação pro final do sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_4 \to -2l_1 + l_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & m-2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{l_4 \to -(m-2)l_2 + l_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -m^2+3m-2 & 4-2m & 4-2m \end{pmatrix} \xrightarrow{l_4 \to (m^2-3m+2)l_3 + l_4}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & m-1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -m^2+m+2 & m^2-5m+6 \end{pmatrix}$$

Note que $-m^2 + m + 2 = 0$ para $m = 2$ ou $m = -1$ e $m^2 - 5m + 6 = 0$ para $m = 2$ ou $m = 3$. Vamos agora discutir o sistema aplicando o teorema de Rouché-Capelli:

Para $m \neq 2$ e $m \neq -1$ tem-se $\rho(A) = \rho(B) = 4 =$ número de incógnitas, logo o sistema é possível e determinado.

Para $m = 2$ segue que $\rho(A) = \rho(B) = 3 < 4 =$ número de incógnitas, ou seja, sistema possível e indeterminado.

Para $m = -1$ conclui-se que $3 = \rho(A) < \rho(B) = 4$, implicando num sistema impossível.

Fazendo $m = 2$ a 1ª e a 2ª equações ficam idênticas. Entretanto, é possível calcular o valor pedido somando a 1ª equação com a 3ª equação:

$$\begin{cases} 2x + 2y = -2 & \searrow \\ & + \Rightarrow \quad 2x + y - z - 2w = -4 \\ -y - z - 2w = -2 & \nearrow \end{cases}$$

12.9. MÉTODO DE GAUSS-JORDAN DE INVERSÃO DE MATRIZES

O método de Gauss-Jordan para determinar a inversa de uma matriz é baseado no seguinte teorema.

Teorema: Uma matriz $A_{n\times n}$ é inversível se e somente se A é linha equivalente a I_n e, nesse caso, toda sequência de operações elementares que transforma A em I_n também transforma I_n em A^{-1}.

Se posicionarmos as matrizes A e I lado a lado, de modo a formar uma matriz completa [A | I] então as operações elementares nessa matriz produzem operações idênticas em A e I. Pelo Teorema acima, ou existem operações elementares que transformam A em I_n e I_n em A^{-1} ou, A não é inversível.

A demonstração do teorema é bastante extensa e não será apresentada nesse livro. Interessados na demonstração podem procurar por um bom livro de Álgebra Linear. Vamos nos preocupar em mostrar como aplicar esse importante resultado.

Suponha que se deseja calcular a inversa da matriz $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. A primeira etapa da aplicação do método de Gauss-Jordan consiste em acrescentar I ao lado direito as colunas da matriz que se deseja inverter: $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$. Depois é só aplicar as operações elementares, ou seja, combinações lineares sobre as linhas da matriz ampliada e/ou multiplicar/dividir as linhas por um mesmo número, de modo a obter a matriz identidade no lado esquerdo da matriz ampliada.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \to L_1 + (-1)L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 + (-2)L_1]{L_2 \to L_2 + (-1)L_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to L_3 + (-3)L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \to (-1)L_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \to L_2 + (-1)L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & -1 \end{array}\right]$$

Logo, a inversa de $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ é $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$.

12.10. AUTOVALOR E AUTOVETOR DE UMA MATRIZ QUADRADA

12.10.1. Vetores Fixos ou Invariantes.

Definição: Dada uma matriz real $A = (a_{ij})_{n\times n}$, um vetor coluna $X_{n\times 1}$ é dito um vetor fixo ou invariante de A se $AX = X$. Por exemplo, pode-se afirmar que $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ é vetor fixo da matriz $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ desde que: $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

12.10.2. Autovalor e Autovetor

Definição: Seja uma matriz real quadrada $A_{n\times n}$. Se existirem um $\lambda \in IR$ e um vetor coluna $X_{n\times 1}$, não nulo, tais que $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$, diremos que λ é um autovalor (valor próprio ou valor característico) de A e X é um autovetor (vetor próprio ou vetor característico) de A associado a λ.

Por exemplo, seja $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, como $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ segue que 2 é o autovalor de A e $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é autovetor de A associado ao autovalor 2.

Na prática, o cálculo dos autovetores de uma matriz n×n é equivalente a resolver a equação matricial $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$, que, por sua vez, é equivalente a resolver o sistema linear: $\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0 \end{cases}$.

12.10.2.1. Propriedade: Se X é um autovetor de A associado a um autovalor λ, então αX, com $\alpha \in IR^*$, também o será autovetor de A, associado ao mesmo autovalor λ.

Demonstração:

Se λ é autovalor de A associado ao autovetor X: $AX = \lambda X$

Multiplicando os dois membros pelo real não nulo α:

$\alpha(AX) = \alpha\lambda X \Rightarrow A.(\alpha X) = \lambda(\alpha X) \Rightarrow AY = \lambda Y$

Assim, $Y = \alpha X$ é autovetor de A associado ao autovalor λ

Observações:

(1) Essa propriedade permite concluir que não é possível determinar numericamente os elementos não nulos de um autovetor. A caracterização de um autovetor é baseada na relação entre seus elementos. Por exemplo, na matriz $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ os autovalores são 2 e 3, com $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, o autovetor associado ao autovalor 2 e $\begin{pmatrix} 5y \\ y \end{pmatrix}$, $y \in \mathbb{R}$, o autovetor associado ao autovalor 3.

(2) Apesar de não ser possível calcular os elementos não nulos de um autovetor, é normal e aceitável que o autovetor seja descrito por sua forma mais simples, substituindo as variáveis pelo número 1. No exemplo anterior, o autovetor $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$ pode ser descrito por $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e o autovetor $\begin{pmatrix} 5y \\ y \end{pmatrix}$ pode ser descrito como $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

12.10.3. Polinômio e Equação Característica

Vamos agora determinar uma forma de calcular os autovalores de uma matriz quadrada $A_{n\times n}$. Sabe-se que se λ é autovalor de A, então existe o autovetor $X_{n\times 1} \neq 0$ tal que $AX = \lambda X$. Assim:

$$AX = \lambda X \Leftrightarrow \lambda X - AX = 0 \Leftrightarrow \text{existe } X \neq 0 \text{ tal que } (\lambda I - A)X = 0 \Leftrightarrow$$

o sistema homogêneo $(\lambda I - A)X = 0$ admite solução não trivial $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

A expansão deste determinante nos fornece $P(\lambda)$, conhecido como "polinômio característico" de $A_{n\times n}$ e $P(\lambda) = 0$ chama-se "equação característica" de $A_{n\times n}$ e suas raízes são os autovalores de $A_{n\times n}$.

Exercícios Resolvidos

1) Calcule os autovalores e autovetores de $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Solução:

Resolvemos a equação característica $\det(\lambda I - A) = 0$:

$\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -5 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 4)(\lambda - 1) - 10 = 0 \Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0 \Rightarrow$ autovalores: $\lambda_1 = -1$ ou $\lambda_2 = 6$.

Para cada autovalor λ, deve-se resolver o sistema linear $(\lambda I - A)X = 0$:

i) $\lambda_1 = -1 \Rightarrow \begin{bmatrix} -1-4 & -5 \\ -2 & -1-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x + 5y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -y$

Autovetor associado ao autovalor -1 é $X_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sua forma mais simples

ii) $\lambda_2 = 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} 6-4 & -5 \\ -2 & 6-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y = 0 \\ -2x + 5y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2x = 5y$

Autovetor associado ao autovalor 6 é $X_2 = \begin{bmatrix} 5x \\ 2x \end{bmatrix}$, sendo $\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ sua forma mais simples

2) Calcule os autovalores e autovetores de: $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Solução:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 5 & -1 \\ -1 & 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0$$

Por inspeção, se verifica que $\lambda_1 = 2$ é raiz e dividindo por $\lambda - 2$:

$(\lambda - 2)(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0 \Rightarrow \lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 3 \Rightarrow$ autovalores: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$ e $\lambda_3 = 3$

i) $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y = 0 \text{ e } z = -x$$

Autovetor associado ao autovalor 2 é $X_1 = \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ sua forma mais simples.

ii) $\lambda_2 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x = y = z$$

Autovetor associado ao autovalor 3 é $X_2 = \begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$, sendo $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sua forma mais simples.

iii) $\lambda_3 = 6$:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z = x \text{ e } y = -2z$$

Autovetor associado ao autovalor 6 é $X_3 = \begin{bmatrix} x \\ -2x \\ x \end{bmatrix}$, com $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sua forma mais simples.

3) (ITA-75) Sejam as matrizes reais $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ e m um número real. Seja $AX = mX$. Então podemos afirmar que:

a) Se $\det(a - mI) \neq 0$, então $x + y = 0$ e $x.y \neq 0$

b) Se $\det(a - mI) = 0$, então existem dois reais x, y tais que $x + y \neq 0$ e $x.y \neq 0$.

c) Se $\det(A - mI) = 0$

d) Se $\det A = 0$, então não existem dois reais x, y tais que $AX = mX$

e) N.d.a.

Solução:

$AX = mX \Rightarrow (A - mI)X = 0 \rightarrow$ Sistema homogêneo 2×2.

a) $\det(A - mI) \neq 0 \Rightarrow$ Sistema determinado admitindo somente a solução trivial $x = y = 0$, logo a alternativa é falsa pois $x.y = 0$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ e $m = 0 \Rightarrow A - mI = A \rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow$ sistema indeterminado com infinitas soluções tipo $(x, y) = (x, -x)$ podemos ter $x.y \neq 0$ mas $x + y = 0$ sempre, logo b está errada.

c) Fazendo $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ e $m = 2$ teremos $A - mI = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \det(A - mI) = 0$ com $\det A \neq 0$ logo c é falsa.

d) Fazendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e em = 1 temos que $\det A = 0$ e

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & +2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow$$

$x = y = 0$ logo a afirmativa d é falsa. Então a afirmativa certa é a e.

12.10.4. Propriedades Mais Importantes dos Autovalores

1) Se λ é autovalor de A, então λ^2 é autovalor de A^2;

Demonstração:

Se λ é autovalor de $A_{n\times n}$ então existe $X_{n\times 1}$ tal que $AX = \lambda X \Rightarrow$

$A(AX) = A(\lambda X) \Rightarrow A^2X = \lambda(AX) = \lambda.\lambda X \Rightarrow A^2X = \lambda^2 X \Rightarrow$

λ^2 é autovalor de A^2, associado ao mesmo auto vetor X

2) Se λ é autovalor de A, então λ^n é autovalor de A^n;

Demonstração:

Do item anterior, λ^2 é autovalor de A^2, associado ao mesmo auto vetor X

Assim: $A(A^2X) = A(\lambda^2 X) \Rightarrow A^3X = \lambda^2 AX = \lambda^2.\lambda X = \lambda^3 X$

Seguindo com esse processo demonstrasse que λ^n é autovalor de A^n.

3) Se λ é autovalor de A, $\lambda + c$ é autovalor de $A + cI$, com $c \in \mathbb{C}$.

Demonstração:

$AX = \lambda X \Rightarrow AX + cX = \lambda X + cX \Rightarrow (A + cI)X = (\lambda + x)X \Rightarrow$

$\lambda + c$ é autovalor de $A + cI$

4) Se λ é autovalor de A e se A^{-1} existe, então λ^{-1} é autovalor de A^{-1}.

Demonstração:

$AX = \lambda X \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}(\lambda X) \Rightarrow X = \lambda A^{-1}X \Rightarrow A^{-1}X = \lambda^{-1}X \Rightarrow$

λ^{-1} é autovalor de A^{-1}, associado ao mesmo autovetor X.

5) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, então AB e BA possuem os mesmos autovalores.

Demonstração:

Se λ é autovalor de $AB \Rightarrow ABX = \lambda X$

$B(ABX) = B(\lambda X) \Rightarrow (BA)(BX) = \lambda(BX) \Rightarrow$

λ é autovalor de BA, associado ao autovetor BX

6) A e A^t possuem os mesmos autovalores.

Demonstração:

Os autovalores de A são as raízes de $\det(\lambda I - A) = 0$. Porém, uma matriz e sua transposta possuem o mesmo determinante. Portanto:

$0 = \det(\lambda I - A) = \det[(\lambda I - A)^t] = \det(\lambda I^t - A^t) = \det(\lambda I - A^t) \Rightarrow$

A e A^t possuem o mesmo polinômio característico $\Rightarrow$

A e A^t possuem os mesmos autovalores

12.10.5. Teorema de Cayley-Hamilton: Toda matriz $A_{n\times n}$ satisfaz sua própria equação característica: $\det(\lambda I - A) = 0$.

Isto quer dizer que, se $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ é a equação característica de $A_{n\times n}$, ao substituirmos λ por A e o termo independente a_n por a_nI, ela se transformará na equação matricial $A^n + a_1A^{n-1} + ... + a_{n-1}A + a_nI = 0$, também válida.

Demonstração:

Seja $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ o polinômio característico de A.

Considere a matriz Adj $(A - \lambda I)$ (matriz adjunta, formada pelos determinantes obtidos ao retirar-se de $(A - \lambda I)$ uma linha e uma coluna), com elementos cuja maior potência em λ é λ^{n-1}. Assim, pode-se escrever

$$\text{Adj}\,(A - \lambda I) = B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + ... + B_{n-1}\lambda + B_n$$

sendo B_i matrizes n×n constantes, isto é, independentes de λ, a determinar. Usando a identidade $(A - I\lambda).\text{Adj}\,(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I)I$:

$$\det(A - \lambda I)I = (A - \lambda I)(B_1\lambda^{n-1} + B_2\lambda^{n-2} + ... + B_{n-1}\lambda + B_n) =$$
$$-B_1\lambda^n + (AB_1 - B_2)\lambda^{n-1} + (AB_2 - B_3)\lambda^{n-2} + ... + (AB_{n-1} - B_n)\lambda + AB_n =$$
$$= \lambda^nI + a_1\lambda^{n-1}I + ... + a_{n-1}\lambda I + a_nI$$

Igualando os coeficientes das parcelas de mesmo expoente em λ:

$I = -B_1$, $a_1I = AB_1 - B_2$, $a_2I = AB_2 - B_3$, ..., $a_{n-1}I = AB_{n-1} - B_n$, $a_nI = AB_n$

Multiplicando a 1ª equação por A^n, a 2ª equação por A^{n-1} e assim por diante, até multiplicar a última por I, ao somar todas as equações obtém-se:

$$A^n + a_1A^{n-1} + ... + a_{n-1}A + a_nI =$$
$$= (-A^nB_1 - A^nB_1) + (-A^{n-1}B_2 + A^{n-1}B_2) + ... + (-A^2B_{n-1} + A^2B_{n-1}) + (-AB_n + AB_n) = 0$$

12.10.5.1. Propriedades do Teorema de Cayley-Hamilton

1) O traço de uma matriz quadrada é igual à soma dos seus autovalores

Demonstração:

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & ... & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & ... & -a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -a_{n1} & -a_{n2} & ... & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

Sabe-se que, a menos do sinal, o determinante de uma matriz é igual a uma soma de n! parcelas, onde cada parcela é o produto de n elementos da matriz, sendo um elemento de cada linha e de cada coluna. Deste modo, uma única parcela do determinante possui todos os elementos da diagonal principal. Além disso, outras parcelas do cálculo do determinante contêm, no máximo, n – 2 elementos da diagonal principal. Assim, os coeficientes de λ^n e λ^{n-1} no polinômio característico são definidos pela parcela $(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})...(\lambda - a_{nn})$. Logo, os dois primeiros termos do polinômio característico são $\lambda^n - (a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn})\lambda$. Portanto, a soma das raízes do polinômio característico é igual a $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$.

2) O determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores

Demonstração:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda^n - \text{tr}A.\lambda^{n-1} + \dots + k = 0$$, onde k é o termo independente de λ no polinômio característico.

Fazendo $\lambda = 0$ nessa equação segue que $\det(-A) = (-1)^n.\det A = k$.

Sabe-se que o termo independente de um polinômio é igual ± o produto das raízes do polinômio.

$$(-1)^n.\det A = (-1)^n.\lambda_1\lambda_2...\lambda_n \Rightarrow \det A = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n$$

12.10.5.2. Aplicação do Teorema de Cayley-Hamilton: Matriz Inversa

Pelo teorema de Cayley-Hamilton, se $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ é o polinômio característico de uma matriz A, então $A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0$. Caso A possua inversa, ou seja, $\det A \neq 0$, pode-se fazer:

$$A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A + a_nI = 0 \Rightarrow A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A = -a_nI$$

Multiplicando essa última expressão por A^{-1}:

$$A^{-1}(A^n + a_1A^{n-1} + \dots + a_{n-1}A) = A^{-1}(-a_nI) \Rightarrow$$

$$A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \dots + a_{n-1}I = -a_nA^{-1} \Rightarrow A^{-1} = -\frac{1}{a_n}\left(A^{n-1} + a_1A^{n-2} + \dots + a_{n-1}I\right)$$

Por exemplo, vamos determinar a matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. A equação característica de A: $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -5 \\ -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 1 = 0$. Aplicando o teorema de Cayley-Hamilton: $A^2 - 5A + I = 0 \Rightarrow I = -A^2 + 5A$, e multiplicando a direita por A^{-1}: $A^{-1} = -A + 5I = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Observação:

(1) Deve-se tomar cuidado na utilização do teorema de Cayley-Hamilton para calcular a inversa da matriz. Inicialmente deve-se verificar se a matriz tem inversa. Caso, no polinômio característico da matriz A, $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$, ocorra que $a_n = 0$, a matriz não tem inversa, uma vez que $a_n = \det A$. Por exemplo, na matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ o polinômio característico é $\lambda^2 - 7\lambda = 0$, fazendo com que $A^2 = 7A$ e, multiplicando por A^{-1} duas vezes, chega-se a $A^{-1} = I/7$, porém a inversa de A nem existe, pois $\det A = 0$.

12.10.5.3. Aplicação do Teorema de Cayley-Hamilton: Potências de Matrizes

É possível utilizar o teorema de Cayley-Hamilton pra determinar o valor de A^n, com A uma matriz quadrada e $n \in \mathbb{N}^*$. Como o procedimento depende dos elementos da matriz analisada, iremos apresentar o método com um exemplo. Tome a matriz 2×2 dada por $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$. O polinômio característico vale:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -3 & \lambda + 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton:

$$A^2 - A - 6I \Rightarrow A^2 = A + 6I \Rightarrow A^3 = A^2 + 6A = A + 6I + 6A = 7A + 6I \Rightarrow$$
$$A^4 = 7A^2 + 6A = 7A + 42I + 6A = 13A + 42I \Rightarrow \ldots$$

Note que, para todo n, A^n é da forma: $A^n = a_n A + b_n I$.

Multiplicando por A:

$$A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A = a_n(A + 6I) + b_n A = (a_n + b_n)A + 6a_n I = a_{n+1}A + b_{n+1}I$$

Portanto, segue que: $a_{n+1} = a_n + b_n$ (1) e $b_{n+1} = 6a_n$ (2)

Substituindo (2) em (1): $a_{n+1} = a_n + 6a_{n-1}$

A equação característica dessa recorrência é $a^2 - a - 6 = 0$, cujas raízes são $x_1 = 3$ e $x_2 = -2$, ou seja, $a_n = k_1.3^n + k_2.(-2)^n$.

Como $a_1 = 1$ e $a_2 = 1$, é possível montar o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} 3k_1 - 2k_2 = 1 \\ 9k_1 + 4k_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow k_1 = \frac{1}{5} \text{ e } k_2 = -\frac{1}{5}, \text{ onde tem-se que:}$$

$$a_n = \frac{3^n - (-2)^n}{5} \Rightarrow b_n = 6a_{n-1} = \frac{6[3^{n-1} - (-2)^{n-1}]}{5} \Rightarrow b_n = \frac{2.3^n + 3.(-2)^n}{5}$$

Finalmente:

$$A^n = a_n A + b_n I \Rightarrow A^n = \frac{3^n - (-2)^n}{5}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} + \frac{2.3^n + 3.(-2)^n}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^n = \begin{pmatrix} \dfrac{2.3^{n+1} - (-2)^n}{5} & \dfrac{-2.3^n - (-2)^{n+1}}{5} \\ \dfrac{3^{n+1} - 3.(-2)^n}{5} & \dfrac{-3^n - 3(-2)^{n+1}}{5} \end{pmatrix}$$

Note que os termos exponenciais que aparecem nos elementos de A^n são da forma 3^n e $(-2)^n$ e, não por coincidência, 3 e −2 são os autovalores de A. Na verdade, é possível demonstrar que se $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são todos distintos e iguais aos autovalores de uma matriz A, então cada elemento de A^n é da forma $k_1\lambda_1^n + k_2\lambda_2^n + \ldots + k_n\lambda_n$.

Exercícios Resolvidos

1) (ITA-85) Dizemos que um número real λ é autovalor de uma matriz real $T_{n\times n}$ quando existir uma matriz coluna $X_{n\times 1}$ não nula tal que $TX = \lambda X$. Considere uma matriz real $P_{n\times n}$ e satisfazendo $PP = P$. Denote por λ_1 um autovalor de P e λ_2 um autovalor de PP. Podemos afirmar que necessariamente:

a) $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$

b) $\lambda_1 > \lambda_2$

c) λ_1 e λ_2 pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$

d) $\lambda_1, \lambda_2 \in \{t \in R / t < 0 \text{ ou } t > 1\}$

e) λ_1 e λ_2 pertencem ao intervalo aberto (0, 1)

Solução: Alternativa C

Pelas condições do enunciado λ_1 e λ_2 são autovalores de P pois $P^2 = P$, ou seja, existem $X = (x_{ij})_{n\times 1}$ e $Y = (y_{ij})_{n\times 1}$, não nulos tais que:

1) $PX = \lambda_1 X$ 2) $PY = \lambda_2 Y$

Multiplicando "1" à esquerda por P temos $P^2X = \lambda_1 PX$ mas como $P^2 = P$ e $PX = \lambda_1 X$ então $P^2X = PX = \lambda_1 PX = \lambda_1 X$.

Analisando as hipóteses sobre PX temos:

1) $PX = 0$

$PX = \lambda_1 X = 0$ e como $X \neq 0$ então $\lambda_1 = 0$

2) $PX \neq 0$

$PX = \lambda_1 PX \Rightarrow \lambda_1 = 1$

O mesmo raciocínio pode ser feito sobre λ_2 logo a alternativa certa é C.

2) Seja B uma matriz nxn nilpotente com elementos reais. Prove que $\det(I + B) = 1$.

Solução:

Como B é nilpotente, existe k tal que $B^k = 0$.

Seja λ um autovalor qualquer de B, ou seja, existe uma matriz coluna X (autovetor de B associado a λ) tal que $BX = \lambda X$.

Multiplicando seguidamente por B:

$$B^2X = \lambda BX = \lambda^2 X,\ B^3X = \lambda^2 BX = \lambda^3 X,\ \ldots,\ B^kX = \lambda X$$

Entretanto, como $B^k = 0$, segue que $\lambda X = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Assim, se uma matriz é nilponte, todos os seus autovalores são nulos.

Sabe-se que se λ é autovalor de B, então $\lambda + k$ é autovalor de $B + k.I$. Neste caso, os autovalores de $B + I$ são todos iguais a 1.

Como o determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores:

$$\det(I + B) = 1.1.1\ldots1 = 1$$

3) (IME-03) Considere uma matriz A, n×n, de coeficientes reais, e k um número real diferente de 1. Sabendo-se que $A^3 = k.A$, prove que a matriz A + I é invertível, onde I é a matriz identidade n×n.

Solução:

Seja λ um autovalor qualquer de A, ou seja, existe uma matriz coluna X (autovetor de B associado a λ) tal que $AX = \lambda X$.

Multiplicando seguidamente por A:

$$A^2X = \lambda AX = \lambda^2 X \text{ e } A^3X = \lambda^2 AX = \lambda^3 X$$

Multiplicando $A^3 = k.A$ à direita por X:

$$A^3X = k(AX) \Rightarrow \lambda^3 X = k\lambda X \Rightarrow \lambda^3 = k\lambda \Rightarrow \lambda = 0, \lambda = \sqrt{k} \text{ ou } \lambda = -\sqrt{k}$$

Como A é quadrada de ordem n, A admite n autovalores, sendo todos eles iguais a 0, $\sqrt{k}$ ou $-\sqrt{k}$. Sabe-se que se λ é autovalor de A, então λ + m é autovalor de A + m.I. Neste caso, os autovalores de A + I são todos iguais a 1, $1+\sqrt{k}$ e $1-\sqrt{k}$.

Supondo que 1 tenha multiplicidade a, $1+\sqrt{k}$ tenha multiplicidade b e $1-\sqrt{k}$ tenha multiplicidade c, com a + b + c = n (se k < 0 tem-se b = c), segue que:

$\det(A + I) = 1^a.(1+\sqrt{k})^b.(1-\sqrt{k})^c$, que é sempre diferente de zero porque $k \neq 1$

Assim, conclui-se que A + I tem inversa.

4) Considere que A é uma matriz quadrada de ordem 3, com elementos complexos, tal que $\text{tr}(A) = \text{tr}(A^2) = 0$. Mostre que $\det(A^2 + I_3) = [\det(A)]^2 + 1$.

Solução:

Nesta questão serão usados os seguintes teoremas:

(1) o traço de uma matriz é igual à soma dos seus autovalores.

(2) o determinante de uma matriz é igual ao produto dos seus autovalores.

(3) se λ é autovalor de A então λ^2 é autovalor de A^2 e $\lambda^2 + 1$ é autovalor de $A^2 + I$.

De (1) e (3) segue que $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 0$

Assim: $0 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3) \Rightarrow$

$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$

Elevando novamente ao quadrado:

$0 = (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)^2 =$

$= (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + 2(\lambda_1^2\lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2\lambda_3^2) =$

$= (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \Rightarrow$

$(\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 = 0$

Assim, de (2) e (3) segue que:

$\det(A^2 + I) = (\lambda_1^2 + 1)(\lambda_2^2 + 1)(\lambda_3^2 + 1) =$

$= (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 + (\lambda_1\lambda_2)^2 + (\lambda_1\lambda_3)^2 + (\lambda_2\lambda_3)^2 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + 1 \Rightarrow$

$\det(A^2 + I) = (\lambda_1\lambda_2\lambda_3)^2 + 1 = [\det(A)]^2 + 1$

5) Seja a matriz real, 3×3. $A = a_{ij}$, e considere A_{ij} como cofator de a_{ij}, tr A como traço de A e det A como determinante de A.

a) Escreva o polinômio característico $p(\lambda)$ da matriz A, em função de A_{ij}, tr A e det A. (Deduza o polinômio.)

b) Considere agora que $\sum_{i=1}^{3} A_{ii} = 0$, e sejam λ_1, λ_2 e λ_3 os auto-valores de A. Obtenha $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3$ em termos de A_{ij}, tr A e det A.

Solução:

$$P(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

Desenvolvendo encontra-se que:

$P(\lambda) = \lambda^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 + [(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})]\lambda - \det A \Rightarrow$

$P(\lambda) = \lambda^3 - (\text{tr } A)\lambda^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})\lambda - \det A$, onde

$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$, $A_{22} = (-1)^{2+2}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ e $A_{33} = (-1)^{3+3}.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ são os cofatores dos elementos a_{11}, a_{22} e a_{33}, respectivamente.

b) Observe que:

$A_{11} + A_{22} + A_{33} = [(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + (a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$

Logo, segue que: $\lambda^3 - (\text{tr } A)\lambda^2 - \det A = 0$

Pelas relações de Girard:

$\lambda_1^3 - (\text{tr } A)\lambda_1^2 - \det A = 0$

$\lambda_2^3 - (\text{tr } A)\lambda_2^2 - \det A = 0$

$\lambda_3^3 - (\text{tr } A)\lambda_3^2 - \det A = 0$

Somando:

$\lambda_1^3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - (\text{tr } A)(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2) - 3\det A = 0$

Sabe-se que $\text{tr } A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \Rightarrow (\text{tr } A)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3$

Como λ_1, λ_2 e λ_3 são as raízes de $\lambda^3 - (\text{tr } A)\lambda^2 - \det A = 0$, segue que:

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 0$$

Deste modo, pode-se afirmar que:

$$(\text{tr } A)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \text{ e assim: } \lambda_1^3 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\text{tr } A)^3 + 3\det A$$

12.11. MATRIZES SEMELHANTES

12.11.1. Definição: Duas matrizes quadradas A e B de ordem n serão ditas semelhantes se existe uma matriz P, não singular, e de ordem n tal que: $B = P^{-1}.A.P$.

Por exemplo, $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são semelhantes uma vez que existe a matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que $B = P^{-1}.A.P$.

12.11.2. Propriedades

(1) Toda matriz é semelhante a si mesma.
(2) Se a matriz A é semelhante a B então B é semelhante a A.
(3) Se A é semelhante a B e B é semelhante a C então A é semelhante a C.
(4) Se A é semelhante a B, então A^t é semelhante a B^t.
(5) Se A e B são semelhantes, então A^n e B^n são semelhantes para todo $n \in N^*$.
(6) Duas matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante.
(7) Se A é semelhante a A, A é inversível se e somente se B for inversível.
(8) Duas matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.
(9) Se A é semelhante a B então A e B possuem os mesmos autovalores.
(10) Duas matrizes semelhantes possuem o mesmo traço.
(11) Se A é inversível e semelhante à matriz B, então A^{-1} é semelhante a B^{-1}.

Demonstrações:

(1) Fazendo P = I, que é inversível, segue que $A = I^{-1}.A.I = I.A = A$

(2) $B = P^{-1}AP \Rightarrow BP = AP \Rightarrow P^{-1}BP = A \Rightarrow A = (P^{-1})^{-1}.B.(P^{-1})$
Fazendo $Q = P^{-1}$ segue que $A = QBQ^{-1} \Rightarrow$ B é semelhante a A

(3) $B = P^{-1}AP$ e $C = Q^{-1}BQ \Rightarrow C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ) \Rightarrow$
A é semelhante a C

(4) $B = P^{-1}AP \Rightarrow B^t = (P^{-1}AP)^t = P^tA^t(P^{-1})^t = P^tA^t(P^t)^{-1} \Rightarrow$
A^t é semelhante a B^t

(5) $B = P^{-1}AP \Rightarrow B^2 = (P^{-1}AP)(P^{-1}AP) = P^{-1}A(PP^{-1})AP = P^{-1}AAP = B = P^{-1}A^2P$
$B^3 = B^2B = (P^{-1}A^2P)(P^{-1}AP) = P^{-1}A^2(PP^{-1})AP = P^{-1}A^2AP = B = P^{-1}A^3P$
e assim por diante

(6) $B = P^{-1}AP \Rightarrow \det B = \det(P^{-1}AP) = \det P^{-1}.\det A.\det P =$
$= (\det P)^{-1}.\det A.\det P = \det A$

(7) Pela propriedade 6, se A é semelhante a B então det A = det B.
Logo: A é inversível $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0 \Leftrightarrow$ B é inversível

(8) $B = P^{-1}AP \Rightarrow \lambda I - B = \lambda I - P^{-1}AP = P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)P$
Portanto: $\det(\lambda I - B) = \det P^{-1}.\det(\lambda I - A).\det P = \det(\lambda I - A)$

(9) Como os polinômios característicos são iguais, suas raízes, os autovalores de cada matriz, também são iguais

(10) Como os autovalores de A e B são iguais e o traço de uma matriz é igual à soma dos seus autovalores, segue que tr A = tr B.
(11) $B = P^{-1}AP \Rightarrow B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}(P^{-1})^{-1} \Rightarrow A^{-1}$ é semelhante a B^{-1}

Exercícios Resolvidos

1) (ITA-95) Dizemos que duas matrizes n×n A e B são semelhantes se existe uma matriz n×n inversível P tal que $B = P^{-1}.A.P$. Se A e B são matrizes semelhantes quaisquer, então:
a) B é sempre inversível
b) Se A é simétrica, então B é simétrica
c) B^2 é semelhante a A
d) Se C é semelhante a A, então BC é semelhante a A^2
e) $\det(\lambda I - B) = \det(\lambda I - A)$ onde λ é um real qualquer.
Solução: Alternativa E
a) É falsa, pois se $A = B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ e $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ temos que $B = I_2^{-1}.A.I_2$ e $\det B = 0$
b) É falsa, pois $B = P^{-1}AP = (P^{-1}A)P \Rightarrow B^t = P^t(P^{-1}A)^t = P^tA^t.(P^{-1})^t = P^tA(P^t)^{-1}$ para que B seja simétrica é necessário que $P^{-1} = P^t$, o que aconteceria só se P fosse ortogonal.
c) Falsa, pois $B = P^{-1}AP \Rightarrow \det B = \det A$ e $B^2 = P^{-1}AP \Rightarrow (\det B)^2 = \det A$ o que nem sempre é verdade.
d) Falsa, pois sendo B e C semelhantes à A temos $B = P^{-1}AP$ e $C = Q^{-1}AQ \Rightarrow$ $BC = (P^{-1}AP)(Q^{-1}AQ) = (P^{-1}A)(PQ^{-1})AQ$.
Se BC fosse semelhante a A^2 teríamos $BC = R^{-1}A^2R = (P^{-1}A)(PQ^{-1})AQ \Leftrightarrow P = R$, o que tornaria B = C, que não consta nos dados do problema.
e) Se A e B são semelhantes então $B = P^{-1}AP$ e como $P^{-1}\lambda IP = \lambda I$ temos:
$\lambda I - B = \lambda I - P^{-1}AP = P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda I - A)P$; aplicando Binet teremos $\det(\lambda I - B) = \det P^{-1}.\det(\lambda I - A)\det P = \det(\lambda I - A)$ logo esta é a alternativa verdadeira.

2) (ITA-17) Sejam $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.
Considere $A = P^{-1}DP$. O valor de $\det(A^2 + A)$ é
A) 144. B) 180. C) 240. D) 324. E) 360.
Solução: Alternativa A
Essa questão pode ser resolvida usando os quatro teoremas:

1) Duas matrizes semelhantes possuem o mesmo determinante;
2) O determinante de uma matriz é igual ao produto de seus auto-valores;
3) Duas matrizes semelhantes possuem os mesmos auto-valores;
4) Se λ é um auto-valor da matriz A, então $\lambda + k$ é auto-valor da matriz $A + kI$.
Como A e D são semelhantes, os auto-valores de A são iguais aos auto-valores de D, que são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 3$.
Assim, os auto-valores de $A + I$ são $\lambda'_1 = 2$, $\lambda'_2 = 3$ e $\lambda'_3 = 4$.
Logo: $\det(A^2 + A) = \det[A(A + I)] = \det A.\det(A + I) \Rightarrow$
$\det(A^2 + A) = (\det D).\lambda'_1.\lambda'_2.\lambda'_3 = 6.2.3.4 = 144$

3) (IME-20) Uma matriz A é semelhante a uma matriz B se e somente se existe uma matriz invertível P tal que $A = PBP^{-1}$.
a) Se A e B forem semelhantes, mostre que $\det(A) = \det(B)$.
b) Dadas $C = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ e $D = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, verifique se essas matrizes são semelhantes.

Solução:
a) $A = PBP^{-1} \Rightarrow \det A = \det(PBP^{-1}) = \det P.\det B.\det P^{-1} =$
$= \det P.\det B.(\det P)^{-1} = \det B$

b) $C = PDP^{-1} \Leftrightarrow AP = PB \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

i) $4a + 2b = 8a + 3c \Rightarrow 4a - 2b + 3c = 0$
ii) $4c + 2d = -2a + c \Rightarrow 2a + 3c + 2d = 0$
iii) $3a + 5b = 8b + 3d \Rightarrow a - b - d = 0$
iv) $3c + 5d = -2b + d \Rightarrow 2b + 3c + 4d = 0$
(i) + (iv): $4a + 6c + 4d = 0 \Rightarrow 2a + 3c + 2d = 0$, que é a equação (ii)
(i) - (ii): $2a - 2b - 2d = 0 \Rightarrow a - b - d = 0$, que é a equação (iii)
Assim, o sistema 4×4 é possível e indeterminado, com característica 2. Assim, apenas duas equações são linearmente independentes. Tomemos as equações (ii) e (iii):
$a - d = b$ e $2a + 2d = -3c$
Numericamente, pode-se fazer $a = 0$, $b = -3$, $c = -2$ e $d = 3$
Testando: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ -15 & 9 \end{pmatrix}$
Como existe a matriz P, então C e D são semelhantes.

12.12. DIAGONALIZAÇÃO DE MATRIZES

12.12.1. Definição: Uma matriz quadrada A é chamada de diagonalizável se é semelhante a uma matriz diagonal, isto é, se existe uma matriz invertível P tal que $P^{-1}AP$ seja uma matriz diagonal.

12.12.2. Teorema: $A_{n\times n}$ é diagonalizável se e somente se A tem n autovetores linearmente independentes.

Demonstração:

Se A é diagonalizável, existem $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$

tais que $P^{-1}AP = D$. Além disso, $P^{-1}AP = D$ implica em $AP = PD$, ou seja:

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix}$$

Chamando os vetores colunas de P por $P_1, P_2, \ldots, P_n$ então as colunas de AP são iguais a $\lambda_1 P_1, \lambda_2 P_2, \ldots, \lambda_n P_n$, ou seja, $AP_1 = \lambda_1 P_1$, $AP_2 = \lambda_2 P_2, \ldots, AP_n = \lambda_n P_n$.

Como P é inversível, seus autovetores são todos não nulos. Assim, conclui-se que λ_1 $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ são os autovalores de A e que $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são os autovalores associados. Como P é inversível, segue que $P_1, P_2, \ldots, P_n$ são linearmente independentes. Portanto, A apresenta n autovetores linearmente independentes.

Suponha agora que A tenha n autovetores linearmente independentes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, associados aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Seja $P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$ a matriz cujos vetores colunas são $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Os vetores colunas de AP são $AP_1, AP_2, \ldots, AP_n$. Porém, sabe-se que $AP_1 = \lambda_1 P_1$, $AP_2 = \lambda_2 P_2, \ldots, AP_n = \lambda_n P_n$, de modo que:

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \lambda_2 p_{12} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \lambda_1 p_{21} & \lambda_2 p_{22} & \cdots & \lambda_n p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \lambda_2 p_{n2} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD,$$

onde D é a matriz diagonal com os autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ na diagonal principal. Como os autovetores de P são linearmente independentes, P é inversível e assim segue que $P^{-1}AP = D$, ou seja, A é diagonalizável.

12.12.3. Teorema: Uma matriz A de ordem n×n é diagonalizável se ela tem n autovalores distintos, ou seja, se o seu polinômio característico tem n raízes distintas. No entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira, sendo possível uma matriz com autovalores não todos distintos ser diagonalizável.

Demonstração:

Considere uma matriz quadrada A de ordem n com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ associados aos autovetores $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Logo:

$$AX_1 = \lambda_1 X_1,\ AX_2 = \lambda_2 X_2,\ \ldots,\ AX_n = \lambda_n X_n \quad (1)$$

Vamos demonstrar que os k autovetores são linearmente independentes.

A demonstração será feita usando indução finita.

Para k = 1 é evidente que $X_1 \neq 0$, pois X_1 é autovetor de A.

Suponhamos agora que os autovetores $X_1, X_2, \ldots, X_k$, k < n, sejam LI, ou seja:

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0 \quad (2)$$

Considere agora a combinação linear $\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_k X_k + \alpha_{k+1} X_{k+1} = 0$ (3)

Substituindo (1) em (3): $\alpha_1\lambda_1 X_1 + \alpha_2\lambda_2 X_2 + \ldots + \alpha_k\lambda_k X_k + \alpha_{k+1}\lambda_{k+1} X_{k+1} = 0$ (4)

Multiplicando (3) por λ_{k+1} e subtraindo de (4):

$$\alpha_1(\lambda_{k+1} - \lambda_1)X_1 + \alpha_2(\lambda_{k+1} - \lambda_2)X_2 + \ldots + \alpha_k(\lambda_{k+1} - \lambda_k)X_k = 0 \quad (5)$$

De (2) segue que, para todo i, $\alpha_i(\lambda_{k+1} - \lambda_i) = 0 \Leftrightarrow \alpha_i = 0$ ou $\lambda_{k+1} = \lambda_i$.

Como os autovalores são distintos, conclui-se que $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$ (6)

Substituindo (6) em (3): $\alpha_{k+1} X_{k+1} = 0 \Rightarrow \alpha_{k+1} = 0$ ($X_{k+1} \neq 0$ por ser autovetor)

Logo, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = 0 \Rightarrow X_1, X_2, \ldots, X_k, X_{k+1}$ são LI

Pelo teorema anterior, $A_{n\times n}$ é diagonalizável uma vez que apresenta autovetores linearmente independentes.

Exercícios Resolvidos

1) A matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ é diagonalizável? Justifique.

Solução:

Inicialmente, vamos calcular os autovalores de A.

$$\det(\lambda A - I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -2 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & 0 \\ -2 & 4 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow$$

os autovalores de A são $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 1$.

Como os autovalores de A são todos distintos, então A é diagonalizável.

Vamos agora determinar os autovetores de A. Para tanto, para cada λ_i, basta determinar X tal que $AX = \lambda X$.

i) $\lambda_1 = 3 \Rightarrow AX_1 = 3X_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3x \\ 3y = 3y \\ 2x - 4y + 2z = 3z \end{cases} \Rightarrow$

$y = x$ e $z = -2x \Rightarrow X_1 = \begin{bmatrix} -x \\ -x \\ 2x \end{bmatrix}$, cuja forma mais simples é $X_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

ii) $\lambda_2 = 2 \Rightarrow AX_2 = 2X_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = 2x \\ 3y = 2y \\ 2x - 4y + 2z = 2z \end{cases} \Rightarrow$

$y = x \Rightarrow X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix}$, cuja forma mais simples é $X_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

iii) $\lambda_3 = 1 \Rightarrow AX_3 = X_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2y = x \\ 3y = y \\ 2x - 4y + 2z = z \end{cases} \Rightarrow$

$y = 0$ e $z = -2x \Rightarrow X_3 = \begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 2x \end{bmatrix}$, cuja forma mais simples é $X_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Como A é diagonalizável, existe P tal que $P^{-1}AP = D$, onde as colunas de P são os autovetores de A e D é diagonal, com os elementos da diagonal principal sendo iguais aos autovalores de A. Portanto:

$P = [X_1\ X_2\ X_3] \Rightarrow P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, cuja inversa é $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (confira!!!)

Deste modo, tem-se que:

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que confirma o fato de A ser diagonalizável.

12.12.4. Aplicação de Diagonalização de Matrizes: Potência de Matrizes

No item 12.11.2, sobre as propriedades de Matrizes Semelhantes, foi demonstrado que se A é semelhante a B, então A^n é semelhante a B^n. Em outras palavras, se $B = P^{-1}AP$ então $B^n = P^{-1}A^nP$.

Para aproveitar as contas já feitas nesse livro, vamos calcular A^n onde A é a mesma matriz do exemplo da página anterior, ou seja, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$. Já foi demonstrado que $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$.

Assim: $A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PD^nP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$A^n = \begin{bmatrix} -3^n & 0 & -1 \\ -3^n & 0 & 0 \\ 2.3^n & 2^n & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} 1 & 3^n - 1 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 2^{n+1} - 2 & -2.3^n + 2 & 2^n \end{bmatrix}$$

Exercícios de Vestibular

1) (Escola Naval-92) O sistema de equações: $\begin{cases} x - y + kz = 1 \\ kx + z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases}$

a) é sempre possível
b) é impossível para k = 1
c) é impossível para k = – 2
d) é determinado para k ≠ 1
e) é determinado para k ≠ 2

2) (Fuvest-96) Considere o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x + y + z = -2m \\ x - y - 2z = 2m \\ 2x + y - 2z = 3m + 5 \end{cases}$$

a) Para cada valor de m, determine a solução (x_m, y_m, z_m) do sistema.
b) Determine todos os valores de m, reais ou complexos, para os quais o produto $x_m y_m z_m$ é igual a 32.

3) (Fuvest-97) Seja o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - my - 3z = 0 \\ x + 3y + mz = m \end{cases}$$

a) Determine todos os valores de m para os quais o sistema admite solução.
b) Resolva o sistema, supondo m = 0.

4) (Fuvest-99) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y, z, w:

$$\begin{cases} 2x + my = -2 \\ x + y = -1 \\ y + (m-1)z + 2w = 2 \\ z - w = 1 \end{cases}$$

a) Para que valores de m, o sistema tem uma única solução?
b) Para que valores de m, o sistema não tem solução?
c) Para m = 2, calcule o valor de 2x + y – z – 2w.

5) (Fuvest-15) No sistema linear $\begin{cases} ax - y = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = m \end{cases}$ nas variáveis x, y e z, a e m são constante reais. É correto afirmar:
a) No caso em que a = 1, o sistema tem solução se, e somente se, m = 2.
b) O sistema tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.
c) No caso em que m = 2, o sistema ten solução se, e somente se, a = 1.
d) O sistema só tem solução se a = m = 1.
e) O sistema não tem solução, quaisquer que sejam os valores de a e de m.

6) (Unicamp-93) Resolva o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} 2x + y + z + w = 1 \\ x + 2y + z + w = 2 \\ x + y + 2z + w = 3 \\ x + y + z + 2w = 4 \end{cases}$$

7) (Escola Naval-86) O sistema de equações $\begin{cases} ax + y - z = b \\ x + 2y + z = 2 \\ x + ay + z = 2 \end{cases}$ não possui solução se e só se:
a) $a \in \{-1, 2\}$ b) a = – 1 e b = – 2
c) a = – 1 e b ≠ – 2 d) a = 2
e) a = – 1

8) (Unicamp-00) Seja **A** a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação: **det A = 0**.
b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$.

9) (UFPB-92) Sendo A uma matriz quadrada n×n e I a matriz identidade n×n, o determinante de $xI - A$ é um polinômio de grau n na variável x, chamado polinômio característico de A. Baseado nesta definição, o polinômio característico da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ é:}$$

a) $x^3 - x^2 + 3x + 4$
b) $x^3 + 4x^2 - 3x - 1$
c) $x^3 - 4x^2 + 3x - 4$
d) $x^3 + 2x^2 - x + 1$
e) $x^3 + 4x^2 + x - 3$

10) (UFPI-03) Sabendo que o sistema $\begin{cases} x.\sin a + y.\cos a = 0 \\ x.\cos a + y.\sin a = 0 \end{cases}$ possui infinitas soluções, podemos afirmar corretamente que:

a) $a = \pi/3 + k\pi/2, k \in Z$
b) $a = \pi/2 + k\pi/3, k \in Z$
c) $a = k\pi, k \in Z$
d) $a = 2k\pi, k \in Z$
e) $a = \pi/4 + k\pi/2, k \in Z$

11) (FGV-19) Um sistema linear com duas equações e três incógnitas
a) é sempre indeterminado.
b) pode ter solução única.
c) admite sempre a solução trivial.
d) pode ser impossível.
e) pode apresentar determinante da matriz completa igual a 0.

12) (FGV-17) Chama-se solução trivial de um sistema linear aquela em que todos os valores das incógnitas são nulos. O sistema linear, nas incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ -x - y + 5z = 0 \\ -5x + y + mz = 0 \end{cases}$$

a) é impossível para qualquer valor de m.
b) admite apenas a solução trivial para qualquer valor de m.
c) admite soluções diferentes da solução trivial para m = 13.
d) admite soluções diferentes da solução trivial para m = 10.
e) não admite a solução trivial para $m \neq 13$.

13) (FGV-19) A respeito do sistema de equações lineares, nas incógnitas x e y, dado por $\begin{cases} mx - 3y = 4 \\ 4x - 5y = 7 \end{cases}$, com m sendo um número real, é correto afirmar que
a) representa um ponto no plano apenas quando m = 0.
b) representa um par de retas concorrentes no plano quando m = 12/5.
c) não apresenta solução para m = 12/5.
d) apresenta infinitas soluções para m = 12/5.
e) é possível e determinado para qualquer valor de m.

14) (FGV-18) Sejam m e n números reais e $\begin{cases} 3x + my = n \\ x + 2y = 1 \end{cases}$ um sistema de equações nas incógnitas x e y. A respeito da representação geométrica desse sistema no plano cartesiano, é correto afirmar que, necessariamente, é formada por duas retas

a) paralelas distintas, se m = 6 e n ≠ 3.
b) paralelas coincidentes, se m = 6 e n ≠ 3.
c) paralelas distintas, se m = 6.
d) paralelas coincidentes, se n = 3.
e) concorrentes, se m ≠ 0.

15) (UECE-18) Se o sistema de equações $\begin{cases} ax + bz = 1 \\ x + y + z = 2 \\ ax - bz = 3 \end{cases}$, onde a = senα e b = cosα, admite uma única solução, então, pode-se afirmar corretamente que

A) $2\alpha \neq k\pi$, onde k é um número inteiro.
B) $\alpha = k\pi$, onde k é um número inteiro.
C) $\alpha = (2k + 1)\pi$, onde k é um número inteiro.
D) $2\alpha \neq 1 + k\pi$, onde k é um número inteiro.

16) (FGV-16) Pablo, Ana e Marta foram a um shopping em sua cidade.
– Pablo comprou 1 agenda, 1 livro e 1 CD e disse que gastou R$ 75,00.
– Ana comprou 3 agendas, 1 livro e 2 CDs e disse que gastou R$ 150,00.
– Já Marta disse que gastou R$ 400,00, comprando 5 agendas, 3 livros e 4 Cds.
Sabe-se que cada agenda custava x reais, cada livro, y reais e cada CD, z reais.
a) Demonstre que pelo menos um deles mentiu.
b) Se Marta tiver sido a única que mentiu, demonstre que o preço de venda de cada agenda era igual ao de cada livro.

17) (FGV-17) Que relações deverão existir entre os números reais m, n, ℓ e k para que os sistemas de equações

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \\ 2x + y + z = \ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - y + 2z = m \\ x + 2y - z = n \\ x - 4y + 5z = k \end{cases}$$

sejam equivalentes, isto é, sejam possíveis e tenham as mesmas soluções?

18) (Famerp-17) No estudo da dinâmic de populações é comum ser necessári determinar o número real λ na equaçã $\det(M - \lambda I) = 0$, em que M é uma matriz quadrada, I é a matriz identidade, da mesma ordem de M, e det representa o determinante da matriz $(M - \lambda I)$. Se, em um desses estudos, tem-se $M = \begin{bmatrix} 0 & 17 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, o valor positivo de λ é igual a

a) 5. b) 8. c) 9. d) 12. e) 6.

19) (Unicamp-17) Sabendo que m é um número real, considere o sistema linear nas variáveis x, y e z: $\begin{cases} mx + 2z = 4 \\ x - y + z = 3, \\ 2x + mz = 4 \end{cases}$

a) Seja A a matriz dos coeficientes desse sistema. Determine os valores de m para os quais a soma dos quadrados dos

elementos da matriz A é igual à soma dos elementos da matriz $A^2 = A.A$.
b) Para m = 2, encontre a solução do sistema linear para a qual o produto xyz é mínimo.

20) (Unicamp-18) Sabendo que p e q são números reais, considere as matrizes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & p \\ 1 & p & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ q \end{pmatrix}$$

a) Prove que para quaisquer p e q teremos $B^TAB \geq 0$.
b) Determine os valores de p e q para os quais o sistema linear nas variáveis reais x, y e z, $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B$, tem infinitas soluções.

21) (EFOMM-17) Dado o sistema linear abaixo, analise as seguintes afirmativas:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & b \\ 1 & -4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ a \\ 3 \end{bmatrix}$$

I. Se $b \neq -12$, o sistema linear terá uma única solução.
II. Se $a = b = -12$, o sistema linear terá infinitas soluções.
III. Se $b = -12$, o sistema será impossível.
a) Todas as afirmativas são corretas.
b) Todas as afirmativas são incorretas.
c) Somente as afirmativas I e III são corretas.
d) Somente as afirmativas I e II são corretas.
e) Somente as afirmativas II e III são corretas.

22) (EsPCEx-16) Para que o sistema linear $\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ 2x + 5y - 3z = b \end{cases}$, em que a e b são reais, seja possível e indeterminado, o valor de a + b é igual a
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

23) (EsPCEx-17) Considere o sistema linear homogêneo $\begin{cases} x - 3y + kz = 0 \\ 3x + ky + z = 0 \\ kx + y = 0 \end{cases}$, onde k é um número real. O único valor que torna o sistema, acima, possível e indeterminado, pertence ao intervalo
a) $(-4, -2]$ b) $(-2, 1]$
c) $(1, 2]$ d) $(2, 4]$
e) $(4, 6]$

24) (Escola Naval-15) Analise o sistema a seguir: $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 4x - 2my + 3z = 0 \\ 2x + 6y - 4mz = 0 \end{cases}$. Para o maior valor inteiro de m que torna o sistema acima possível e indeterminado, pode-se afirmar que a expressão

$$\left| tg\left(\frac{\pi.m}{4}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi.m}{3}\right) - 1 \right|$$

vale
a) 1/4 b) 9/4 c) – 11/4
d) 7/4 e) – 1/4

25) (Unicamp-92) Sejam A e B duas matrizes de ordens n×m e m×n respectivamente, com m < n. Prove que det(A.B) = 0, baseado em propriedades do sistema de equações lineares.

$$(A.B).\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}$$

26) (EPCAr-04) Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Determine a expressão do determinante da matriz $(A - \alpha I)$, onde $\alpha \in \Re$ e I a matriz identidade. A soma dos valores de α para os quais $\det(A - \alpha I) = 0$ é dada por

a) 5 b) 6 c) – 1 d) –5

27) (IME-80 CG) Resolva o seguinte sistema: $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 6 \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -2 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$

28) (IME-80 CG) Determine os valores de k para que o sistema abaixo tenha solução única:

$$x + (5+k)y - 3z = -6$$
$$5x + y - 4z = -5$$
$$x + 5y + ky = -1$$

29) (IME-81 CG) Determine a e b para que o sistema $\begin{cases} x + 2y + az = b \\ 2x - y + 3z = 3 \\ 3x + y + z = 4 \end{cases}$

a) tenha solução única;
b) tenha um nº infinito de soluções;
c) não tenha solução.

30) (IME-84 CG) Dado o sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ w \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 53 \\ 28 \\ 27 \end{bmatrix}$$

encontre o seu conjunto solução.

31) (IME-77 CG) Dada equação matricial $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -10 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$.

Determine a matriz $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$

32) (ITA-66) Consideremos o sistema de 2 equações nas 2 incógnitas x, y:

$$\begin{cases} x - y = kx \\ -x + 5y = ky \end{cases}$$

a) qualquer que seja o valor de k, o sistema tem solução diferente da solução $x = 0, y = 0$.
b) existe pelo menos um valor k para o qual o sistema tem solução diferente da solução $x = 0, y = 0$.
c) para nenhum valor de k, o sistema tem solução diferente da solução $x = 0, y = 0$.

33) (ITA-67) O sistema $\begin{cases} x + 2y + 4z = 0 \\ x + 7y + 9z = a \\ -x + 3y + z = 0 \end{cases}$

a) não tem solução $\forall$ a
b) somente tem solução para a = 1
c) tem solução para $\forall$ a
d) possui somente solução $x = 0, y = 0, z = 0$ para a = 0

e) tem solução diferente da solução x = 0, y = 0, z = 0 para a = 0

34) (ITA-68) Seja $\begin{cases} \lambda.x + y = 0 \\ x + \lambda.y + z = 0 \\ y + \lambda.z = 0 \end{cases}$

O sistema acima terá solução não trivial para certo conjunto de valores de λ. Para que isto se verifique este conjunto é constituído:

a) apenas por números complexos não reais
b) apenas por números reais
c) apenas por números racionais
d) apenas por números irracionais
e) apenas por números inteiros

35) (ITA-69) Para que valores reais de a e b o seguinte sistema não admite solução?

$$\begin{cases} 3x + ay + 4z = 0 \\ x + y + 3z = -5 \\ 2x - 3y + z = b \end{cases}$$

a) $a = -2$ e $b = 5$ b) $a > -2$ e $b \neq 4$
c) $a = -2$ e $b \neq 5$ d) $a = b = 1$
e) nenhuma das respostas anteriores

36) (ITA-72) Qual é a relação que a, b e c devem satisfazer tal que o sistema abaixo tenha pelo menos uma solução?

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

a) $5a = 2b - c$
b) $5a = 2b + c$
c) $5a \neq 2b + c$
d) não existe relação entre a, b, c
e) nenhuma das respostas anteriores

37) (ITA-72) Quais os valores de α de modo que o sistema

$$\begin{cases} (\operatorname{sen}\alpha - 1)x + 2y - (\operatorname{sen}\alpha)z = 0 \\ (3\operatorname{sen}\alpha)y + 4z = 0 \\ 3x + (7\operatorname{sen}\alpha) + 6z = 0 \end{cases}$$

a) $\alpha = n\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
b) $\alpha = n\pi + \pi/3$, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
c) $\alpha = n\pi + \pi/2$, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$
d) não há valores de α
e) nenhuma das respostas anteriores

38) (ITA-81) Num sistema de coordenadas cartesianas ortogonais verificou-se que os pontos A = (a, 1, a); B = (2a, 1, a) e C = (b, a, a) são colineares. Além disso, o sistema

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ bx + y + z = 0 \\ bx + ay + bz = 0 \end{cases}$$

nas incógnitas x, y e z é indeterminado. Sendo $a > 0$ e $b > 0$, qual é a alternativa correta?

a) a e b são números pares
b) a e b são números inteiros consecutivos
c) a não é divisor de b
d) $0 < a < 1/2$ e $0 < b < 1$
e) nenhuma das anteriores

39) (ITA-83) Seja a um número real tal que $a \neq \pi/2 + k\pi$, onde $k \in Z$. Se (x_0, y_0) é solução do sistema

$$\begin{cases} (2\sec a)x + (3\tan a)y = 2\cos a \\ (2\tan a)x + (3\sec a)y = 0 \end{cases}$$ então

podemos afirmar que:

a) $x_0 + y_0 = 3 - 2\operatorname{sen} a$
b) $\left(\frac{2}{3}x_0\right)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a + 2$
c) $x_0 - y_0 = 0$

d) $x_0 + y_0 = 0$

e) $\left(\frac{2}{3}x_0\right)^2 - y_0^2 = \frac{4}{9}\cos^2 a$

40) (ITA-84) Os valores reais de a, que tornam o sistema $\begin{cases} 3^{2a+1}.x + y = 1 \\ x + y = 0 \\ (3^a.10 - 3)x + y = 1 \end{cases}$ possível e determinado, são:

a) qualquer valor de a.
b) apenas a = 0 e a = 3.
c) apenas a = 2.
d) apenas a = 1 e a = −1.
e) não existe valor de a nestas condições.

41) (ITA-18) Se o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2a^2y + (2a^4 - a)z = 0 \\ x + ay + (a^3 - 1)z = 0 \end{cases}$$

admite infinitas soluções, então os possíveis valores do parâmetro a são

a) $0, -1, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

b) $0, -1, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

c) $0, -1, \frac{-1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

d) $0, -1, -1-\sqrt{3}, -1+\sqrt{3}$

e) $0, -1, 1-\sqrt{3}, 1+\sqrt{3}$

42) (ITA-88) Sobre o sistema $\begin{cases} 8x - y - 2z = 0 \\ 7x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$. Podemos afirmar que:

a) é possível e determinado
b) é impossível
c) é possível e qualquer solução (x, y, z) é tal que os números x, y, z formam nesta ordem, uma progressão aritmética de razão igual a x.
d) é possível e qualquer solução (x, y, z) é tal que y = (x + z)/3
e) é possível e qualquer solução (x, y, z) é tal que os números x, y, z formam nesta ordem, uma progressão aritmética de razão igual a (x + y + z)/3.

43) (ITA-89) O sistema de equações:

$$\begin{aligned} x + 3y - z &= 6 \\ 7x + 3y + 2z &= 6 \\ 5x - 3y + 4z &= 10 \end{aligned}$$

a) tem somente uma solução.
b) tem infinitas soluções com 9(x + y) = 14 e 9(2x − z) = 40.
c) tem infinitas soluções com 9(x + y) = 34 e 9(2x − z) = 20.
d) tem infinitas soluções com x dado em função de y e z.
e) não possui solução.

44) (ITA-89) Considere a equação $x\begin{bmatrix} 4 \\ -16 \\ 4 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, onde x, y e z são números reais. É verdade que:

a) a equação admite somente uma solução
b) em qualquer solução, $x^2 = z^2$
c) em qualquer solução, $16x^2 = 9z^2$
d) em qualquer solução, $25y^2 = 16z^2$
e) em qualquer solução, $9y^2 = 16z^2$

45) (ITA-97) Considere as matrizes: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Sejam λ_0, λ_1 e λ_2 as raízes da equação $\det(A - \lambda I_3) = 0$ com $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$. Considere as afirmações

(I) $B = A - \lambda_0 I_3$

(II) $B = (A - \lambda_1 I_3)A$

(III) $B = A(A - \lambda_2 I_3)$

Então

a) todas as afirmações são falsas.

b) todas as afirmações são verdadeiras.

c) apenas (I) é falsa.

d) apenas (II) é falsa.

e) apenas (III) é verdadeira.

46) (ITA-00) Considere as matrizes $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ em que $a \neq 0$ e a, b e c formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão $q > 0$. Sejam λ_1, λ_2 e λ_3 as raízes da equação $\det(M - \lambda I) = 0$. Se $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = a$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 7a$, então $a^2 + b^2 + c^2$ é igual a:

a) $\frac{21}{8}$ b) $\frac{91}{9}$ c) $\frac{36}{9}$ d) $\frac{21}{16}$ e) $\frac{91}{36}$

47) (ITA-02) 1. Mostre que se uma matriz quadrada não-nula A satisfaz a equação

$$A^3 + 3A^2 + 2A = 0 \qquad (1)$$

Então $(A + I)^3 = A + I$, em que I é a matriz identidade.

2. Sendo dado que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

satisfaz a equação (1) acima, encontre duas matrizes não-nulas B e C tais que $B^3 + C^3 = B + C = A$. Para essas matrizes você garante que o sistema de equações

$$(B - C)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tem solução $(x, y) \neq (0, 0)$? Justifique.

48) (ITA-03) Sejam A e P matrizes $n \times n$ inversíveis e $B = P^{-1}AP$. Das afirmações:

I – B^T é inversível e $(B^T)^{-1} = (B^{-1})^T$.

II – Se A é simétrica, então B também o é.

III – $\det(A - \lambda I) = \det(B - \lambda I)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

é (são) verdadeira(s):

a) todas. d) apenas I e III.

b) apenas I. e) apenas II e III.

c) apenas I e II.

49) (ITA-06) A condição para que as constantes reais a e b tornem incompatível o sistema linear

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 5z = 1 \\ 2x + 2y + az = b \end{cases}$$ é

a) $a - b \neq 2$ b) $a + b = 10$

c) $4a - 6b = 0$ d) $a/b = 3/2$

e) $a.b = 24$

50) (ITA-06) Seja o sistema linear nas incógnitas x e y, com a e b reais, dado por

$$\begin{cases} (a - b)x - (a + b)y = 1 \\ (a + b)x + (a - b)y = 1 \end{cases}$$

Considere as seguintes afirmações:

I – O sistema é possível e indeterminado se $a = b = 0$.

II – O sistema é possível e determinado se a e b não são simultaneamente nulos.

III – $x^2 + y^2 = (a^2 + b^2)^{-1}$, se $a^2 + b^2 \neq 0$.

Então, pode-se afirmar que é(são) verdadeira(s) apenas

a) I b) II c) III d) I e II e) II e III

51) (ITA-18) Sejam $x_1, ..., x_5$ e $y_1, ..., y_5$ números reais arbitrários e $A = (a_{ij})$ uma matriz 5×5 definida por $a_{ij} = x_i + y_j, 1 \leq i, j \leq 5$. Se r é a característica da matriz A, então o maior valor possível de r é
a) 1. b) 2. c) 3. d) 4. e) 5.

52) (ITA-13) Considere o sistema nas variáveis reais x e y:

$$\begin{cases} x \operatorname{sen}\alpha + 3y\cos\alpha = a \\ x\cos\alpha + y \operatorname{sen}\alpha = b \end{cases}$$

com $\alpha \in [0, \pi/2[$ e a, b ∈ IR. Analise para que valores de α, a e b o sistema é (i) possível determinado, (ii) possível indeterminado ou (iii) impossível, respectivamente. Nos casos (i) e (ii), encontre o respectivo conjunto-solução.

53) (IME-13) Considere o sistema de equações $\begin{cases} ax + by = c \\ px + qy = d \end{cases}$, com a, b, c, d, p e q reais, abcd ≠ 0, a + b = m e d = nc. Sabe-se que o sistema é indeterminado. O valor de p + q é
a) m b) m/n c) $m^2 - n^2$
d) mn e) m + n

54) (IME-05 CG) Sabendo que a, b e c são constantes reais, resolva o sistema simplificando o máximo possível a expressão obtida.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ cx + ay + bz = 0 \\ ax - by - bz = a^2 - b^2 \end{cases}$$

55) (IME-99 CG) Determine os valores de a e b para que a equação matricial abaixo seja impossível.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & \alpha \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

56) (IME-85 CG) Seja o sistema: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$. Discutir os valores de y_1, y_2 e y_3 para que este sistema admita solução.

57) (IME-88 CG) Determine os valores de k para que o sistema

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -3 \\ 2x_1 + kx_2 - x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + kx_3 = 1 \end{cases}$$

a) tenha solução única;
b) não tenha solução;
c) tenha mais de uma solução.

58) (IME-88 CG) Resolva e discuta o sistema: $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$

59) (IME-88 CG) Determine o valor de a para que o sistema abaixo tenha mais de uma solução e resolva-o, neste caso:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + az = 3 \\ x + ay + 3z = 2 \end{cases}$$

60) (IME-89 CG) Discuta o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x - ay + 3z = 9 \\ 3x + 3y - 2z = b \end{cases}$$

61) (IME-89 CG) Dado o sistema de equações lineares $\begin{cases} x+y-az=0 \\ ax+y-z=0 \\ x+ay-z=1 \end{cases}$, pede-se:

a) os valores de a para que o sistema tenha solução;

b) os valores de a para que a solução (x, y, z) satisfaça à equação $x + y + z = 1$

62) (IME-89 CG) Dados:

$$M=\left\{x\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\mid x,y\in\Re\right\},$$

$A=\begin{pmatrix}a&a'\\0&a\end{pmatrix}$ e $B=\begin{pmatrix}b&b'\\0&b\end{pmatrix}$, onde a, a', b, b' $\in \Re$, resolva a equação AZ = B, sabendo que Z $\in$ M, discutindo as condições que a, a', b e b' devem satisfazer para que a equação tenha solução.

63) (IME-98) Resolva e interprete, geometricamente, o sistema matricial abaixo, em função de α e β.

$$\begin{bmatrix}1&-2&3\\5&-6&7\\6&8&\alpha\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4\\-8\\\beta\end{bmatrix}$$

64) (IME-99) Determine α para que seja impossível o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (\alpha^2 - 14)z = \alpha + 2 \end{cases}$$

65) (IME-07) Considere o sistema de equações dado por $\begin{cases} x+y+2z=b_1 \\ 2x-y+3z=b_2 \\ 5x-y+az=b_3 \end{cases}$.

Sendo b_1, b_2 e b_3, valores reais quaisquer, a condição para que o sistema possua solução única é:

a) $a = 0$ b) $a \neq 2$

c) $a \neq 8$ d) $a \neq b_1 + b_2 - b_3$

e) $a = 2b_1 - b_2 + 3b_3$

66) (ITA-08) Considere o sistema Ax = b, em que

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&3\\2&k&6\\-1&3&k-3\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}1\\6\\0\end{pmatrix}\text{ e } k\in\mathbb{R}.$$

Sendo T a soma de todos os valores de k que tornam o sistema impossível e sendo S a soma de todos os valores de k que tornam o sistema possível e indeterminado, então o valor de T – S é

a) – 4 b) -3 c) 0 d) 1 e) 4

67) (ITA-09) O sistema: $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, com $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$, $a_1c_1 + a_2c_2 = b_1c_1 + b_2c_2 = 0$, é:

a) determinado.

b) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 \neq 0$.

c) determinado somente quando $c_1 \neq 0$ e $c_2 = 0$ ou $c_1 = 0$ e $c_2 \neq 0$.

d) impossível.

e) indeterminado.

68) (ITA-10) Considere as matrizes $A \in M_{4\times4}(\mathbb{R})$ e $X, B \in M_{4\times1}(\mathbb{R})$:

$A = \begin{bmatrix} a & 1 & b & 1 \\ b & 1 & a & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -a & 2 & b & 1 \end{bmatrix}$; $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$

a) Encontre todos os valores reais de a e b tais que a equação matricial AX = B tenha solução única.

b) Se $a^2 - b^2 = 0$, $a \neq 0$ e $B = [1 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 4]^t$, encontre x tal que AX = B.

69) (ITA-11) O sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ y + 2z = b \\ 3x - y - 5cz = 0 \end{cases}$$

a) é possível, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

b) é possível quanto $a = \frac{7b}{3}$ ou $c \neq 1$.

c) é impossível quando $c = 1$, $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$

d) é impossível quando $a \neq \frac{7b}{3}$, $\forall c \in \mathbb{R}$.

e) é possível quando $c = 1$ e $a \neq \frac{7b}{3}$.

70) (ITA-14) Considere a equação A(t) X = B(t), $t \in \mathbb{R}$, em que $A(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} & -e^{2t} & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ e $B(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$. Sabendo que $\det A(t) = 1$ e $t \neq 0$, os valores de x, y e z são,

A) $2\sqrt{2}, 0, -3\sqrt{2}$. B) $-2\sqrt{2}$,

C) $0, 3\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$. D) $0, 2\sqrt{3}, \sqrt{3}$.

E) $2\sqrt{3}, -\sqrt{3}, 0$.

71) (ITA-14) Considere o sistema linear nas incógnitas x, y e z

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ -x + (\operatorname{sen}\theta)y + 4z = 0 \\ 2x + (1 - \cos 2\theta)y + 16z = 0 \end{cases}, \ \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Determine θ tal que o sistema tenha infinitas soluções.

b) Para θ encontrado em (a), determine o conjunto-solução do sistema.

72) (ITA-16) Se o sistema de equações $\begin{cases} x + y + 4z = 2 \\ x + 2y + 7z = 3 \\ 3x + y + az = b \end{cases}$ é impossível, então os valores de a e b são tais que

a) $a = 6$ e $b \neq 4$.

b) $a \neq 6$ e $b \neq 4$.

c) $a \neq 6$ e $b = 4$.

d) $a = 6$ e $b = 4$.

e) a é arbitrário e $b \neq 4$.

73) (ITA-17) Determine todos os valores reais de a para os quais o seguinte sistema linear é impossível:

$$\begin{cases} x + ay + z = 2 \\ -x - 2y + 3z = -1 \\ 3x + az = 5 \end{cases}.$$

74) (IME-18) Seja o seguinte sistema de equações, em que s é um número real:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - sx_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ sx_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Escolha uma faixa de valores de s em que as soluções do sistema são todas negativas.

(A) $s < -2$ (B) $-2 < s < 0$

(C) $0 < s < 1$ (D) $1 < s < 2$

(E) $s > 2$

75) (IME-13) Considere a, b e c números inteiros e $2 < a < b < c$. Determine o(s) valor(es) de x, y e z, que satisfaçam o sistema de equações

$$\begin{cases} ax - 2by + 3cz = 2abc \\ 3ax - 4by = abc \\ -by + cz = 0 \\ xyz = 2013^2 \end{cases}$$

76) (IME-08) Os elementos da matriz dos coeficientes de um sistema de quatro equações e quatro incógnitas (x, y, z e w) são função de quatro constantes a, b, c e d. Determine as relações entre a, b, c e d para que o referido sistema admita uma solução não trivial, sabendo, sabendo que $CD = -DC$, onde

$$C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ e } D = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}.$$

Exercícios Gerais

77) Prove que se X for um auto-vetor correspondente ao auto-valor λ de uma matriz invertível A, então X é auto-vetor de A^{-1} correspondendo ao auto-valor $1/\lambda$.

78) Prove que se λ for um auto-valor de A com o correspondente auto-vetor X, então X também é auto-vetor de A^2 correspondente a λ^2.

79) Prove que se λ for um auto-valor de A com o correspondente auto-vetor X, então para cada escalar c, X é auto-vetor de $A - cI$ correspondente ao auto-valor $\lambda - c$.

80) Prove que uma matriz e a sua transposta têm os mesmos auto-valores.

81) Prove que se A for de ordem n, então $\det(A - \lambda I) = (-1)^n\{\lambda^n - (\text{tr } A)\lambda^{n-1} + O(\lambda^{n-2})\}$ onde $O(\lambda^{n-2})$ representa um polinômio em λ de grau menor ou igual a $n - 2$.

82) Prove que o traço de uma matriz é igual à soma dos auto-valores dessa matriz.

83) Prove que o determinante de uma matriz quadrada é igual ao produto de todos os auto-valores dessa matriz.

84) Mostre que a matriz n×n

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & .. & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & .. & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

tem como equação característica $(-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0) = 0$.

85) Uma matriz A é semelhante à matriz B se existir uma matriz inversível S tal que $A = S^{-1}BS$. Prove que matrizes semelhantes apresentam o mesmo polinômio característico.

86) Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^{n+k} = 0$, onde k é um inteiro positivo. Prove que $A^n = 0$.

87) Seja A a matriz formada pelos coeficientes do sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} \lambda x + y + z = \lambda + 2 \\ x + \lambda y + z = \lambda + 2 \\ x + y + \lambda z = \lambda + 2 \end{cases}$$

a) Ache as raízes da equação: $\det A = 0$.
b) Ache a solução geral desse sistema para $\lambda = -2$.

88) Suponha que uma matriz quadrada A de ordem 2 possua como auto valores – 1 e 3. Demonstre que:

$$A^{n+1} = \frac{1}{4}[(-1)^n + 3^{n+1}]A + \frac{3}{4}[(-1)^{n-1} + 3^n]I.$$

89) Seja A uma matriz n×n ortogonal, onde n é um número par e suponha que $\det A = -1$. Mostre que $\det(I - A) = 0$, onde I é a matriz identidade de ordem n.

90) Seja $A \in M_n(\mathbb{Z})$ tal que $A^4 = O_n$. Prove que $\det(A^2 + I_n) = 1$.

91) Se $A \in M_4(\mathbb{C})$, $\det A \neq 0$, $\operatorname{tr} A = 0$, prove que $\operatorname{tr}(A^3) = 3.\det A.\operatorname{tr}(A^{-1})$.

92) Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $A^2 = 3A + 10I$
b) Prove que

$$A^n = \frac{[5^n - (-2)^n]}{7}A + \frac{[5^{n-1} - (-2)^{n-1}]}{7}I$$

93) Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^t.A = I$. Prove que:
a) $|\operatorname{tr} A| \leq n$;
b) se n é ímpar, então $\det(A^2 - I_n) = 0$.
Dica: prove que os autovalores de A são iguais a 1 ou – 1.

94) Seja A uma matriz quadrada e para todo número natural k tem-se $\operatorname{tr}(A^k) = 0$. Prove que $\det(A) = 0$.
Dica: Prove que os autovalores de A são nulos.

95) Seja A uma matriz n×n inversível com elementos reais. Sabe-se que $\operatorname{tr}(A^2) = \operatorname{tr}(A^3) = \operatorname{tr}(A^4)$. Prove que $\operatorname{tr}(A) = n$.
Dica: Prove que todos os autovalores de A são iguais a 1.

96) Considere uma matriz quadrada A não inversível, de ordem $n \geq 2$, com elementos reais. Suponha que A^* é a matriz adjunta de A. Prove que $\operatorname{tr}(A^*) \neq -1$ se e somente se a matriz $I_n + A$ é inversível.
Dica: prove que os autovalores de A^* são os produtos de diferentes n – 1 autovalores de A e depois separe em dois casos: 1) A possui exatamente um autovalor nulo; 2) A possui mais de um autovalor nulo.

97) Seja A uma matriz quadrada de ordem n. Se $A^3 = 4I_n - 3A$, demonstre que $\det(A + I_n) = 2^n$.
Dica: prova que os autovalores de A são 1 e $-1/2 \pm 15i/2$

98) Seja $A_{3\times3}$ uma matriz inversível com $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(A^2) = 0$. Prove que:
$\det(A + A^{-1}) = \det(A) + \det(A^{-1})$.
Dica: calcule o valor de $\det(A^2 + I)$ em função dos autovalores de A.

99) Seja A uma matriz quadrada de ordem n tal que $A^3 = A + I$. Demonstre que $\det A > 0$.
Dica: determine os autovalores de A.

100) Prove que se A é uma matriz nilpotente, então A + I e A − I são inversíveis.
Dica: prove que todos os autovalores de A são nulos.

101) Sejam A e B matrizes n×n. Mostre que para todo $k \geq 1$ tem-se $tr[(AB)^k] = tr[(BA)^k]$.
Dica: prove que AB e BA possuem os mesmos autovalores.

102) Prove que $A_{n\times n}$ é nilpotente se e somente se $tr(A^k) = 0$ para todo $k \in \{1, 2, ..., n\}$.

103) Para quais valores de x a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 0 & 2 & x \end{bmatrix}$ possui ao menos um autovalor repetido.

104) Sejam A e B matrizes 2×2 com elementos complexos satisfazendo a relação A = AB − BA. Prove que $A^2 = 0$, onde 0 é a matriz nula 2×2.
Dica: prova que tr A = 0 e det A = 0 e depois use o teorema de Cayley-Hamilton

105) Seja A uma matriz ortogonal 3×3 com elementos reais e com det A = 1.
a) Se $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ é um dos autovalores de A, determine todos os autovalores de A.
b) Seja $A^{100} = aA^2 + bA + cI$, onde I é a matriz identidade 3×3. Calcule a, b e c.

106) Sejam A e B matrizes 2×2 tais que $(AB)^2 = 0$, onde 0 é a matriz nula 2×2. Prove que $(BA)^2 = 0$.
Dica: use o teorema de Cayley-Hamilton e prove que tr (AB) = 0 e depois aplique o teorema de Cayley-Hamilton na matriz BA.

107) Seja $A_{2\times 2}$ uma matriz satisfazendo $tr(A^2) = 5$ e tr (A) = 3. Calcule det (A).

108) a) Prove que os autovalores de uma matriz simétrica, de elementos reais, 2×2 são reais.
b) prove que os autovalores de uma matriz anti-simétrica, de elementos reais, 2×2 não são reais.

109) Prove que não existe uma matriz real 7 × 7 com entradas não negativas cujos autovalores, contados com multiplicidade, são 6, − 5, − 5, 1, 1, 1, 1.

110) Seja *A* uma matriz quadrada com entradas reais. Prove que $\det(I + A^2) \geq 0$.

111) Sejam *A* e *B* matrizes quadradas de mesma ordem *n*. Prove que:
$$\det(AB + I) = \det(BA + I).$$

112) (a) Mostre que, para qualquer $m \in \mathbb{N}^*$, existe uma matriz real A m×m tal que $A^3 = A + I$.
(b) Mostre que det(A) > 0 para toda matriz real $A_{m\times m}$ que satisfaz $A^3 = A + I$.
Dica: a) Faça A = k.I; b) calcule os autovalores de A.

GABARITOS

Capítulo 1: Princípio da Indução Finita

5) d 6) e 14) 2007

24) a proposição foi demonstrada sendo válida para apenas um elemento (n = 1), entretanto, foi admita sua validade para dois inteiros positivos consecutivos.

83) n = 3k

Capítulo 2: Progressão Aritmética

1) e 2) $(2a_1 + nr).n/4$; b) 114 3) a) 2ª linha; b) 107ª coluna.

4) a 5) b 6) a

7) d 8) b 9) d

10) 24 11) a 12) 13264

13) b 14) d 15) 2

16) a) 1120; b) n = 13 e $a_{13} = 101$ 17) d

18) a) $25\pi/2$ cm²; b) 210π cm 19) d 20) b) 54; c) 30

21) d 22) 2420 23) b

24) c 25) a 26) a

27) e 28) a) $S_2 = 9$, $S_3 = 36$ e $S_4 = 100$. b) Verdadeira

29) a) 99; b) 99^2 30) a 31) b

32) a 33) c 34) a

35) c 37) c 38) d

39) e 41) $a_1 = -41/2$ e r = 1 42) $a_5/b_6 = a_1.a_{10}$

43) r = 8 $a_1 = 4$ 45) 1000/3001 46) d

47) a 48) c 49) c

50) d 51) b 52) a

53) m + n = p + q 68) $S = (2n - 1)^2$ 70) 15

71) $2n^3 - 3n^2 + 3n - 1$ 72) e 73) a) 480; b) 1.

74) 4 75) 396 79) 6560

80) 195 81) 10100 82) a) 1641; b) 1502

83) 50 84) a) $1/n - 1/(n + 1)$; b) $n/(n + 1)$

85) a) 15; b) 5050; c) par 86) 29

87) b) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3$; c) $S_n = n^3$ 88) 5000/101

89) a) p = q + 1; b) 10200 90) 2565 91) 4002001 e 2001

92) a 93) c 94) 1999000

95) d 96) a) 2016; b) n^3 97) a) 6052; b) 14950

98) 520 99) 1

100) se n par: $n^2/4$, se n ímpar: $(n^2 - 1)/4$ 101) b) 1001/3001

102) 299,98 103) 24 104) d

105) c 106) 101/200

Capítulo 3: Progressão Geométrica

1) e
2) d
3) a) 192 lados; b) 1024/81; c) Passo 21
4) c
5) b
6) 25a
7) 9, 12, 16
8) VV
9) VFVFac
10) c
11) a
12) VFVV
13) a) $b_2 = q^{20} - 15q$; b) $m = q^{10} - q^{2n-3} + 17$
14) e
15) e
16) 25 cm²
17) a) 3200 e 6450; b) 12
18) b
19) a) 3/4, 3/2, 3, 5, 7; b) 1, – 4, 16, 12, 8 ou 1, 2, 4, 6, 8
20) e
21) e
22) a) $\pi L^2/12$ e $\pi L^2/108$; b) $3\pi L^2/32$
23) b
24) a
25) e
26) a
27) d
28) a
29) e
30) e
31) a) $2^{(n-1)/2}$; b) 2 – n
32) 9 m
33) c
34) d
35) c
36) d
37) 1
38) b
39) $2(2+\sqrt{2})$
40) c
41) d
42) a
43) a
44) 24
45) b
46) VFFFF
47) e
48) b
49) b
50) b
51) c
52) c
53) a
54) a
55) c
56) c
57) $2a^2$
58) d
59) d
60) b
61) c
62) a
63) a
64) b
65) c
66) a
67) c
68) d
69) c
70) d
71) c
72) c
73) c
74) c
75) e
76) 6, 12, 18
80) b) q = 4; $4(4^t - 1)$
81) PA (68, 42, 16) PG (17, 34, 68)
82) 1350 cm²
83) 11
84) c
85) $s = \frac{n-2}{n^2-2n-2}$ e $r = \frac{n}{n^2-2n+2}$
86) $\frac{(2009r+1)q^{2011} - (2010r+1)q^{2010} + qr - q + 1}{(q-1)^2}$
87) $14 - 6\sqrt{2}$
88) a) B = 1/4; C = - 1/2; D = 1; E = - 2
89) (8, 12, 18, 27)
90) a) 3; b) 53
91) (m, n) = {(2835, 90720), (280, 68040), (2835, 45360), (105, 136080), (840, 68040)}
92) a
93) c
94) a
95) $\frac{2\pi R^2}{2-\sqrt{2}}$
96) 6, 10, 14
97) 14
98) $x = k\pi$ ou $x = \pm \pi/6 + 2k\pi$
99) 9, 27, 81, 243
106) $a_m = A + B$, $a_n = A - m(A - B)/2n$
109) PA $\{-18 \pm 4\sqrt{10}, -7 \pm 4\sqrt{10}, 4 \pm 4\sqrt{10}\}$
110) 399/403
111) 542
115) r = – 1562 $a_3 = 9372$
117) 336
118) 363
119) $(10^{n+1} - 9n - 10)\ 81$
121) (2, 4, 8)

122) 129 123) 542 124) 840
125) 1/16 126) b 127) d

128) a) 8; b) 2 129) a) $\frac{\sqrt{3}}{4}\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$; b) $\text{Área}(F_n) \leq \frac{2\sqrt{3}}{5}$

131) a) $\left(\frac{b-a}{2}\right)^2$; b) $\left(\frac{b-a}{4}\right)^2$; c) $\frac{h_{XD}}{h_{AC}} = \frac{1}{2}$ e $\frac{S_{XCD}}{S_{ABC}} = \frac{1}{8}$ 132) 8/9

133) b 134) 27/2 135) e
136) c 137) a 139) 363

Capítulo 4: Sequências Recorrentes

1) a) $u_1 - u_0$; b) $u_n = v_0 + n(v_1/3 - v_0)$; c) $v_n = 3^n[v_0 + n(v_1/3 - v_0)]$
2) $a_n = (n-1)a_2 - (n-2)a_1 + (n-2)(n-1)/2$ 3) $x_n = 3^n - 4^n$
4) $a_n = (3^{n-1} - 2^{n-1})a_2 - 6(3^{n-2} - 2^{n-2})a_1$ 5) $a_n = 4^n + 499^n$
7) $3.2^{n-1} - 1$ 8) $2.3^{n-1} + 1$ 9) $x_n = 4.5^n - 19.n.5^{n-1}$

10) $x_n = 2^n + 3.n.2^{n-1}$ 11) $7.(-2)^n + 2.3^n - 2$ 12) $a_n = \frac{11}{14}.2^n - \frac{3}{35}(-5)^n$

13) $a_n = 2^{n-2} - \frac{4^{n-2}}{6} + \frac{2}{3}$ 14) $9(4^{n-1} - 3^{n-1})$ 15) 8

16) $[7.2^{n-1} + (-1)^n]/3$ 17) $a_n = 1$ 18) 2
19) $2/(n^2 - n + 2)$ 20) 222 21) 1, 2, 2^2, 5, 2.5, 2.5^2
22) 1999.2^{1996} 23) i) $a_n = n^2 + n(b - a - 1) + a$, $\forall n \geq 0$; ii) $a = k^2$ e $b = (k-1)^2$

24) $n = 2^k + 1$ 25) n = 1 e n par 28) $\frac{1}{x-1}$

Capítulo 5: Análise Combinatória

1) 2800 2) e 3) d
4) d 5) a) 3; b) 33; c) 73 6) c
7) d 8) 6 9) d
10) e 11) a 12) a
13) d 14) e 15) d
16) 600 17) b 18) b
19) e 20) b 21) d
22) a 23) 1050 24) b
25) b 26) d 27) 576
28) e 29) b 30) d
31) b 32) e 33) e
34) c 35) b 36) c
37) a 38) d 39) b
40) 150 41) a) 84; b) 1365. 42) 15
43) $C_{7,2} = 21$ 44) c 45) 350
46) 64 47) a 48) d
49) d 50) e 51) d
52) e 53) e 54) b

55) b
56) b
57) b
58) 60000
59) 300
60) e
61) 460800
62) 165
63) 14976
64) $C_{n-2,3}$
65) $3.C_{n,4}$
66) 31
67) 4^7
68) d
69) 656
70) 2^{n-1}
71) 3999960
72) 9 ou 16
73) 210
74) e
75) a) $15n^2$; b) $30.n.C_{n,2} + n^3.C_{n,3}$; c) $30.n.C_{n,3}$; d) $n^4.C_{n,4}$
76) 2^{11}
77) 3535
78) 180
79) a) 105; b) 14
80) 70
81) $15n^2$ retas e $5n^2(7n-3)$ triângulos
82) 5760
83) 10 voluntários e 55 homens
84) d
85) a
86) a
87) a
88) a
89) 240
90) $\sum_{i=0}^{n}(-1)^n\binom{n}{i}(m-i)!$
91) d
92) 2
93) 220
94) e
95) 288
96) e
97) a) 40320; b) 24192
98) a
99) b
100) d
101) a
102) b
103) 2620
104) 2088960
105) a) 8!; b) 8! – 1; c) 7 x 7 ou 8 x 7 – 7; d) C(6, 3)
106) a) 21 x 19 x 17 – 1; b) 21 x 19 x 17 – 2; c) 17 x 15 x 13; d) C(19,2) x C(17,2) x C(15,2)
107) a) 127; b) 966
108) 62379
109) a) 26^{10}; b) 26×25^9; c) $26^{10} - P(26,10)$; d) $2^{10} - 2$; e) C(10,3); f) C(8,3); g) 10!/(2!3!5!);
) C(10,3) x 25^7 + C(10,4) x 25^6; i) C(10,3) x 5^3 x 21^7;
) C(5,3) x C(21,7) x 10! – C(10,3) x P(5,3) x P(21,7)
110) 540
111) $C_{14,5} = 2002$
112) 11745
113) 370775
114) 1022
115) 71
116) 1980
117) a) $mC_{k,2} + kC_{m,2}$; b) $C_{k,2}.C_{m,2}$
118) 32!/(12!)(5!)^4
119) 756756
120) 138378240
121) (m + h)!/m!h!
122) a) 6435; b) 3985; c) 5035; d) 2865.
123) a) 5!6!; b) 2.5!; c) 80.5!
124) a) $C_{19,2}$; b) $C_{22,2}$
125) 19990
126) 1330
127) 567
128) $C_{10,6} = 8008$
129) 84
130) a) 252; b) 208.
132) $C_{71,3}$
133) a) $C_{37,4}$; b) $C_{30,4}$
134) a) $C_{17,3}$; b) $C_{11,3}$
135) (2300 – 144)/2 = 1078
136) 90
137) 1.000.000 – $(9^6 + 9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9)$ = 402130
138) 88080
139) $C_{n+5,5}$
140) $3.C_{100,3} + (100)^3$
141) $3n^2 + 3n + 1$
142) 40320
143) 24
144) 2350
145) 219
146) a) $\lambda(\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 3)$; b) 2
147) 132
148) 604800
149) 564480
150) 720
151) 30
152) a) 2; b) 1680; c) 7983360; d) 20!/60; e) 3360; f) 30
153) a) 12960; b) 14976
154) n(n – 1)(n – 2)(n – 3)/8
155) 42.9!
156) 11!.825
157) 110
158) (n – 1)!.2^n
159) $C_{30,10} - C_{27,20}$
160) a) n!; b) (n + 1)!n/2; c) (n + 2)!n(3n + 1)/24
161) 6.4^{n-3}
162) $C_{n,m}$
163) (m + n – 1)!/(n – 1)!m!
164) 5004
165) 1016
166) 2001
167) 504
168) 2.3^{n-2}
169) 7
170) 45360
171) 1050
172) 70

173) $(p + 1)!q!(p - q - 1)!$
174) $C_{10,5}.C_{11,5}$
175) 560
176) 20
178) 2^{n-1}
179) $C_{n,1} + C_{n+1,2} + C_{n+2,3} + \ldots$
180) 126
181) 105
182) $C_{49,6} - C_{44,38}$
183) 3612
184) $n(n-4)(n-5)/2$
185) $2^{18}.C_{27,9}$
186) 116
187) 6.4!
188) a) $C_{m+a+3,3}$; b) $C_{m+a+b+3,3}$
189) 10
190) 3888
191) 1676
192) $7!.C_{8,3}$
193) 840
194) a) 56; b) 8; c) 28
195) se n ímpar: $(n^2 - 1)/4$ e se par: $n^2/4$
196) 40
197) 8
198) a) 60480; b) 1560
200) 735
201) 336
202) $C_{8,5}$
203) 19600
204) 28501
205) 183
206) 615
207) e
208) c
209) 55 e 10
210) 350 e 1701
211) a) 5^4; b) 4.5^3
213) 795
214) 140
215) 212
216) 2^{n-1}
217) 174
218) 144
219) 120
220) $2^{1993} - 1$
221) $n! - 24(n-2)! + 24(n-3)!$
222) 3^n
223) 243
224) 16
225) 10
226) 22^n
227) 556
228) a
229) c
230) a
231) a
232) a
233) 252
234) 2592
235) 3600
236) 4005
237) 10
238) 6^5
239) 144
240) 365
241) 90
242) 400
243) 432
244) 502
245) 728
246) 300
247) 927
248) 65
249) 1524
250) 1750
251) 1680
252) 2800
253) 486
254) 540
255) 2688
256) 281250
257) 2268
258) 588
259) 1001

Capítulo 6: Binômio de Newton

1) a
2) 11
3) c
4) e
5) 252
6) $T_4 = 56$
7) a
8) e
9) a
10) a
11) b
12) b
13) c
14) $T_5 = 7560$ e $T_{11} = 243$
15) a
16) b
17) c
18) d
19) c
20) c
21) c
22) c
23) VVVVV
24) d
25) a
26) c
27) d
28) c
29) a
30) b
31) c
33) e
34) d
35) e
36) a
37) a
38) b
39) b
40) c
41) c
42) d
43) c
44) c
45) c
46) d

47) 0 | 48) n = 7 ou n = 14 | 49) 45
50) y^{20} | 52) n = 13 | 54) m múltiplo de 3
55) n = 7 ou n = 14 | 56) 414 | 57) d
58) b | 59) c | 60) c
61) c | 62) d | 63) b
64) c | 65) a | 66) b
67) b | 69) a | 70) c
71) 0,82 | 74) b | 75) p = 5

76) $S_0 = \frac{2^n + 2.\cos\frac{n\pi}{3}}{3}$ e $S_1 = \frac{2^n + 2.\cos\frac{(n-2)\pi}{3}}{3}$ | 77) c

78) a = 2 e b = 1 | 88) 127 | 89) $(3^{n+1} - 1)/(n + 1)$
100) n(n + 1) | 101) $(-1)^k C_{n,k}$ | 104) $3.C_{9,3} + C_{9,4}$
105) $(-1)^n C_{2n,n}$ | 106) $C_{11,3}$
107) $1 + (C_{10,2}C_{2,1})6 + (C_{10,4}C_{4,2})6^2 + (C_{10,6}C_{6,3})6^3 + (C_{10,8}C_{8,4})6^4 + (C_{10,10}C_{10,5})6^5$
108) k = 64 | 109) a) $1 + 1/a$ deve ser um divisor de n + 1; b) não
111) 755 | 112) $(n^2 - 5n + 2)/2$
113) máximo: $T_{41} = (C_{120,40})/(2^{40})$ mínimo: $T_{121} = 1/(2^{120})$ | 114) $3n.4^{n-1}$
115) 24 | 116) – 10592 | 117) $5n(5n + 1)6^{n-2}$
120) $\frac{1995}{1994!} - 1$ | 121) (n + 1)! – 1

Capítulo 7: Probabilidade

1) a | 2) d | 3) c
4) c | 5) c | 6) b
7) c | 8) d | 9) 1/3
10) d | 11) a) 1/5; b) 0,4096 | 12) a) 1/3; b) 2,9
13) 1/6 | 14) 39/277 | 15) a
16) b | 17) c | 18) b
19) d | 20) c | 21) a) 47250; b) 44/125
22) a) 2/27; b) 43/216 | 23) a) 2/25; b) 27/50; c) 1/800 | 24) a) 5/16; b) 3/128
25) b | 26) a | 27) 1/2
28) e | 29) $1 - \pi R^2/L^2$ | 30) e
31) d | 32) a
33) a) $p_1(R) = 28/45$, $p_1(AR) = 16/45$ e $p_2(A) = 1/45$; b) 1ª avaliação
34) a) 224; b) 7/126 | 35) a) 1/2; b) 1/1024; c) 5/512; d) 15/128; e) k = [n/2]
36) a | 37) EEC | 38) FVVVV
39) a | 40) e | 41) a
42) c | 43) c | 44) a
45) d | 46) c | 47) c
48) a | 49) a | 50) a) 1/4; b) 1/5
51) b | 52) b | 53) a
54) a) 1/3; 5/6 | 55) e | 56) 1/1155
57) 4/9 | 58) 1 ou 3 | 59) d
60) a) 216; b) 25 e 27; c) 25/216 e 1/8 | | 61) 5/13
62) a | 63) 275/2048 | 64) b
65) b | 66) e | 67) c

68) c
69) 5/24
70) b
71) c
72) a
73) 3/16
74) 7/8
75) 1/6
76) 3/5
77) 5/12
78) 4/7
79) 1/9
80) 1/3
81) 103/288
82) $\pi/6$
83) 3/10
84) $k(2h - k)/h^2$
85) 375/442
86) Eva está correta, a probabilidade é 11/126
87) 1/2
88) 2/7
89) $(p - 1)/(n - 1)$
90) 7/900
91) c
92) c
93) c
94) d
95) 55/703
96) 1/3
97) 1/25
98) a
99) 3/64
100) c
101) 13/30
102) 1/27
103) 0,8
104) 28/111
105) d
106) a
107) d
108) 976
109) 9/20
110) d
111) 5 ou 6
112) 3/44
113) 144
114) 31/126
115) 26/315
116) $p_{XS} = 2^2/3^5$, $p_{YS} = 2^3/3^5$, $p_{XF} = 5/21$ e $p_{YF} = 16/21$
117) 127 e 376
118) e
119) 515
120) b
121) 40/243
122) 8/15
123) 9/625
124) 9/64
125) c
126) c
127) 1/2
128) a) $\dfrac{\binom{10}{2}\cdot\binom{n-10}{18}}{\binom{n}{20}}$; b) n = 99 ou 100
129) a) 4/5; b) 4/5; c) 39/49
130) 1/9
131) a) $p(n + 1) = 0.8p(n) + 0.1$; b) $p(n) = (1 - 0.8^n)/2$
132) a) i) 1/3; ii) 2/7; iii) 101/126
133) 13/450
134) b
135) a
136) $2^{503}/(503!.1006!)$
137) 1/5
138) a1) 1/2, 1/2, 1/2, 1/4, 1/4, 1/4, 1/4; b) $(p_1 - 1)/p_1$; c) $\varphi(n) = n(1 - 1/p_1)(1 - 1/p_2)...(1 - p_k)$
139) 39/1100
140) 400

Capítulo 8: Recorrência em Combinatória e Probabilidade

1) 2^{n-1}
2) a) 60; b) $3[3^{n-1} + (-1)^n]/4$
3) a) 9^n; b) pares = $(9^n - (-1)^n)/2$
4) $(5^n + 3^n)/2$
5) $f(n) = 2f(n - 1) + 2f(n - 2)$
6) $\dfrac{(1+\sqrt{2})^{n-1} + (1-\sqrt{2})^{n-1}}{2}$
7) $x_{n+1} = 3x_n + 2x_{n-1}$
8) $(4^n + 2^n)/2$
9) $\dfrac{1}{2}\left[1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right]$
10) F_{n+1}, onde F_n = nº de Fibonacci
11) $\dfrac{1}{3}\left(2 + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$
12) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$
13) $a_{n+1} = 4a_n + 2a_{n-1}$, $a_1 = 5$ e $a_2 = 22$

15) $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ 17) $\frac{2^n}{(n+1)!}$ 18) $(3^n + 1)/2$

19) 233 20) $(1 + 2^{-29})/3$ 21) e

22) 8.3^{499} 23) $[2^{n-1} + 2(-1)^{n-1}]/3$ 24) $3(3^{1996} - 1)/4$

25) 144 27) $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}$ 28) 65

29) $p_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ 30) $a_n = \begin{cases} k, \text{se } n = 1 \\ (k-1)^n + (k-1)(-1)^n \text{ se } n \geq 3 \end{cases}$

31) 1278 32) $4^{n-1} + 2^{n-1}$ 33) e

34) e 35) 172

Capítulo 9: Princípio da Casa dos Pombos

1) 73 2) 20 3) c

4) d 5) a 6) d

7) b 8) b 9) e

10) d 11) e 12) c

13) 6 14) d 15) d

19) 9491 23) b) (101, 102, 103, ..., 200) 27) 52

37) a) 3; b) 8 39) b 40) d

41) d 43) b 44) b

45) e 46) e 47) c

48) d 49) b 51) Não

53) $n - 1 \leq 2m$ 56) 53

60) Não é válido para 5 pontos 63) a) Sim; b) Não. 69) 10

2) 97

Capítulo 10: Matriz

1) a 2) c 3) a) 3; b) 33.

4) a) Cláudio: b) 2. 5) a) a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $k = 2$ ou $k = 3$ 6) e

7) 126 8) d 9) e

10) d 11) e 12) a

13) a) a = 2/3 e b = - 1/3; b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ 14) a 15) d

16) d 17) d 18) a

19) a 20) I – M 21) c

22) e 23) d 24) b

25) c 26) a 27) c

29) a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} 1 & k & \frac{k(k-1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 30) c

31) e

32) b

33) a

34) c

35) $\begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \pm 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{vmatrix}$

37) c

38) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

39) a) todas as matrizes do tipo $\begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix}$, x e y $\in \Re$; b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; d) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix}$.

40) $X = \begin{vmatrix} \pm 1 & \pm 2 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{vmatrix}$ ou $X = \begin{vmatrix} \pm\sqrt{2} & \pm\sqrt{2} \\ \pm\sqrt{2}/2 & \pm\sqrt{2} \end{vmatrix}$

41) $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$

42) $\begin{bmatrix} 1/6 & -2 \\ 5/6 & -4 \end{bmatrix}$

43) R é ortogonal

44) c

45) e

46) c

47) c

48) a) $B = \begin{bmatrix} 1-x & -x & x \\ -y & 1-y & y \end{bmatrix}$; b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

49) $\begin{pmatrix} 0 & z & y \\ z & 0 & x \\ y & x & 0 \end{pmatrix}$

50) $(n+3).2^n - 3$

51) e

52) a

59) $X = \begin{bmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} \sqrt{1-bc} & b \\ c & -\sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} -\sqrt{1-bc} & b \\ c & \sqrt{1-bc} \end{bmatrix}$

61) As matrizes idempotentes 2x2 diferentes da matriz identidade e da matriz nula são da forma

$X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix}$ ou $X = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix}$

64) As matrizes nulas de ordem n

71) $X = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ e $Y = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

72) x = 1/2 e y = – 1/2

73) todas as matrizes do tipo $\begin{bmatrix} a-b & b \\ -3b & a \end{bmatrix}$

74) todas as matrizes dos tipos $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 0 & x \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ e $\begin{vmatrix} \pm\sqrt{-bc} & b \\ c & \mp\sqrt{-bc} \end{vmatrix}$

82) $AB = \begin{bmatrix} CF+DF & CG+DE \\ EF+CF & EG+CE \end{bmatrix}$

88) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & n & 0 \\ \frac{n(n+1)}{2} & n & 1 \end{bmatrix}$

91) a) $\begin{bmatrix} x & 2y \\ -y & x-2y \end{bmatrix}$; b) $\begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix}$; c) $\begin{bmatrix} x & y & 0 \\ u & v & 0 \\ 3t-3x-u & t-3y-v & t \end{bmatrix}$

93) $\begin{bmatrix} 2 & -23 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ 94) 2019! + 1 96) e

98) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{-1 \pm \sqrt{1-4bc}}{2} & b \\ c & \frac{-1 \mp \sqrt{1-4bc}}{2} \end{bmatrix}$

99) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\pm 1 - bc} & b \\ c & \mp\sqrt{\pm 1 - bc} \end{bmatrix}$

Capítulo 11: Determinante

1) d 2) e 3) c
4) a = 2, b = 4, c = 6, m = 4, n = 8, p = 16 5) d
6) d 7) b 8) a
9) b 10) c 11) d
12) e 13) b 14) d
15) a 16) e 17) k < – 27 ou k < 33
18) b 19) $\begin{vmatrix} 2 & 4.25 & -0.5 \\ -2 & -3 & -1 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}$
20) a) 1; b) x = cos θ, y = sen θ, z = 3 21) $\{\forall x \in \Re / x \neq -30\}$
22) a
23) 033 24) b 25) b
26) d 27) a)1/14; b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
28) b 29) 0 30) a
31) e 32) e 33) a
34) c 35) a 36) d
37) a 38) c 40) c
41) d 42) a 43) c
44) b 45) d 46) c
47) d 48) e 49) c
50) a 51) b 52) a
53) b 54) a 55) a
56) 4 57) c 58) b
59) não inversível 60) a 61) c
62) c 63) b 64) b
65) d 66) c 67) c
68) c 69) c 70) d
71) e 72) a 73) d
74) a 75) (b – a)(c – a)(d – a)(c – b)(d – b)(d – c)
76) d 78) d 79) – 2/11
80) d 81) $(n!)^2(n + 1)!$ 82) 1 ou 2
84) a) $A_n = 3.A_{n-1} - 2.A_{n-2}$; b) $A_n = 2^n - 1$. 86) 0

87) $(x + mn)x^{n-1}$ 88) $x = -2, 0$ ou $4/7$ 89) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & -2 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

90) 46080 91) $\alpha = k\pi/4$ 92) 3

93) $\frac{b^{2(n+1)} - 1}{b^2 - 1}$ 94) $A = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{1-y^2} & y \\ y & \mp\sqrt{1-y^2} \end{pmatrix}$, com $y \in [-1,1]$

95) d 96) b 97) $1/2^n$
98) e 99) a 101) d
102) c 103) e 104) 5
105) 3 e – 1 106) c 107) c
108) a 109) c 100) – 1
111) e 112) $\alpha = 1/2$ ou $\alpha = -1/3$ ou $\beta = 0$ ou $\beta = 5$
114) d 115) d 116) 1
117) a 118) b 119) a
120) a 121) e 122) e
123) c 124) n + 1 125) n = 4
126) – 10 127) $x = \pi/6 + k\pi$ ou $x = \pi/3 + k\pi$, $k \in Z$
128) a = – 1 ou a = – 2 160) $(4^{n+1} - 1)/3$ 170) det A = ± 1

Capítulo 12: Sistemas Lineares

1) a 2) a) $\{-m-1, m+3, -2m-2\}$; b) $\{1, -3+2i, -3-2i\}$
3) a) $m \neq -3$; b) para m = 0 o sistema é indeterminado
4) a) $m \neq -1$ e $m \neq 2$; b) m = - 1; c) – 4 5) a
6) $\{-1, 0, 1, 2\}$ 7) c 8) $\lambda = 1$; b) $\{0, 0, 0\}$.
9) e 10) e 11) d
12) c 13) c 14) a
15) a 17) $\ell = m + n$ e $k = 2m - n$ 18) e
19) a) m = 0; b) (1, – 1, 1) 20) b) p = 0 e q = 0 ou q = 1 e q = 1/2
21) d 22) b 23) b
24) d 26) a 27) $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = -4$
28) $\forall k \in \Re$ o sistema é determinado
29) a) $a \neq -13/3$; b) a = – 13/3 e b = 2/3; c) a = – 13/3 e b = 2/3
30) x = 3, y = 3, z = 6, w = 5 31) $X = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 32) b
33) e 34) b 35) e
36) b 37) d 38) e
39) e 40) d 41) b
42) c 43) e 44) d
45) e 46) a 48) d
49) a 50) e 51) b
52) SPD: $\alpha \neq \pi/3$; SPI: $a = b\sqrt{3}$ e SI: $a \neq b\sqrt{3}$ 53) d

Marcelo Rufino de Oliveira nasceu em 1976 em Manaus-AM, cidade onde seus pais trabalhavam na época. Sua família é originária de Belém-PA, cidade onde passou a maior parte de sua vida. Ingressou em 1994 no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), onde graduou-se em Eng. Mecânica-Aeronáutica em 1999, porém nunca exerceu a engenharia. Trabalhou por muitos anos na preparação de alunos para concursos militares e olimpíadas de matemática em Belém, tanto como professor quanto coordenador. Em 2000 assumiu a coordenação regional da Olimpíada Brasileira de Matemática no estado do Pará, sendo também responsável pela organização da Olimpíada Paraense de Matemática. Em 2002 participou do Tribunal de Coordenação da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza. Em 2019 aceitou o desafio de trabalhar nas escolas preparatórias para ITA e olimpíadas em Fortaleza, cidade que concentra a maior quantidade de alunos e os maiores resultados do Brasil.

Apesar de ter sua atuação mais conhecida na área de matemática, professor Rufino (como é mais conhecido) também ministra aulas de física para concursos militares e olimpíadas. Também é autor da coleção Técnicas em Olimpíadas de Matemática, do livro A Física no Vestibular do IME e também da coleção Elementos da Física.

Entre suas maiores paixões estão a família e o motociclismo. Adora viajar, sobretudo para praias, cachoeiras e hotéis fazenda. Em seus momentos de lazer longe da família, troca qualquer coisa pela companhia de seus amigos do Pará Moto Clube, tendo percorrido alguns milhares de quilômetros montado em motocicletas de alta cilindrada. Em sua época de faculdade, foi goleiro titular da equipe de futsal do ITA por três anos. Também foi o treinador da equipe feminina de futsal do ITA, quando foram conquistadas as primeiras medalhas do ITA nesta modalidade em competições universitárias.

ISBN 978-858917124-3

9 788589 171243